Die Abschaffung der Schwere als Kraft

Vor genau einem Jahrhundert formulierte Albert Einstein die allgemeine Relativitätstheorie. Die mathematisch anspruchsvolle Theorie überfordert das menschliche Vorstellungsvermögen, hat aber alle Tests bis heute erfolgreich bestanden.

1905 formulierte Einstein die spezielle Relativitätstheorie. Ein wesentliches Element dieser Theorie ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Um die beobachtete Unveränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit c gegenüber Relativbewegungen in seine Theorie einbauen zu können, entwickelte er das Konzept, die Zeit als vierte Raumdimension zu betrachten. Diese vierte Raumdimension ct erhält man, indem man die Zeit t mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert.

Mathematiker vereinfachen die Theorie

Einsteins ETH-Mathematikprofessor Hermann Minkowski formulierte die spezielle Relativitätstheorie auf äusserst elegante Weise um. Es ist kaum zu glauben, aber die gesamte Theorie steckt im folgenden Satz: «Die Transformation von Zeit (ausgedrückt als Raumdimension ct) und Ort x in ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Koordinatensystem muss so sein, dass das sogenannte Linienelement Δs unverändert bleibt. Dabei gilt: $\Delta s^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2$.»

Als Beispiel für die Anwendung dieses Satzes diene ein Flugzeug, das mit einer Geschwindigkeit v fliegt und jede Sekunde (gemäss Flugzeuguhr) einen Blitz aussendet. Die Veränderung auf der Zeitachse beträgt im Flugzeug-Koordinatensystem $c \cdot \Delta t_F = 300\,000$ Kilometer. Die Position der Blitzlampe im Flugzeug verändert sich nicht: $\Delta x_F = 0$.

Bei der Transformation ins Bodensystem mit Koordinaten $c\,t_B$ und x_B soll sich Δs nicht verändern: $\Delta s^2 = c^2 \cdot \Delta t_F^2 = c^2 \cdot \Delta t_B^2 - \Delta x_B^2$. Die Veränderung der Position Δx_B der Blitzlampe vom Boden aus betrachtet im Zeitintervall Δt_B beträgt $v \cdot \Delta t_B$. Damit erhalten wir: $\Delta t_F^2 = \Delta t_B^2 \cdot (1 - v^2/c^2)$.

Da der Klammerausdruck kleiner ist als 1, sind die am Boden gemessenen Zeitintervalle Δt_B etwas grösser als Δt_F. Oder anders gesagt: Vom Boden aus betrachtet läuft die Zeit im Flugzeug etwas langsamer als am Boden. Diesen Effekt nennt man Zeitdilatation. Auf ähnliche Weise werden in bewegten Systemen auch die Längen verändert (Längenkontraktion). Daraus ergibt sich auch die Relativität der Gleichzeitigkeit.

Eine weitere Folgerung der speziellen Relativitätstheorie war auch die Gleichwertigkeit von Energie E und Masse m, ausgedrückt durch die wohl bekannteste Formel der Physik: $E = m \cdot c^2$.

Entscheidende Idee

Photonen besitzen als Lichtteilchen eine ganz bestimmte Energie E und werden deshalb wie Massen $m = E/c^2$ durch die Schwerkraft angezogen. Deshalb stellt sich die Frage: Wie lässt sich die Gravitation in die Relativitätstheorie einbeziehen? Einsteins entscheidende Idee war das Äquivalenzprinzip: In einem frei fallenden Kasten (**Abb. 1**) fühlt es sich gleich schwerelos an wie in einer Raumsonde weit weg vom Sonnensystem. Oder anders gesagt: In jedem physikalischen System, das sich ohne Antrieb frei bewegt, gelten die gleichen physikalischen Gesetze.

Wie müsste man die Beziehung zwischen Koordinaten und dem Linienelement umformen, um die Gravitationskraft zu berücksichtigen? Hier kommt der Beitrag des Schweizer Mathematikers Marcel Grossmann (**vgl. Buchbesprechung S.15**) ins Spiel. Er kannte die im 19. Jahrhundert durch den deutschen Mathematiker G. F. B. Riemann entwickelte nichteuklidische Geometrie bestens und konnte Einstein die passenden mathematischen Hilfsmittel zur Verfügung stellen.

Ein zentrales Element der nichteuklidischen Geometrie ist der Riemannsche Krümmungstensor, eine Art verallgemeinerter Vektor mit D^4 Komponenten für einen D-dimensionalen Raum (**vgl. Kasten**). Für eine zweidimensionale Fläche sind dies also $2^4 = 16$ Komponenten, die alle null werden, wenn die Fläche eben ist. Eine Kugeloberfläche ist gekrümmt, denn eine der 16 Komponenten ist nicht null, sondern eins. Ebenso ist die Oberfläche eines Kegels gekrümmt, nicht aber diejenige eines Zylinders. Die abstrakte mathematische Krümmung deckt sich also nicht ganz mit dem Alltagsgebrauch des Begriffes.

Abb. 1: Null-g-Parabolflug (entspricht frei fallendem Kasten) mit 30 Lehrpersonen und 2000 Bällen

Um den Krümmungstensor zu berechnen braucht man die Metrik g_{ik}, eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras (**vgl. Kasten**). Die Formel für die Bestimmung der Komponenten des Krümmungstensors ausgehend von der Metrik g_{ik} ist aufwändig (und wird daher nicht wiedergegeben), lässt sich aber mit Mittelschulmathematik bewältigen.

Raumkrümmung statt Schwerkraft

Die Metrik kann nicht nur für zweidimensionale Flächen formuliert werden, sondern auch für die vierdimensionale Raumzeit der Relativitätstheorie. Dabei ist es nebensächlich, dass die Krümmung der Raumzeit unser Vorstellungsvermögen übersteigt! Der Krümmungstensor der vierdimensionalen Raumzeit umfasst $4^4 = 256$ Komponenten. Einstein und Grossmann erkannten jedoch bereits 1913 in Zürich, dass ein vom Krümmungstensor abgeleiteter Ricci-Tensor R_{ik} mit «nur» 16 Komponenten bereits ausreicht, um den Einbezug des Gravitationsfeldes zu ermöglichen. Aber erst im November 1915 war Einstein in Berlin so weit, dass er seine Feldgleichungen formulieren konnte.

Das Entscheidende an der allgemeinen Relativitätstheorie ist, dass die Schwerkraft nicht als eigene Kraft betrachtet wird. Vielmehr werden die Bewegungen sowie andere Phänomene, die sich aus ihr ergeben, auf die Krümmung der Raumzeit zurückgeführt.

Das Wesen der Gravitationstheorie lässt sich am einfachst möglichen Beispiel verstehen, das der deutsche Physiker und Astronom Karl Schwarzschild 1915 als erster untersuchte. Er berechnete, wie eine kugelförmige, nicht rotierende Masse die vierdimensionale Raumzeit krümmt.

Die Einsteinschen Feldgleichungen reduzieren sich für das Vakuum um die Masse herum zu den 16 Gleichungen, die durch Nullsetzen aller Komponenten des Ricci-Tensors entstehen. Zur Lösung dieser Problemstellung muss also eine Metrik gefunden werden, so dass der daraus abgeleitete Ricci-Tensor null wird. Wir wissen a priori nur, dass eine solche Metrik stationär und kugelsymmetrisch sein muss. Mit einem entsprechenden Ansatz und der Forderung, dass weit weg von der Masse das Newtonsche Gravitationsgesetz gelten soll, erhält man nach beachtlicher Rechenarbeit die sogenannte Schwarzschildmetrik g^*_{ii}:

$$g^*_{ii} = \left(g^*_{00}, g^*_{11}\right) = \left(1 - \frac{r^*}{r}, -\frac{1}{1 - \frac{r^*}{r}}\right) \quad \text{wobei } r^* = \frac{2GM}{c^2}$$

r^* ist der sogenannte Schwarzschildradius, r die Entfernung vom Zentrum der Masse M, G die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit.

Setzt man die Massen von realen Himmelskörpern in die Gleichung ein, resultiert für die Erde ein Schwarzschildradius von rund 9 Millimetern und für die Sonne von 3 Kilometern, also ungeheuer kleine Werte! Deshalb sind die Auswirkungen der Raumkrümmung auf der Erde kaum messbar.

Für grosse Entfernungen r werden die beiden Komponenten der Metrik annährend 1 und -1. Sie geht also wie gefordert in diejenige einer flachen Raumzeit ohne Gravitation über und wird identisch mit der Metrik (1, -1) der speziellen Relativitätstheorie.

Abb. 2: Einstein-Kreuz: Der verwaschene Fleck ist eine 400 Lichtjahre entfernte Galaxie. Ein fast exakt dahinter liegender Quasar in 8 Milliarden Lichtjahren Entfernung wird durch ihr Gravitationsfeld viermal abgebildet und verstärkt (Gravitationslinseneffekt). Mit Hilfe der kugelsymmetrischen Schwarzschildmetrik ergäben sich zwei Kreisbögen. Da die Massenverteilung der Galaxie elliptisch ist, entstehen vier Abbildungen.

Gravitation verlangsamt die Zeit

Bemerkenswert ist, dass sich die Krümmung der Raumzeit auch auf die Zeit auswirkt. Um dies zu illustrieren, betrachten wir in einem fiktiven Beispiel eine Bodenstation mit einer Uhr, die via Radiowellen übermittelte Sekundenpulse einer Raumsonde empfängt. In einem globalen Koordinatensystem befindet sich das Zentrum der Erde im Nullpunkt und die Bodenstation auf einer Raumachse im Abstand r. Die Raumsonde liegt auf derselben Achse weit ausserhalb des Sonnensystems. In diesem globalen Koordinatensystem wird die Gravitation durch die oben formulierte Schwarzschildmetrik beschrieben.

Die Theorie sagt nun, dass für kurze Zeit ein lokales, beschleunigtes Koordinatensystem um die Bodenstation herum immer so gewählt werden kann, dass die Schwerkraft durch die Beschleunigung ersetzt wird. In diesem lokalen Koordinatensystem gilt die Metrik (1,-1) der speziellen Relativitätstheorie, und bei der Umrechnung vom globalen zum lokalen Koordinatensystem bleibt das Linienelement Δs unverändert. Da sich die Uhr der Raumsonde im globalen System nicht bewegt und die Uhr der Bodenstation im lokalen System ebenfalls nicht, sind beide $\Delta x = 0$ und das durch c^2 dividierte Linienelement wird: $\Delta s^2/c^2 = (1 - r^*/r) \cdot \Delta t_R^2 = \Delta t_B^2$.

Da $(1-r^*/r)$ ganz wenig kleiner als 1 ist, kommen die Sekundenimpulse ($\Delta t_R = 1s$) der Raumsonde bei der Bodenstation in Abständen Δt_B an, die etwas kleiner als eine Sekunde sind: Die Zeit im Gravitationsfeld läuft langsamer!

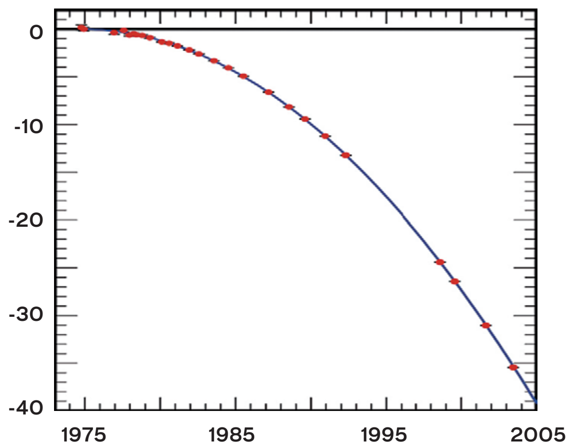

Abb. 3: Der Hulse-Taylor-Pulsar und sein Begleitstern sind beides Neutronensterne mit je 1,4 Sonnenmassen, die mit einer Umlaufzeit von nur 7,75 Stunden um ihren gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Die während 30 Jahren gemessene Umlaufzeit wird durch die Abstrahlung von Gravitationswellen immer kürzer. Aufgetragen ist die quadratische Abweichung der Periastron-Zeitpunkte (nächste Annäherung der beiden Neutronensterne) von einer linearen Funktion in Sekunden, entsprechend einer Verkürzung der Umlaufzeit um 67 Nanosekunden bei jedem Umlauf: rote Punkte. Die blaue Parabel ist die Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie.

Das GPS-System beweist, dass dies auch quantitativ genau zutrifft: Die Satellitenuhren gehen pro Tag auf Grund des dort kleineren Gravitationsfeldes um 45 Mikrosekunden schneller als diejenigen auf der Erde. Da die Satellitenuhren wegen der Relativgeschwindigkeit von 4 km/s um 7 Mikrosekunden langsamer ticken, sind sie insgesamt 38 Mikrosekunden pro Tag schneller. Die Atomuhren werden deshalb vor dem Start um diesen Betrag verlangsamt, um die Synchronisation mit den Bodenuhren zu gewährleisten. Sind die GPS-Satelliten auch nur um eine Mikrosekunde asynchron, entstehen Positionsfehler von bis zu 300 Metern (Lichtweg in einer Mikrosekunde).

Schwarze Löcher

Eine interessante Situation ergibt sich, wenn $r = r^*$ ist. In diesem Fall wird die erste Komponente der Schwarzschildmetrik 0 (die Zeit steht still, vgl. obige Rechnung mit $1 - r^*/r = 0$) und die zweite unendlich. Dies kann jedoch nur passieren, wenn die Masse M innerhalb des Radius r^* Platz hat, d.h. im Falle der Erde innerhalb von 9 Millimetern! Bei Neutronensternen mit Massen ab etwa 10 Sonnenmassen ist dies erstaunlicherweise möglich. Die Oberfläche der Kugel mit Radius r^* wird Ereignishorizont genannt, weil innerhalb dieser Kugel nicht einmal mehr Licht entweichen kann. Innerhalb der Kugel wechseln die Vorzeichen der Zeit-Metrikkomponenten g^*_{00} und der Radial-Metrikkomponenten g^*_{11}. Dies bedeutet: Hinter dem Ereignishorizont sind die Rollen von Radius und Zeit vertauscht – eine äusserst seltsame Welt!

Neue Einsichten für die Astronomie

Aus der Relativitätstheorie folgt, dass Lichtstrahlen, die nahe an der Sonne vorbeigehen, wegen der Raumkrümmung abgelenkt werden. Die Verzerrungen der Sternpositionen betragen rund 1,8 Bogensekunden, was 1919 näherungsweise und 1960 mit einer relativen Genauigkeit von 1 Prozent bestätigt werden konnte. Im Falle von schwarzen Löchern oder Galaxien ergeben sich Krümmungen, die Gravitationslinsen erzeugen und der Astronomie neue Horizonte eröffnet haben (**Abb. 2**).

Eine weitere Bestätigung der Relativitätstheorie ergab sich bei der Bewegung des Merkurs. Auf Grund der Störung durch andere Planeten dreht sich die grosse Achse der stark elliptischen Bahn des Merkur gemäss Rechnungen um 531 Bogensekunden pro Jahrhundert (531”/Jh), entsprechend einem vollen Umlauf der Achse in 244 000 Jahren. Beobachtungen ergaben jedoch eine Rotation um 574”/Jh. Die Differenz wird durch die Berechnung der Planetenbahnen mit Hilfe der Schwarzschildmetrik perfekt erklärt. Bei diesen Rechnungen wird keine Gravitationskraft verwendet, sondern die Planeten bewegen sich kräftefrei durch die gekrümmte Raumzeit!

Gravitationswellen

Bereits Einstein bemerkte, dass seine Feldgleichungen Gravitationswellen zulassen. Dies sind Schwingungen der Metrik, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die daraus entstehenden Oszillationen der Distanz zwischen zwei Punkten mit festen Koordinaten sind jedoch so klein (etwa ein Tausendstel eines Protondurchmessers auf drei Kilometer), dass sie noch nicht zweifelsfrei nachgewiesen werden konnten. Die Theorie erlaubt aber eine Berechnung der Energieabstrahlung durch Gravitationswellen bei Doppelsternsystemen, was deren Umlaufzeit verkleinert. Die Übereinstimmung mit Beobachtungen ist perfekt (**Abb. 3**).

Fritz Gassmann

Der Autor ist Physiker und arbeitete früher am Paul Scherrer Institut PSI in Villigen.

Die Metrik sagt, wie Linienelemente zu berechnen sind

Ein Vektor $V_i = (x_1, x_2, \dots x_D)$ hat in einem D-dimensionalen Raum D Komponenten. Sein einziger Index i läuft von 1 bis D. Ein Tensor hingegen hat mehrere Indices und deshalb auch viel mehr Komponenten.
Der Metriktensor g_{ik} hat D^2 Komponenten. Da wir hier nur speziell einfache Koordinatensysteme betrachten, verschwinden jedoch alle Komponenten mit i ungleich k. Daraus ergibt sich folgende Definition der Länge Δs eines Linienelementes:

$$\Delta s^2 = \sum_{i=1}^{D} g_{ii}\Delta x_i^2 = g_{11}\Delta x_1^2 + g_{22}\Delta x_2^2 + \dots + g_{DD}\Delta x_D^2$$

In einem krummlinigen Koordinatensystem (z.B. Polarkoordinaten) ist diese Definition nur korrekt, wenn Verbindungslinien von nahe benachbarten Punkten verwendet werden. Die Strecken Δx_i sind dann infinitesimal klein und werden als dx_i bezeichnet.

Beispiele für zwei Dimensionen:
Kartesische Koordinaten:
$g_{ii} = (1, 1)$ $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ (Satz von Pythagoras)
Polarkoordinaten:
$g_{ii} = (1, r^2)$ $\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2 \cdot \Delta\varphi^2$
spezielle Relativitätstheorie:
$g_{ii} = (1, -1)$ $\Delta s^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta x^2$

Mit Hilfe von Standardformeln lassen sich Transformationen in beliebige krummlinige Koordinaten elegant berechnen, sobald die Metrik bekannt ist: Für Einstein ein unschätzbares Hilfsmittel!