Flüstersender – Breitbandmodulation für GPS und WLAN

Neben einem Wasserfall zu flüstern ist keine gute Idee. Doch ganau das machen GPS-Satelliten und das WLAN! Wie können Handys und Computer die schwachen Signale erkennen, auch wenn mehrere Satelliten oder Router denselben Kanal benutzen? Die Breitbandtechnologie macht dies möglich.

Früher wurden geheime Botschaften verschlüsselt, um sie nicht in Feindeshände fallen zu lassen. Viel praktischer und sicherer wäre jedoch eine Radiostation, die ein schwaches Rauschsignal aussenden würde, dessen Existenz aufgrund des unvermeidlichen thermischen Rauschens von Empfangsstationen nicht festgestellt werden könnte. Wünschenswert wäre zudem, dass nicht nur eine, sondern verschiedene Sendestationen denselben Frequenzbereich nutzen können, ohne sich gegenseitig zu stören.

Die Realisierung eines solchen Systems scheint auf den ersten Blick unmöglich. Dennoch nutzen wir jeden Tag einen Teil der Lösung, ohne es zu merken. Mit einer uns gut bekannten Person können wir uns auch dann verständigen, wenn viele andere Stimmen auf demselben Frequenzband zu hören sind. Zu einem grossen Teil funktioniert dies, weil wir das Muster der vertrauten Stimme im Gedächtnis gespeichert haben und deshalb wissen, welche Muster wir aus dem Wirrwarr an Stimmen herausfiltern müssen. Diese Erfahrung enthält den Schlüssel zur Realisierung des unmöglich erscheinenden Projekts: Wie kann man ein Bit (d.h. eine 0 oder eine 1) mit einem Muster versehen, so dass das Bit mit Hilfe eines Schlüssels «herausgefischt» werden kann, selbst wenn es tief im thermischen Rauschen versteckt ist?

Mathematischer Geniestreich

Bereits im Alter von 10 Jahren beschäftigte sich das Wunderkind Évariste Galois mit mathematischen Fragen. 1830 reichte er in der Pariser Wissenschaftsakademie eine Arbeit ein, die postwendend als zu skizzenhaft und nicht den mathematischen Gepflogenheiten entsprechend zurückgewiesen wurde. 1832 starb Galois in einem Duell, und so dauerte es bis gegen Ende des Jahrhunderts, bis einige Mathematiker seine neue Theorie verstanden. Heute wird die Galois-Theorie als Verbindung zwischen Feld- und Gruppentheorie gesehen und benutzt, um feldtheoretische Probleme auf einfacher behandelbare gruppentheoretische Probleme zurückzuführen.

Ein Aspekt der Theorie sind mathematische Ringe, die heute mit Hilfe von elektronischen Schieberegistern realisiert werden können. Diese spielen für die Signalübertragung per GPS und WLAN eine entscheidende Rolle. Um das Prinzip zu verstehen, betrachten wir zunächst eine Sequenz von Binärzahlen der Länge m, also beispielsweise 01001 (m=5). Schiebt man die Zahlen um eine Position nach rechts und befördert die aus dem Schieberegister herausfallende Zahl in die auf der linken Seite frei werdende Zelle, entsteht die neue Sequenz 10100, dann 01010, 00101, 10010 und schliesslich wieder 01001. Umgerechnet ins Zehnersystem lautet die enstandene Folge 9, 20, 10, 5, 18, 9..., die einen geschlossenen Ring bildet, der 5 der möglichen 2^5=32 Zahlen umfasst. Neben den trivialen Ringen 00000 und 11111 gibt es noch 5 weitere Ringe mit je 5 Zahlen.

Um grössere Ringe erzeugen zu können, ergänzen wir das Schieberegister durch Anschlüsse und sogenannte EOR Operationen. *Exclusive OR Operationen* werden in allen Computern verwendet, um Binäradditionen zu ermöglichen: 0+0=0, 1+0=1, 0+1=1, 1+1=10 (die letzte Operation erzeugt in Computern einen Übertrag 1). Die EOR Operation ist also äquivalent mit «entweder oder» (engl. «exclusive or»): Das Resultat ist 1, wenn entweder der eine oder der andere Eingang 1 ist. Abb. 1 zeigt ein Schieberegister für m=5 mit einem Anschluss bei 2 (Typ 52 genannt).

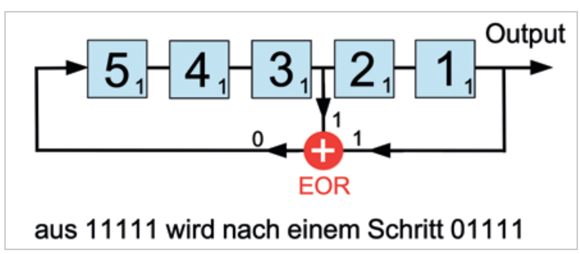

Abb. 1: Schieberegister vom Typ 52 mit 5 Zellen und einem Anschluss bei 2. Das + im roten Kreis bedeutet eine EOR-Operation. Die kleinen Zahlen zeigen den Inhalt der Register 1-5. (Bild: F. Gassmann)

Die triviale Folge 00000 bleibt immer noch unverändert und wird nachstehend nicht mehr betrachtet. Anders sieht es bei der Folge 11111 aus. Schiebt man jeweils die Zahlen nach rechts und ergänzt die Sequenz auf der linken Seite durch das Resultat der EOR-Operation, ändert sich die Sequenz in 30 Schritten zu 01111, 00111, 00011, 10001, 11000, 01100, 10110, 11011, 11101, 01110, 10111, 01011, 10101, 01010, 00101, 00010, 00001, 10000, 01000, 00100, 10010, 01001, 10100, 11010, 01101, 00110, 10011, 11001, 11100, 11110. Sie durchläuft also alle 31 möglichen Zustände (ausser 00000) des Schieberegisters vom Typ 52.

Schreibt man die am meisten rechtsstehenden Bits der 31 5-Bit-Zahlen hintereinander (in **Abb. 1** als Output bezeichnet), ergibt sich die Bit-Sequenz 1111100011011101010000100101100. Man nennt dies eine *Maximallängen-Sequenz* mit der Länge 2^m-1. Insgesamt gibt es 15 verschiedene Schieberegister-Typen mit 5 Zellen: 4 Register haben 1 Anschluss, 6 haben 2 Anschlüsse, 4 haben 3 Anschlüsse und der Typ 54321 hat 4 Anschlüsse. Maximallängen-Sequenzen werden jedoch nicht von allen, sondern nur von einigen dieser Typen erzeugt.

Bevorzugte Paare ergeben Goldcodes

Um die Sequenzen für elektronische Signale anwenden zu können, ersetzen wir für die nachfolgenden Überlegungen die Nullen durch -1. Dadurch erzeugen wir Sequenzen, deren Mittelwerte nahe bei Null liegen, was in elektronischen Schaltungen praktischer ist.

Ohne auf die Ring-Theorie weiter einzugehen, nehmen wir nun als Beispiel das Paar 52 und 5421, also das oben behandelte Register kombiniert mit einem Register mit 3 Anschlüssen. Diese beiden Register produzieren zwei unterschiedliche Maximallängen-Sequenzen der Länge 31.

Um einfacher darüber sprechen zu können, stellen wir uns die beiden Sequenzen als Vektoren mit 31 Komponenten vor (d.h. als 31-dimensionale Vektoren). Vektoren kann man skalar miteinander multiplizieren, indem man die entsprechenden Komponenten miteinander multipliziert und alle Produkte zueinander addiert. Als Beispiel gibt das Skalarprodukt der zweidimensionalen Vektoren (1,-1) und (-1,-1) den Wert 0. Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wie durch eine Skizze sofort ersichtlich wird.

Man nennt das betrachtete Registerpaar 52 und 5421 *bevorzugt*, weil die damit produzierten Zahlensequenzen unabhängig von den Startzuständen der Register immer nur drei mögliche Werte für das Skalarprodukt ergeben. Die Ring-Theorie beweist, dass die Skalarprodukte für alle bevorzugten Registerpaare der Länge m=5 erstaunlicherweise nur die Werte c = -9, -1, +7 annehmen können (c = -t, -1, t-2 wobei t=1+$2^{(m+1)/2}$=9). Beispielsweise ergeben die in **Abb. 2** wiedergegebenen Sequenzen S1 und S2 das Skalarprodukt +7. Es wird hingegen immer 31, wenn man einen Vektor mit sich selbst multipliziert, also sein Betragsquadrat berechnet.

Man erhält die in **Abb. 2** gezeigten Komponenten des Vektors G, indem man entsprechende Komponenten von S1 und S2 miteinander multipliziert und das Vorzeichen umkehrt. Solche G-Sequenzen werden nach Robert S. Gold (geb. 1946, publiziert

S1: -1-1-1+1+1-1+1+1+1-1+1-1+1-1-1 -1-1+1-1-1+1 -1+1+1-1-1 +1+1+1+1+1

S2:+1+1-1+1-1-1 -1+1 -1-1+1-1+1-1+1+1-1-1 -1-1+1+1+1-1-1+1+1 -1+1+1+1

G : +1+1-1-1+1-1+1 -1+1-1 -1-1 -1-1+1+1-1+1-1-1 -1+1-1+1-1+1 -1+1-1 -1 -1

G_r: -1+1+1-1-1+1-1+1 -1+1 -1-1 -1-1-1+1+1-1+1-1-1 -1+1-1+1-1+1 -1+1-1 -1

G = Goldcode (für Komponenten k=1...31 gilt: G_k = $-S1_k \cdot S2_k$)
G_r ist G um eine Stelle nach rechts phasenverschoben

Beispiele für einige Skalarprodukte und Summen:

G·S1 = -1   S1·S2 = 7   (S1·S2 ist das Skalarprodukt von S1 und S2)
G·S2 = -1   G·G_r = -9

Σ S1 = 1   Σ S2 = 1   (Σ S2 ist Summe aller Komponenten von S2)
Σ G = -7   Σ G_r = -7

Abb. 2: Durch komponentenweise Multiplikation zweier bevorzugter Sequenzen S1 und S2 entsteht ein Goldcode $G_k = -S1_k \cdot S2_k$. Durch Phasenverschiebung von S1 bei konstantem S2 können zusätzliche 30 Goldcodes erzeugt werden. Da auch S1 und S2 Goldcodes sind, entstehen total 2^m+1 = 33 verschiedene Goldcodes. Die Skalarprodukte G1·G2 zweier verschiedener Goldcodes ergeben für jede Phasenlage einen der Werte -9, -1, 7. Dies gilt auch für alle Skalarprodukte von einem Goldcode mit einer phasenverschobenen Kopie von sich selbst. Ohne Phasenverschiebung wird das Skalarprodukt eines Goldcodes mit sich selbst hingegen immer 31. (Bild: F. Gassmann)

1967) *Goldcodes* genannt. Sie besitzen dieselben Eigenschaften wie die bevorzugten Maximallängen-Sequenzen: Alle Skalarprodukte zwischen verschiedenen Goldcodes sind in jeder Phasenlage -9, -1 oder 7 (für m=5). Sie sind also viel kleiner als die Betragsquadrate, die immer 31 sind.

Ausgedrückt in Worten der Vektoranalysis bedeutet dies, dass alle Goldcode-Vektoren einigermassen senkrecht zueinander sind. Fast perfekt senkrecht sind zwei Goldcode-Vektoren dann, wenn ihr Skalarprodukt -1 und folglich -1/31 sehr nahe bei Null ist. Aber auch Vektoren mit Skalarprodukten 7 und -9 stehen genügend senkrecht aufeinander und stören sich gegenseitig nur wenig.

Deshalb können mehrere Goldcode-Signale auf demselben Fequenzband überlagert werden, ohne sich gegenseitig so stark zu stören, dass sie nicht mehr voneinander getrennt werden können. Sogar die Summen Σ aller Komponenten jedes Goldcodes ergeben dieselben drei Werte, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen, also 9, 1, -7. Nach Division durch 31 ergeben sich die Mittelwerte der Goldcode-Signale, die ebenfalls klein sind.

Breitbandmodulation bei GPS-Satelliten

Um Texte zu übertragen, benutzt jeder GPS-Satellit seinen eigenen Goldcode, der mit Schieberegistern der Länge m=10 erzeugt wird. Daraus entstehen Sequenzen der Länge $2^{10}-1=1023$. Für jedes zu übertragende Bit werden 20 Goldcodes hintereinander gesendet. Für jedes Informations-Bit werden also rund 20 000 Goldcode-Bits auf den Träger aufmoduliert. Ist das zu übertragende Bit 1, wird der positive Goldcode benutzt, für 0 wird der Goldcode invertiert.

Die für die Übertragung notwendige Bandbreite des Funkkanals wird entsprechend der Signalfrequenz auch 20 000 mal grösser. Deshalb nennt man dieses Modulationsverfahren Breitbandmodulation. Die rund 50 Watt Sendeleistung eines GPS-Satelliten werden auf ein breites Frequenzband verteilt und bestrahlen etwa einen Erdquerschnitt.

Umgerechnet auf die typischen Dimensionen von GPS-Antennen im Empfänger von etwa 5 mm ergibt sich eine Spannung in der Antenne von etwa 0,03 Mikrovolt. Dieses sehr kleine Signal gelangt in einen ersten Transistor zur Verstärkung. Aufgrund der thermischen Bewegungen der Elektronen ergibt sich in diesem Transistor eine Rauschspannung von etwa 1 Mikrovolt; sie ist also rund 30 mal grösser als das zu empfangende Signal!

Dieses thermische Rauschen ist unvermeidbar, wenn die erste Verstärkerstufe Umgebungstemperatur hat. Um es auch nur um den Faktor 10 zu reduzieren, müsste man den Eingangsverstärker auf etwa 3 Grad über dem absoluten Nullpunkt abkühlen, was technisch sehr aufwändig wäre. Das Signal ist also tief im Rauschen versteckt und die Bedingung, dass die Übertragung unhörbar sein soll, ist bestens erfüllt. Für das GPS sind jedoch andere Kriterien wichtiger, nämlich dass das Signal weitgehend unempfindlich ist gegen viele Störungen und gegenüber der Auslöschung durch Reflexionen an Gebäuden oder anderen Hindernissen.

Zur Demodulation berechnet man das Skalarprodukt zwischen dem stark rauschenden Empfangssignal EG und dem bekannten 20-fachen Goldcode G. Sind die Goldcodes in EG und G genau synchron, wird das Skalarprodukt gross und es entsteht eine detektierbare Spannung. Diese ist positiv, wenn das zu übertragende Bit 1 ist (Goldcode positiv) und sie ist negativ für das Bit 0 (Goldcode invertiert).

Das zufällige Rauschen wird bei der Berechnung des Skalarprodukts um den Faktor $(20 \times 1023)^{1/2} = 143$ reduziert, genauso, wie sich der zufällige Fehler (die Standard-Abweichung) bei n Wiederholungen einer Messung um die Wurzel aus n reduziert. Durch schrittweise Phasenschiebungen kann die Elektronik die synchrone Phasenlage eindeutig auffinden und so die Goldcode-Sequenz des Empfängers mit dem Signal synchronisieren und die zu übertragenden 50 Bits pro Sekunde detektieren.

Empfang mehrerer Satelliten

Der GPS-Empfänger muss auch die Signale von mehreren Satelliten trennen können, die alle im gleichen Frequenzband untergebracht sind. Dabei kommt die Eigenschaft der verwendeten Goldcodes (ein separater für jeden Satelliten) zum Tragen, dass diese praktisch senkrecht aufeinander stehen (d.h. das Skalarprodukt ist viel kleiner als das Betragsquadrat) und sich deshalb fast nicht beeinflussen. Auf dem Frequenzband hätten rund 250 GPS-Satelliten Platz, die alle gleichzeitig empfangen werden könnten!

Mit einer Simulation der Breitbandmodulation und des entsprechenden rauschenden Empfängers lässt sich zeigen, dass fehlerfreie Nachrichten von bis zu 30 Satelliten tatsächlich gleichzeitig aus dem strukturlosen *schschschsch…* herausgefiltert werden können, selbst wenn die Signale viel kleiner sind als die Rauschspannungen (vgl. Abb. 3).

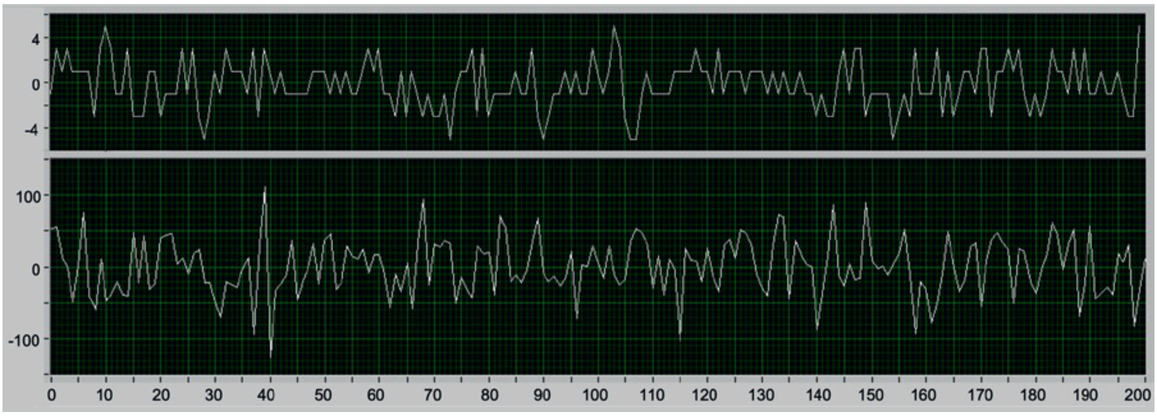

Abb. 3: Beispiel eines simulierten GPS-Empfangssignals mit 5 Satelliten im selben Frequenzband. Alle 5 Signale sind gleich stark und geben in der Empfangsantenne je eine Spannungsamplitude von einer Einheit (ca. 0.03 Mikrovolt). Es sind 200 Mikrosekunden des Signals dargestellt. Oben: reines Empfangssignal als Summe der 5 Einzelsignale. Unten: Überlagerung des Empfangssignals mit einer viel grösseren Rauschspannung mit Spitzen von über 100 Spannungs-Einheiten. Die darin eingebetteten GPS-Signale sind ohne Kenntnis der richtigen Goldcodes nicht detektierbar. Es hört sich an wie das Rauschen eines FM- oder TV-Empfängers, wenn kein Sender eingestellt ist. (Bild: F. Gassmann)

Breitbandkommunikation mit WLAN

Abb. 4 zeigt ein typisches Bild für die WLAN- (Wi-Fi-) Kommunikation in einem Gebäude, in dem mehrere Router (Modems) auf Kanal 6 des Frequenzbandes um 2,4 GHz in Betrieb sind. In diesem Frequenzband befinden sich auch Mikrowellenöfen, kabellose Telefone und Bluetooth-Geräte, die Computerverbindungen stören können. Das Frequenzband umfasst drei nicht überlappende 20 MHz breite Bänder, die in 12 Kanäle eingeteilt sind. Die Zentren der nicht überlappenden Bänder sind die Kanäle 1, 6 und 11, die durch Router normalerweise benutzt werden.

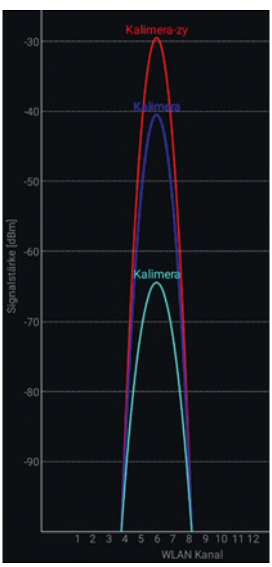

Abb. 4: Die App «WiFi Analyzer» zeigt 3 WLAN-Netze auf Kanal 6 mit Netzbezeichnung und Empfangsstärke in Dezibel (-20 dB bedeutet, dass die Empfangsspannung 10 mal kleiner ist). Der Router Kalimera (indigo) steht im Nebenzimmer. Ein WLAN-Repeater (blau) verstärkt das Netz Kalimera und befindet sich im selben Zimmer wie ein weiterer Router Kalimera-zy (rot). Alle 3 Netze sind mit dem Smartphone sehr gut zu empfangen, obwohl alle auf demselben Kanal sind und trotz unterschiedlichen Spannungen der Empfangssignale von über dem Faktor 30. (Bild: F. Gassmann)

Das Prinzip ist analog zum oben erklärten GPS-System. Da im Gegensatz zum GPS hohe Datenraten gefordert werden, müssen die Codes möglichst kurz sein. Der irische Physiker Ronald H. Barker (1915-2015) fand im Zusammenhang mit Radarsignalen kurze Codes, die den Goldcodes überlegen sind. Er entdeckte 1952 total 7 solche Codes mit Längen zwischen 2 und 13. Heute wird in allen WLAN-Geräten der folgende Barkercode mit Länge 11 verwendet: +1 +1 +1 -1 -1 -1 +1 -1 -1 +1 -1

Dieser Code hat ein Betragsquadrat von 11 und alle 10 phasenverschobenen Codes ergeben Skalarprodukte von -1, stehen also beinahe senkrecht zueinander (entsprechend einem Winkel von 95 Winkelgraden). Dies ist wesentlich besser als bei Goldcodes der Länge 7 oder 15 und die Bandbreite wird nur um den Faktor 11 grösser als diejenige der zu übertragenden Information. Der Nachteil gegenüber Goldcodes besteht darin, dass nur ein einziger Barkercode der Länge 11 existiert. Die Trennung einzelner WLAN-Netze voneinander muss durch die Phasenverschiebung realisiert werden, die maximal je 10 Netze auf den Kanälen 1, 6 und 11 erlaubt. Es können also maximal 30 WLAN-Netze nahe beieinander betrieben werden, was auch in Städten meist ausreicht.

Fritz Gassmann

Literatur

Im Internet finden sich meist gute Artikel mit den Suchbegriffen: Barker codes, direct-sequence spread spectrum, Galois theory, Gold code, GPS signals, maximum length sequence, WiFi, WLAN.