Fraktale Dimensionen – Bedeutung und Anwendungen

Wie lang ist die Küste des Zürichsees? Die Antwort auf diese banal erscheinende Frage eröffnete in den 1960er-Jahren eine neuartige Beschreibung von Strukturen in den Naturwissenschaften wie auch in der Medizin. Der folgende Artikel beschreibt die Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffs von ganzen auf gebrochene Zahlen und zeigt Beispiele für deren Verwendbarkeit in der Botanik und der Physik.

Das Problem bei der Messung der Küstenlinie des Zürichsees liegt beim verwendeten Massstab. Misst man die Länge der Küstenlinie auf einer Karte 1:100 000 mit einem ein Zentimeter langen Stück eines Zündholzes, wird man eine Länge in Kilometern erhalten. Mit 1:25 000er-Karten wird man mit demselben Zündholzstück jedoch eine grössere Gesamtlänge messen, da auch viermal kleinere Buchten berücksichtigt werden. Mit Hilfe von Satellitenbildern würde die Küstenlänge nochmals wesentlich grösser, weil nun Strukturen von etwa einem Meter Durchmesser sichtbar sind. Zu noch kleineren Massstäben kann man bei Seen nicht gehen, weil Wellen die Küstenlänge dauernd verändern würden. Die Frage lautet nun, wie man eine Dimension definieren könnte, die beliebigen Massstäben zwischen 1000 und 1 Meter gerecht würde.

Eigenschaften von glatten Strukturen

Betrachten wir eine quadratische Bodenplatte mit 40 cm Kantenlänge und fragen uns, wieviele Papierquadrate mit Kantenlängen von 40, 20, 10 und 5 cm es brauchen würde, um die Bodenplatte vollständig zuzudecken. Offensichtlich wären diese Zahlen N = 1, 4, 16, 64 für Quadrate mit Kantenlängen, die k = 1, 2, 4 und 8 mal kleiner sind als diejenigen der Bodenplatte. Die Beziehung zwischen N und k lautet also $N = k^D$ mit D = 2. Wir definieren nun D als Dimension der Fläche der Bodenplatte, die mit der intuitiv erwarteten Dimension übereinstimmt.

Interessant ist jedoch, dass wir die obige Relation nach D auflösen können mit dem Resultat $D = \text{Log } N / \text{Log } k$. Diese Formel gibt überraschenderweise auch die Dimension einer Kante der Bodenplatte korrekt wieder. Um die Kantenlinie mit denselben Quadraten zuzudecken, brauchen wir N = 1, 2, 4 und 8 Quadrate, deren Kanten k = 1, 2, 4 und 8 mal kleiner sind als diejenigen der Bodenplatte. Die Dimension wird nun offensichtlich D = 1 und stimmt mit unseren Erwartungen überein.

Testen wir noch die Dimension eines Eckpunktes der Bodenplatte. Unabhängig von der Grösse der Quadrate brauchen wir nur N = 1 Quadrat, um den Punkt zuzudecken. Der einzige Exponent D, der für alle k zu N = 1 führt, ist D = 0, was ebenfalls korrekt ist. Diese Methode funktioniert auch für jede höhere Dimension als 2 und wird in der Wissenschaft als *«box counting method»* bezeichnet.

Die Kochsche Monsterkurve

Der schwedische Mathematiker Helge von Koch hat 1904 eine überall stetige aber nirgendwo differenzierbare Kurve vorgestellt. Ohne es zu wissen, hat er damit eines der ersten fraktalen Objekte beschrieben. Es handelt sich um die folgende iterative Konstruktionsanleitung: Eine beliebige Strecke (Abb. 1a) wird in drei Teilstücke geteilt und das mittlere Teilstück (Abb. 1b) wird danach durch zwei gleiche Teilstücke ersetzt, sodass eine Zacke entsteht (Abb 1c).

Beim nächsten Schritt wird dasselbe Verfahren auf die nun vier Teilstrecken angewendet. Bei jedem Iterationsschritt wird die Gesamtlänge der Li-

Abb. 1: Erster Iterationsschritt zur Konstruktion einer Koch Kurve. Nach unendlich vielen Schritten befände sich eine Spitze an jeder Stelle, die Kurve wäre also nirgends differenzierbar. Ihre Länge innerhalb der hellblauen Fläche wäre unendlich gross und ihre fraktale Dimension betrüge 1,2619... (Bild: F. Gassmann)

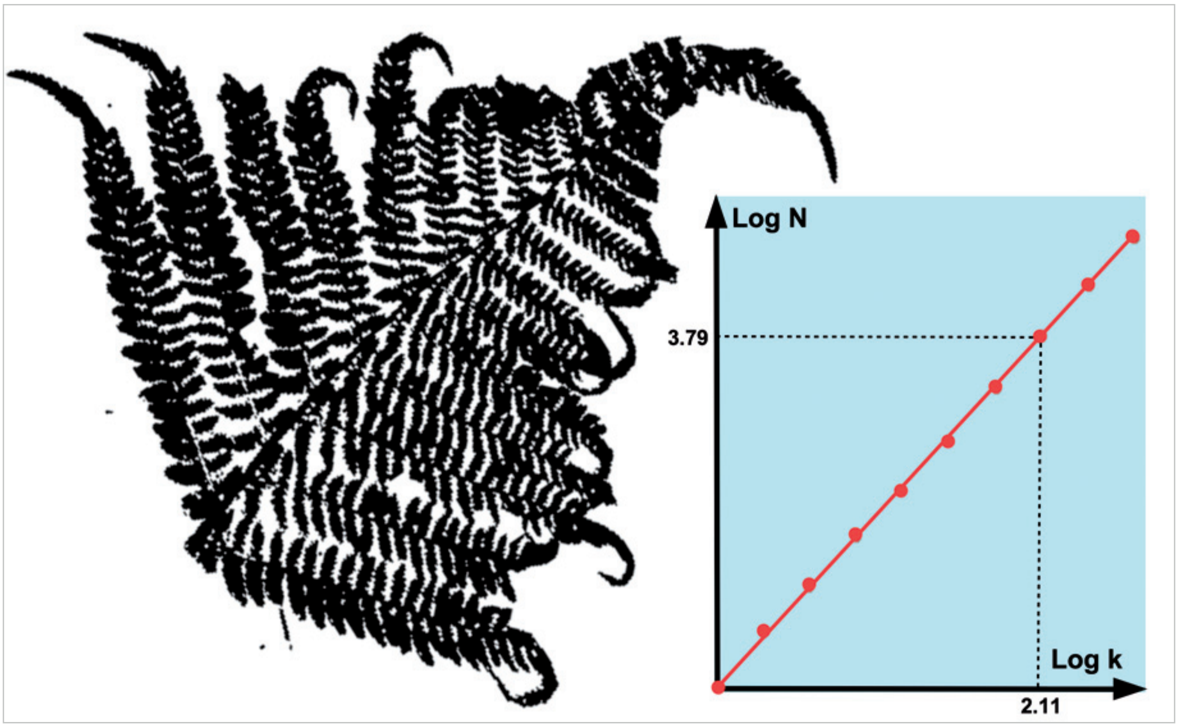

Abb. 2: Schwarz-Weiss-Scan eines Farnblattes und Resultat der «box counting method» mit k = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Die Anzahl N(k) Quadrate, die zur vollständigen Abdeckung nötig sind, ergibt doppelt logarithmisch dargestellt fast exakt eine Gerade mit Steigung 3,79/2,11 = 1,8. Dies ist die fraktale Dimension der Umrisslinie des Blattes. Dabei ist 2,11 = Log(128) und 3,79 = Log(6119). Eine Verkleinerung der Kantenlänge der Quadrate um den Faktor k = 128 hat bewirkt, dass N(k) = 6119 Quadrate zur Abdeckung nötig wurden und nicht nur 128 wie im Falle einer geraden Linie mit Dimension D=1. (Bild und Rechnung: F. Gassmann)

nie um den Faktor 4/3 grösser und nach unendlich vielen Schritten wird sie unendlich lang. Eine unendlich lange Linie innerhalb des hellblauen Rechtecks **(Abb. 1c)** wurde vor gut einem Jahrhundert als Monster empfunden.

Der Mathematiker Benoît Mandelbrot hat für solche Gebilde 1975 den Begriff Fraktale eingeführt, der Bezug nimmt auf deren gebrochene Dimensionen. Für die Koch Kurve ergibt sich eine Dimension analog der obigen Definition zu D = Log 4 / Log 3 = 1,2619..., die zwischen der üblichen Dimension einer Linie und derjenigen einer Fläche liegt.

Die fraktale Dimension der Koch Kurve kann genau bestimmt werden, weil es sich um eine streng selbstähnliche Struktur handelt, d.h. dieselbe Zacke erscheint in immer kleinerer Ausführung unendlich oft. Auch die *«box counting method»* ergäbe dasselbe Resultat, allerdings müsste bis zu enorm kleinen Quadraten gerechnet werden, um die Genauigkeit von 4 Stellen nach dem Komma zu erreichen.

Umrisslinie von Farnkraut

Stellvertretend für sehr viele natürliche Strukturen, wie beispielsweise diejenigen von Broccoli, Schneeflocken, Salzkristallen oder Staubpartikeln, betrachten wir Farnkraut aus dem Garten des Autors.

Abb. 2 zeigt ein typisches Exemplar, dessen Umrissdimension mit Hilfe der *«box counting method»* bestimmt wurde. Dazu wurde das Farnkraut mit Hilfe eines Scanners in ein hochaufgelöstes Schwarz-Weiss Computerbild (ohne Grautöne) umgewandelt, das hernach durch ein entsprechendes Programm mit immer kleineren Quadraten abgedeckt wurde. Die Funktion N(k) ist in doppelt logarithmischer Darstellung im untersuchten Intervall zwischen etwa 200 mm (Blattdurchmesser, k = 1) und 0,4 mm (2^9 = 512 mal kleinere Kantenlänge, k = 9) fast perfekt linear. Die Steigung dieser Geraden beträgt 1,8 und wird als fraktale Dimension der Umrisslinie des Blattes bezeichnet. Sie ist wesentlich grösser als die Dimension der Koch Kurve, weil die Farn-Finger im Vergleich zu den kurzen und flachen Koch-Spitzen viel länger sind.

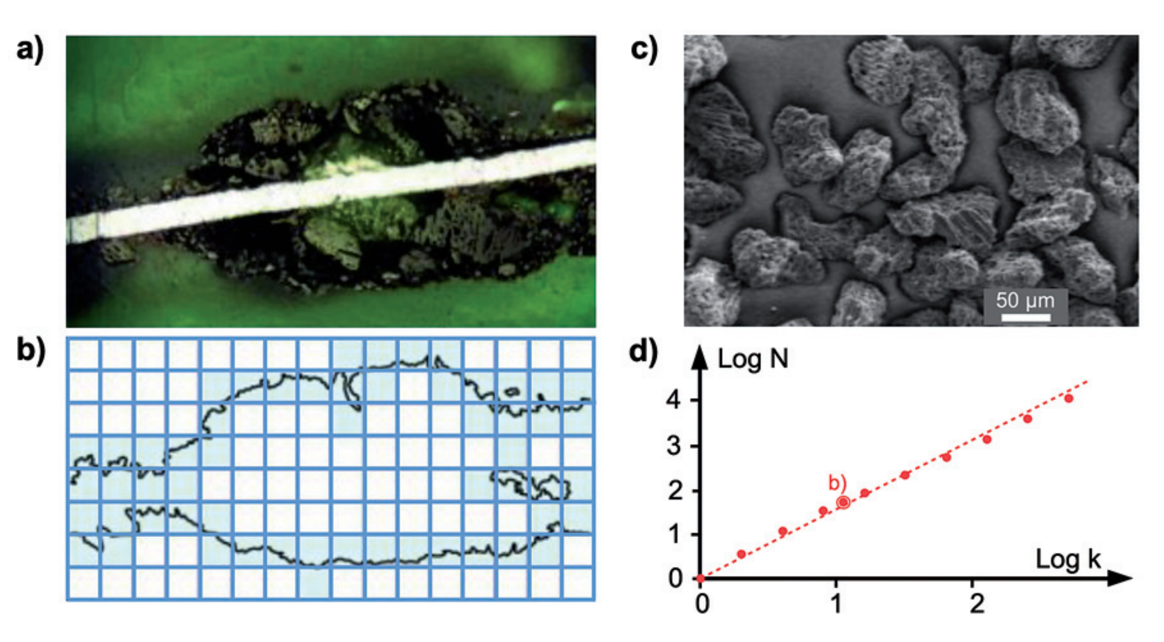

Abb. 3: Messung der fraktalen Dimension der Elektrodenoberfläche eines Supercaps.

a) Ausschnitt von 600 mal 300 Mikrometern aus dem Querschnitt durch eine Supercap-Doppelelektrode. Der helle Streifen ist die 30 Mikrometer dicke metallische Trägerfolie, die insgesamt 0,1 m breit und 2 m lang ist. Die grüne Harzfüllung dient der Stabilisierung der empfindlichen Kohlenstoffstruktur, um sie beim Schneiden nicht zu zerstören. Anstelle der Harzfüllung dient im funktionierenden Supercap ein Salzionen enthaltendes organisches Lösungsmittel als Elektrolyt.

b) Von Hand nachgezeichnete Umrisslinie der Kohlenstoffstruktur überlagert mit einem Gitter bestehend aus 16 x 8 = 128 Quadraten. Die N = 56 hellblau gefärbten Quadrate decken die Umrisslinie vollständig ab. Für dieses Beispiel ist der Verkleinerungsfaktor der Kantenlänge der Quadrate k = 11,3 (Wurzel aus 128).

c) Die elektronenmikroskopische Aufnahme zeigt Oberflächen-Rauhigkeit auch im Mikrometer-Massstab und stützt die Vermutung, dass sich die fraktale Dimension unverändert bis in die Nanometer-Grössenordnung fortsetzt.

d) Die doppelt logarithmische Darstellung für N als Funktion von k ergibt angenähert eine Gerade mit der Steigung D = 1,6. D ist die fraktale Dimension der Kohlenstoff-Umrisslinie, D+1 diejenige der Kohlenstoff-Oberfläche. Der mit b) markierte Punkt entspricht dem unter b) gezeigten Abdeckungs-Gitter mit 128 Quadraten. (Bild aus Gassmann et al. 2003)

Grosse Oberflächen in Physik und Chemie

Oberflächen haben überragende Bedeutung zum Beispiel bei Katalysatoren, bei der Adsorption von Gasen in Gasmasken oder bei Elektroden von Batterien und Kondensatoren. Der Autor hat am Paul Scherrer Institut im Zusammenhang mit der Entwicklung von Supercaps, d.h. Kondensatoren mit sehr grosser Kapazität (Gassmann et al. 2003), die fraktale Dimension der Oberflächen von Elektroden untersucht.

In der Elektronik sind drei Arten passiver Bauelemente von grundlegender Bedeutung: Widerstände (Masseinheit Ohm), Kondensatoren (Ladungsspeicher, Kapazität mit Masseinheit Farad) und Induktivitäten (meist Spulen, Induktivität mit Masseinheit Henry). Ein Kondensator besteht aus zwei Elektroden mit Oberflächen A und dazwischenliegender Isolationsschicht mit Dicke d. Seine Kapazität ist $C = \varepsilon_0\, \varepsilon\, A/d$, wobei ε_0 eine Naturkonstante ist und ε die stoffabhängige Dielektrizitätskonstante der Isolationsschicht bedeutet. Die Masseinheit Farad von C wurde nach dem englischen Wissenschaftler Michael Faraday (1791 - 1867) benannt und Kapazitätswerte sind üblicherweise sehr kleine Zahlen, wenn A/d in Metern gemessen wird. Deshalb werden Kapazitäten meist in nF (nano-Farad) oder µF (mikro-Farad) angegeben.

Die gespeicherte Energie $E = ½\, C\, U^2$ ist sehr klein und beträgt selbst für einen grossen Kondensator mit C = 8000 µF bei einer angelegten Spannung U = 2,5 Volt nur 0,025 Ws (Wattsekunden oder Joule). Mit dieser Energie könnte man eine Masse von 1 kg nur um 2,5 Millimeter anheben oder eine 2,5 Watt LED-Lampe während einer Hundertstelsekunde zum Leuchten bringen.

Als Energie-Zwischenspeicher zur Überbrückung von Netz-Spannungsschwankungen oder für Leistungsreserven in Elektroautos kommen herkömmliche Kondensatoren deshalb nicht in Frage.

Bei den die Kapazität bestimmenden Parametern ε und d sind bei herkömmlichen Elektrolytkondensatoren keine wesentlichen Optimierungen mehr möglich. Einzig bei der Elektrodenfläche A können durch den Übergang auf fraktale Oberflächen revolutionäre Erfolge erzielt werden. **Abb. 3** zeigt einen Querschnitt durch eine Kohlenstoff-Elektrode und die mit Hilfe der *«box counting method»* bestimmte fraktale Dimension der Umrisslinie von 1,6 im Massstabs-Intervall von 600 bis etwa 1 Mikrometer.

Da sich in diesem gegen 3 Dekaden grossen Intervall in der doppelt logarithmischen Darstellung eine fast perfekte Gerade ergab, durfte angenommen werden, dass die fraktale Dimension von 1,6 auch näherungsweise für den gesamten Bereich von 0,1 m (Breite des 2 m langen Metallfolienstreifens, der die poröse Elektrodenstruktur trägt) bis zu einem Nanometer (Grösse der Mikroporen) gilt.

Der Oberflächen-Vergrösserungsfaktor des 0,2 m^2 grossen Elektrodenstreifens ergibt sich damit über die 8 Zehnerpotenzen des Längenintervalls zu $10^{8 \times 0,6} \approx 60\,000$.[1] Die für die Kapazität massgebende aktive Oberfläche beträgt also $0,2 \times 60\,000\ m^2 = 12\,000\ m^2$ und entspricht etwa einem sehr grossen Fussballfeld.

Entsprechend dazu vergrössert sich auch die Kapazität, die mehrere Tausend Farad erreichen kann. Die bei 2,5 Volt in einem 2000 Farad Supercap gespeicherte Energie ist gut 6 Kilowattsekunden. In einem Modul mit 200 solchen Supercaps könnte also über 1,2 Megawattsekunden Energie gespeichert werden, was ausreichen würde, um eine Tonne um 120 Meter anzuheben oder einen 1000 Watt Elektromotor während 20 Minuten zu betreiben. Dazu kommt die Eigenschaft von Kondensatoren, praktisch instantan sehr grosse Ströme liefern zu können.

1 Begründung: Die Umrisslinie hat die Dimension 1,6. Die aktive Elektrodenoberfläche hat also die Dimension 2,6. Dies sind 0,6 Dimensionseinheiten mehr als die Dimension des glatten Elektrodenträgerstreifens. Jede Zehnerpotenz des Längenintervalls vergrössert also die Oberfläche um $10^{0,6} = 3,98$ und $3,98^8 \approx 60\,000$.

Diese Spezifikationen erlauben interessante Anwendungen in vielen technischen Bereichen wie Netzstabilisatoren, Überbrückung zwischen Netzausfall und Inbetriebnahme von Notstromaggregaten, Glättung von Stromspitzen, die beim Anfahren grosser Elektromotoren entstehen, Rekuperierung von Bremsenergie oder Bereitstellung von Zusatzschub in Elektrofahrzeugen, etc.

Schlussbetrachtung

Der vorliegende Artikel gibt die Grundidee einer komplizierten mathematischen Konstruktion mit einfach verständlichen Anwendungen. Neben der gut nachvollziehbaren *«box counting method»* gibt es jedoch etwa 10 weitere Dimensions-Definitionen, die bei bestimmten Anwendungsfällen zu unterschiedlichen Resultaten führen können. Alle Methoden liefern aber für Punkte, Geraden und Ebenen die Dimensionen 0, 1 und 2 und alle stimmen für kompakte exakt affin-selbstähnliche mathematische Strukturen überein.

Das Konzept der fraktalen Dimension ist derart flexibel anwendbar, dass es heute in praktisch allen naturwissenschaftlichen Gebieten verwendet wird. In der Physik sind Anwendungen in der Astronomie, Akustik, in den Erdwissenschaften, bei mechanischen Reibungsvorgängen oder elektrischen Kontaktwiderständen häufig. In der Chemie sind Fraktale im Zusammenhang mit elektrochemischen Prozessen, diffusionslimitierter Aggregation, Korrosionserscheinungen oder Oberflächenbeschaffenheiten anzutreffen. In der Biologie ist es hilfreich, Strukturen von Ökosystemen oder Lebewesen (Organe, Gewebe) mit Hilfe fraktaler Dimensionen zu charakterisieren. In der Medizin spielen Fraktale vor allem in der diagnostischen Bildgebung und in der Neurologie eine wichtige Rolle. Ganz allgemein sind Attraktoren (quasistabile Zustände) in komplexen nichtlinearen Systemen (z.B. globales Klimasystem) komplizierte Strukturen mit fraktaler Dimension.

Fritz Gassmann

Literatur

Gassmann F., Kötz R. & Wokaun A. 2003. Supercapacitors boost the fuel cell car. Europhysics News 34(5): 176-180.