Zur Reform des geometrischen Unterrichts.

Von

Wilh. Fiedler.

Seit Anfang unseres Jahrhunderts — um von früherer Zeit ganz abzusehen — haben eine lange Reihe von Mathematikern den Unterricht in der Elementargeometrie und die demselben gewidmeten Lehrbücher unzureichend gefunden und zur Verbesserung des ersteren durch Aufstellung neuer in mannichfachen Arten veränderter Lehrgebäude mit zu wirken gesucht. Und dass diese Bemühungen ebenso wohl von den Lehrern der Mittelschulen wie von den Professoren der Hochschulen ausgingen, zeigt wenigstens das Eine sicher an, dass das Gefühl der Unvollkommenheit des Hergebrachten ein allgemein getheiltes war — ungeachtet und wohl auch unbeschadet alles Lobes und Preisens für die Elemente des Euklid, welches ja schon fast ebenso altehrwürdig herkömmlich war wie diese Elemente selbst.

Fast jedes neue Unternehmen dieser Art konnte sich mit dem Hinweis darauf einführen, dass auch die besten Schüler unter der Einwirkung der bisherigen Methode schliesslich aus dem Unterricht über Geometrie nicht den Eindruck eines wohlgeordneten Ganzen davontrugen, sondern vielmehr nur eine Fülle von Einzelheiten, leicht verlierbar und von einem viel geringeren Bildungswerth als sie nach der darin niedergelegten Kunst und Feinheit zahlreicher scharfer Denker sicher haben sollten. Wenn aber auch diese Motivirung in letzter Zeit aus der Mode gekommen ist, so geschah das doch kaum, weil sie nicht mehr richtig, sondern wohl nur, weil sie so gar nicht mehr neu ist und weil sie nicht zu denen gehört, die eine öftere Wiederholung ohne Selbstbeschädigung ertragen.

Dass das Uebel aber das alte ist wird gleichwohl kaum geleugnet werden; denn noch heute wie früher ist es eine Erfahrung der Pädagogen, der nicht widersprochen wird, dass gute Erfolge in der Geometrie sehr selten sind unter den Schülern aller Schulen. Und doch kann eine schlimmere Kritik der Methode kaum gedacht werden, weil bei einiger Prüfung einem unbefangenen Beurtheiler die Wahrheit der Behauptung schwerlich einleuchten wird, durch die man jene Erfahrung erklären will, der Behauptung nämlich, dass das Talent für Geometrie ein ganz ausnahmsweise seltenes und vereinzeltes sei. Es ist ja so viel einfacher und natürlicher, zu denken, dass die betreffende Anlage nicht recht geweckt und entwickelt wurde; denn wie sollte die Anlage und das Interesse gerade für diese Richtung des menschlichen Denkens so vielen sonst gut begabten Köpfen fehlen? Ist doch der Mensch zur Orientirung im Raum sinnlich ebenso reich wie fein ausgerüstet und ist ihm doch diese Orientirung selbst ein erstes und unumgängliches Lebenserforderniss! Und das wissenschaftliche Denken in dem Gebiete dieser Orientirung sollte unter denen, welche überhaupt wissenschaftlicher Durchbildung und Arbeit zugewendet und für dieselbe ausgerüstet sind, nur so wenigen adäquat sein? Gewiss, so lange noch eine Möglichkeit bleibt, die Erfahrungen der Pädagogen anders zu erklären, wird diess nicht anzunehmen sein; und die Kritik, welche die Verfasser neuer Lehrbücher an den Systemen und Methoden ihrer Vorgänger immer von neuem geübt haben, dürfte selbst um Vieles weniger lebhaft, energisch und eingehend gewesen sein, um doch jedem ruhig prüfenden Leser diese Möglichkeit als eine noch offene, ja eigentlich als die einzig zulässige kenntlich zu machen.

Wenn nun zugleich je länger desto mehr die fundamentale Wichtigkeit der Mathematik für alle auf das Verständniss der Natur gerichteten wissenschaftlichen Bestrebungen zur Geltung kam, so ist es angesichts der unbestreitbaren Wahrheit, dass alle Anwendung der Mathematik auf die Naturwirklichkeit durch die Geometrie hindurchgehen oder doch mit ihr in Verbindung treten muss, nur ganz natürlich, dass die erwähnten Reformbestrebungen nicht ermüden und dass sie nicht ruhen wollen und können, bevor sie ihr Ziel wenigstens einigermassen vollständig erreicht haben.

Und so regt sich heute so lebhaft, nein lebhafter als jemals früher das Bedürfniss nach einem organischen Aufbau des Systems unserer Kenntnisse vom Raum und seinen Gestalten. Man weiss nun längst, dass die Gegensätze von synthetisch und analytisch, von dogmatisch und heuristisch den Kern der Sache nicht treffen, dass die blosse Einfügung einiger moderner Elemente in das herkömmliche Lehrgebäude wahrscheinlich mehr schadet als nützt und dass selbst eine genetische Entwicklung die Schwierigkeiten nicht beseitigt und das Problem nicht löst, weil sie ja nicht ernstlich möglich ist, so lange nicht ein allgemeines Princip von unmittelbar einleuchtender Berechtigung an die Spitze der Entwickelung gestellt werden kann. Die Frage aber, ob die Forderung nach einem solchen Princip nicht eine unmöglich zu erfüllende und daher eine unberechtigte ist, legt jedem Kenner die Erinnerung an die berühmte Anfangsstelle der Vorrede Jacob Steiner's zu seinem Hauptwerke »Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander« (1832) nahe, von der hier einige Sätze stehen mögen, weil das Werk jetzt selten geworden ist. Es heisst dort: »Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen und verwandte sich zu wohlbegrenzten Gruppen vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können!« Und die Kenner wissen auch, dass diese Worte nicht phantasievoll überschwänglich das Errungene vergrössern, sondern dass sie einfach das Ziel schildern, welches mit Steiner im Wesentlichen erreicht wurde; sie wissen, dass der Besitz einer geringen Anzahl von Fundamentalbeziehungen, aus welchen sich das Ganze organisch aufbauen lässt, den grossen Vorzug der neueren oder projectivischen Geometrie und ihren höchsten Reiz bildet.

Aber das gilt, so fügt man hinzu, nur von der »neueren« oder wie man auch gesagt hat von der »höheren« Geometrie und kommt den Elementen nicht zu gut, weil die Bedeutung jener Fundamentalbeziehungen erst auf Grund derselben in's Licht gestellt und eben zum Ausgangspunkt einer neuen und höheren Reihe von Entwicklungen gemacht wird. Indessen erscheint es so doch nur dann, wenn man die Steiner'sche Schöpfung losgelöst betrachtet von ihren historischen Voraussetzungen, von den Arbeiten von Möbius, Poncelet, Monge, von Lambert, Taylor und Desargues. Wenn aber eine solche unhistorische Betrachtungsweise in der Wissenschaft und besonders für die Unterweisung in derselben überhaupt sehr selten oder niemals statthaft ist, weil die Geschichte des Werdens der beste Führer zum Studium des Gewordenen zu sein pflegt, wenn uns das Verständniss des Letzteren vollauf gesichert ist — so besonders in diesem Falle. Denn die historische Betrachtung zeigt sofort, dass die Erkenntniss jener Fundamentalbeziehungen sich wesentlich an die Wiedererweckung der darstellend geometrischen Methode knüpft, insbesondere an Poncelet's Wiederaufnahme der allgemeinen Methode der Perspective, welche schon fast zwei Jahrhunderte früher bei Desargues zur Theorie der Involution in einer vor der Wiederentdeckung eines grossen Theils seiner Schriften ungeahnten und kaum glaublichen Ausdehnung und Vollständigkeit geführt hatte. (Für die Belege und weitere Ausführung verweise ich auf mein Buch: »Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage« 2. Aufl. 1875, Quellen- und Literatur-Nachweisungen p. 731 f.).

Und diese Einsicht schien mir immer nicht blos für die richtige Behandlungsweise der darstellenden Geometrie und der Geometrie der Lage oder der projectivischen Geometrie, für welche ich seit vielen Jahren als Lehrer und Schriftsteller eingetreten bin, sondern auch für die nothwendige Umgestaltung des gesammten geometrischen Unterrichts auf allen Stufen den rechten Wegweiser darzubieten. Wie es meinem Wirkungskreise entsprach, habe ich den Nachweis für die einfache Möglichkeit einer solchen Umgestaltung im Gebiete des Hochschul-Unterrichts für die Sphäre der allgemeinen algebraisch-geometrischen Untersuchungsmethoden geführt (vergl. a. a. O. Dritter Theil, insbesondere die Theorie der projectivischen Coordinaten p. 521—568 etc., und diese Vierteljahrsschrift Bd. 15, p. 152 f.); aber ich bin niemals darüber in Zweifel gewesen, dass das Nämliche auch für den Elementarunterricht gelte, weil die darstellend geometrische Methode allein die fundamentale Bedeutung der Steiner'schen Elementargebilde und die natürliche Richtung der Untersuchung auf die projectivischen Eigenschaften der Figuren ganz direct hervortreten lässt durch ihre Bedeutung im Vorgange des Projicirens. Ich habe es nur für unzweckmässig und für wirkungslos gehalten, früher meinerseits die bezüglichen Ansichten näher und auch über meine eigentliche Wirkungssphäre hinaus zu besprechen; wenn ich aber in der Vorrede meines Buches von 1870 sagte: Ich habe eine Reform des Unterrichts in den Elementen — nämlich der darstellenden Geometrie — nicht im Auge und halte sie für entbehrlich, glaube aber auch, dass man sie in keinem Falle wird vollziehen können ohne eine Reform des gesammten geometrischen Unterrichts damit zu verbinden — so lag dem dieselbe Gesammtanschauung der Frage zu Grunde. Jetzt lassen gewisse Zeichen der Zeit es mir angebracht erscheinen, aus dieser Zurückhaltung herauszutreten; ich darf jetzt auch wohl hoffen, dass ein offenes Aussprechen meiner Ansichten zur Klärung und Förderung der Sache beitragen kann, die im Zuge ist; aber ich übersehe dabei auch jetzt nicht, dass die wirkliche Durchführung in allem Einzelnen der Einsicht und Ueberzeugung der an unsern Mittelschulen wirkenden Lehrer überlassen werden muss, und ich beschränke mich desshalb auf die Betonung dessen, was mir als entscheidende Hauptsache erscheint.

Die Ueberlegung des Inhalts geometrischer Elementarbücher macht ersichtlich, dass derselbe beginnen muss mit einer Erläuterung und construirenden Verbindung der Grundbegriffe, der Raumelemente, mit der Erörterung ihrer gegenseitigen Beziehungen und ihrer Verbindungen zu Figuren und Systemen; es ist natürlich, dass dieser Theil der Erörterung in der Stereometrie einen wesentlich grösseren Raum einnimmt als in der Planimetrie, und man sieht kein schlimmeres Hinderniss als das Herkommen, welches einer Verbindung dieser beiden Parthien zu einem Ganzen im Wege stände, das von einem Anschauungsunterricht und einer geometrischen Propädeutik zur wissenschaftlichen Betreibung der Geometrie hinüberführte. In demjenigen, was dann in den geometrischen Lehrbüchern folgt, treten als wesentlich und characteristisch die Lehren von der Congruenz und der Aehnlichkeit, von der Gleichheit und etwa auch von der Symmetrie in beiden Theilen hervor, und im Zusammenhang mit diesen Lehren sehen wir eine Reihe von Anwendungen auf die Untersuchung der Figuren, besonders auch des Kreises, und eine Fülle von mehr oder weniger nothwendigen Sätzen, die je nach dem Umfang der Bücher und den Standpunkten der Verfasser wechseln. Endlich folgt die Trigonometrie mit ihren Anwendungen.

Von diesen Hauptbestandtheilen ist offenbar der erste wesentlich beschreibend oder darstellend; zuerst gewissermassen von sinnlichen Anschauuungen zu geistigen überführend, die nöthigen Abstractionen bildend und klärend, um sodann mit denselben construirend vorzugehen. Ich frage hierzu: Warum sollte man in diesem Theil des Unterrichts nicht zum bessern Verständniss und der Verwerthung der Definitionen Uebungen machen, wie folgende: Eine drei- oder mehrseitige Ecke, ein Tetraeder, Parallelepiped, etc. ist gegeben — respective liegt etwa nach Stabmodell gezeichnet vor; man kennt von einer geraden Linie die beiden Punkte, in welchen sie zwei der zugehörigen Flächen durchstösst, und verlangt zu zeigen, wie die Schnittpunkte derselben mit den übrigen Flächen und die Querschnitte der Gesammtoberfläche der Ecke und des Körpers mit einer durch die Gerade nach einem gegebenen Punkte einer Fläche oder mit den durch sie nach den Eckpunkten des Körpers gehenden Ebenen zu bestimmen respective zu verzeichnen sind. Oder es ist der Querschnitt der Körperoberfläche mit einer Ebene zu construiren, die durch drei auf solchen Geraden gegebene Punkte bestimmt ist; oder es sind die durch einen so gegebenen Punkt gehenden Transversalen zu den Paaren der nicht in einer Ebene liegenden Kanten des Körpers respective ihre Querschnitte mit diesen Kanten anzugeben; etc. Eigentliche descriptive Geometrie ist zur Ausführung solcher Probleme nicht erforderlich; sie bilden eine einfache Verbindung der Uebung im Zeichnen nach Stabmodellen mit den fundamentalen Definitionen der Geometrie und führen sofort zur Correctur des etwa der Wahrnehmung nicht treu genug Abgesehenen und zu der Einsicht von der Unentbehrlichkeit einer solchen Correctur in allen Fällen, wo es sich um mathematisch bestimmte Formen handelt. In der üblichen Behandlung der Elemente der descriptiven Geometrie ist sogar nicht einmal der rechte Platz für dergleichen; es bildet vielmehr die Unterlassung solcher Uebungen heutzutage eines der wesentlichsten Hindernisse des Verständnisses dieser Elemente; sie gehören ohne Zweifel zu dem bezeichneten ersten Hauptbestandtheil der Geometrie.

Ich wende mich zum zweiten. Man weiss seit Möbius' classischem Werke: »Der barycentrische Calcul« 1827. (Vergl. Abschnitt 2.), dass Congruenz und Aehnlichkeit zwei von den Verwandtschaften der ebenen Figuren sind, bei welchen jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der andern und zugleich jeder geraden Linie eine gerade Linie entspricht; und Möbius hat ebendort im 3. und 4. Kapitel (p. 191 und p. 273 f.) diesen beiden die Verwandtschaft der Affinität und diejenige der Flächengleichheit als weitere elementargeometrische Verwandtschaften angeschlossen, nicht bloss für ebene Figuren, sondern ebenso für den Raum von drei Dimensionen; er hat sodann gezeigt, dass diese Verwandtschaften als specielle Fälle in der allgemeinen Verwandtschaft der Collineation enthalten sind, für welche eben nur jene beiden Bestimmungen gelten, wonach der Punkt, die gerade Linie und also auch die Ebene stets den Punkt, die Gerade und die Ebene zu entsprechenden Elementen haben; endlich auch, dass die Collineation zweier ebenen Systeme stets in die perspectivische Lage derselben übergeführt werden kann. So hat er die elementargeometrischen und vorzugsweise metrischen Verwandtschaften der Homologie Poncelet's eingefügt und sie zugleich für den Raum als in der allgemeinen Collineation enthalten aufgezeigt. Die Folgezeit hat dann den besonderen Fall der centrischen Collineation vereinigter ebener Systeme, den man Involution nennt und den schon Desargues so gründlich studirt hatte, als hochbedeutsam erwiesen; das Projectionscentrum liegt in der Halbirungsebene desjenigen Winkels zwischen der Original- und der Bildebene, um welchen die eine zum Zwecke der Vereinigung mit der andern gedreht wird. Man hat erkannt, was eben Desargues wahrscheinlich schon übersah, dass alle Formen derjenigen Beziehung vereinigt liegender ebener Systeme, welche man Symmetrie nennt, aus diesem Falle des perspectivischen Zusammenhangs hervorgehen. (Vergl. auch meinen Aufsatz »über die Symmetrie« in Bd. XXI dieser Vierteljahrsschrift p. 50 f.). Diesen elementar-geometrischen Erscheinungsformen der Involution hat auch bereits vor längerer Zeit (1866) ein tüchtiger Kenner und Lehrer der Geometrie eine Ausarbeitung gewidmet, aus welcher, obschon sie in einem ganz andern Zusammenhange der geometrischen Unterrichtsfächer gedacht ist, für eine Reform reichliche Anhaltspunkte entnommen werden können, ich meine die Schrift: »Zeichnende Geometrie zum Schul-Unterricht und zum Privatstudium. Von Christoph Paulus. (Stuttgart.) Ich habe in meinem schon genannten Buche (Abschn. B. des ersten Theiles p. 6 f.) gezeigt, wie die einfache Ausbildung der Centralprojection als Darstellungsmethode für das ebene System zur Einsicht in den allgemeinen Zusammenhang der Collineation hinführt, ohne für die Entwicklung derselben andere als ganz elementare Hilfsmittel zu erfordern; ich habe auch (vergl. a. a. O. § 21 und § 15—19, sowie p. XV der Vorrede) bewiesen, dass dabei zugleich die Grundlagen der projectivischen Geometrie mit innerer Nothwendigkeit und in aller Vollständigkeit hervortreten. Mit andern Worten, die abstracte Nachbildung des Sehprozesses, der selbst die wichtigste der physischen Grundlagen unserer Raumanschauung ist, führt sofort auch zur Entdeckung des organischen Zusammenhangs zwischen den mannigfachen Erscheinungen der Raumwelt; von diesen aus ordnet sich dann von selbst — wieder durch die Verfolgung des Sehvorganges gefördert, wenn man will (vergl. a. a. O. § 37 f.) — unser Wissen von den Gestalten und Systemen im Raume von drei Dimensionen und damit der weitere Auf- und Ausbau der Geometrie. Ein wichtigeres und schöneres Beispiel von der Zusammenstimmung zwichen den Anforderungen unserer Natur und unseres Denkens dürfte in aller Wissenschaft nicht zu finden sein. Und wird dieselbe nicht tagtäglich uns erinnert und erläutert durch das Wohlgefallen unseres Auges an den Gestalten von mehr oder weniger leicht ersichtlicher Symmetrie?

Nun wohl, ich sehe in diesen thatsächlichen Wahrheiten den rechten Wegweiser zur Reform des wissenschaftlichen Unterrichts in der Geometrie auf allen Stufen und kann also meine Meinung kurz dahin zusammenfassen, dass ich sage, die ganze Geometrie muss darstellend werden, muss projicirend verfahren, um projectivisch zu sein — unmissverständlich, wenn man mich nicht missverstehen will, namentlich bei Berücksichtigung dessen, was ich schon in den Vorreden zu dem mehrgenannten Buche besprochen habe und hier nicht wiederhole. Ich hoffe aber Missverständnissen nochweiter dadurch vorzubeugen, dass ich meine Ansicht an einer neuen literarischen Erscheinung erläutere, welche mir vielseitiger Beachtung sicher zu sein scheint — an dem Buche »Geometrie der Ebene, systematisch entwickelt von Dr. Fr. Kruse.« (Berlin 1875. 320 p. 8⁰). Nur einige allgemeine Bemerkungen will ich dem noch vorausschicken.

Zuerst ist ersichtlich, dass die Stellung des Princips der Projection an der Spitze der wissenschaftlichen Entwickelung die Trennung zwischen Planimetrie und Stereometrie, welche ohne Ausnahme üblich ist, verwischt und an eine weit spätere Stelle verschiebt; ich sehe dieselbe in der That als eine zu früh durchgeführte Abstraction für fehlerhaft an, pädagogisch wie systematisch, und gebe in letzterer Hinsicht zu bedenken, dass die strenge Begründung der projectivischen Geometrie auf den Satz von den perspectivischen Dreiecken das im Grunde längst gezeigt hat; dieser Satz ist evident, sobald die beiden Dreiecke nicht in derselben Ebene liegen und er kann dagegen bei Voraussetzung ihrer Lage in derselben Ebene nur gleich einfach bewiesen werden durch einen vermittelnden Projectionsvorgang, also durch Hinausgehen aus der Ebene in den Raum von drei Dimensionen. Diese höhere Bedeutung der Stereometrie ist von einzelnen Schriftstellern wohl betont worden, z. B. von Schlömilch, indem er sagt (Vorrede zu seiner »Geometrie des Raumes« Eisenach 1854): »Daraus — nämlich aus dem Umstande, dass dem geometrischen Unterricht die Uebung der figürlichen Anschauung als Hauptaufgabe zufällt — folgt aber weiter, dass die so häufige Bevorzugung der Planimetrie ein pädagogischer Missgriff ist, dass im Gegentheil der Accent auf die Stereometrie gelegt werden muss; denn nicht in der Ebene, sondern im Raume bewegt sich das vielgestaltige Leben.« Das muss aber noch immer und noch in einem ganz andern Sinne wiederholt werden. Und wenn a. a. O. Schlömilch sofort die descriptive Geometrie empfiehlt, der er die beiden letzten Kapitel seines Buches widmet, so geschieht das doch in einem ganz andern Sinne als in dem, den ich hier vertrete. Nicht, dass die bereits untersuchten Raumgestalten durch zwei Orthogonalprojectionen oder eine noch dazu aus jenen abgeleitete Centralprojection bildlich dargestellt und ihre gegenseitigen Beziehungen auf dem graphischen Wege untersucht werden können, ist das Wesentliche; sondern das ist es, dass die Methode der Darstellung naturgemäss und nothwendig zur Entdeckung der Grundgebilde, aus deren Verbindung alle Formen hervorgehen, und der projectivischen Eigenschaften jener wie dieser hinführt: zu der Einsicht, dass die Methode der Vergleichung zwischen zwei in projectivischer Abhängigkeit stehenden Systemen die natürliche Untersuchungsmethode der Geometrie ist; und dass es die Untersuchung dieser Abhängigkeit in gewissen speciellen Formen ist, welche in der Vergleichung von Winkeln und Strecken von gleicher Grösse, von Strecken, die in festem Verhältniss stehen, auch den Hauptinhalt der Geometrie des Euklid und nicht minder die Trigonometrie liefert.

Sodann ist offenbar, dass mit einem solchen Vorgang das Princip der Bewegung und der Veränderlichkeit zur frühesten und zugleich organischen Einführung in die Geometrie gelangt, weil die Methode der Darstellung von selbst dazu führt, die Figuren nicht als isolirt und starr, sondern als Theile der z. B. ebenen Systeme und als veränderlich unter gewissen Bedingungen zu betrachten — mich dünkt auch das eine Nothwendigkeit, die sich heutzutage jedem Lehrer der Mathematik aufdrängen muss. Und dabei bietet doch wieder der darstellend geometrische Gesichtspunkt den natürlichsten Anlass zum Verweilen bei bestimmt specialisirten Einzelfällen, gewissermassen zu der Abstraction der Ruhe in dem Bewegungs- und Veränderungszustand der Raumwelt.

Dass mit demselben Vorgange dem Pestalozzi'schen guten Grundsatze nachgelebt wird, der Unterricht solle mit der Anschauung beginnen und stetsfort mit der Anschauung in Wechselwirkung erhalten werden, wird auch nicht vom Uebel sein. Endlich erblicke ich in einer Anordnung des geometrischen Unterrichts nach den bezeichneten Principien die einzige sichere Möglichkeit, Zeit zu ersparen und rascher zum Ziele zu kommen, während man zugleich Dank dem Besitz eines einleuchtenden methodischen Grundgedankens sicherer auf dasselbe lossteuert; die Aussonderung vieles Entbehrlichen aus dem Vortragsstoff wird möglich und wird in vielen Fällen ein pädagogischer Gewinn sein, weil es als Material zu selbständigen geometrischen Uebungen der Denkkraft der Schüler Verwendung finden kann. Die Einschränkung auf das Wichtige und Wesentliche muss aber unter unseren heutigen Unterrichtsverhältnissen als ein Hauptziel alles und jedes Unterrichts angesehen werden.

Und nun zu Kruse. Wer die Inhaltsangabe seines Buches überfliegt, könnte einen Augenblick glauben, das Buch sei eine genaue Ausführung des in seinen Hauptpunkten hier besprochenen Programms, wenn auch unter Anpassung an die Scheidung von Planimetrie und Stereometrie. Denn da folgen auf die Grundbegriffe und die Gliederung der Gebilde (p. 1 bis 34) die fünf Hauptstücke: Congruenz, Affingleichheit, Affinität, Aehnlichkeit, Collineation; endlich von p. 265 ab diesen als Thesimetrie oder Geometrie der Lage zusammengefassten Theilen die Trigonometrie. Aber ich will sofort bemerken, dass das Buch in dem allerwichtigsten Stück meinem Ideal nicht entspricht, und dass es mir nur besonders willkommen ist als der aus dem Kreise der Lehrer heraus gelieferte Nachweis von der Möglichkeit einer Anordnung vorläufig des planimetrischen Unterrichtstoffes nach dem Gesichtspunkte der geometrischen Verwandtschaften — eine Anordnung, die natürlich nicht die einzig mögliche und nicht die definitive zu sein den Anspruch machen kann, während sie doch von Geist und tüchtiger Gelehrsamkeit getragen erscheint. Wenn ich aber z. B. den wesentlichen Wortlaut des § 31 anführe, welcher das Hauptstück von der Affingleichheit eröffnet, so wird sofort erhellen, worin das interessante Buch meinen Anforderungen nicht entspricht. Es heisst dort: »Zwei Gebilde heissen affingleich, wenn sie auf einem Strahlbündel — will sagen Parallelenbüschel — so liegen können, dass die perspectivisch entsprechenden Geraden auf demselben Strahle, welcher die Axe der Affingleichheit genannt wird, einander schneiden.« (Es folgen historische Nachweisungen und die Bemerkung, dass von zwei solchen Gebilden das eine durch das andere bestimmt ist, wenn man zu einer Strecke des ersten die entsprechende Strecke des zweiten kennt.) Eine dogmatisch hingestellte Erklärung, von deren Richtigkeit und Brauchbarkeit dem Schüler das Verständniss erst nachträglich kommt, während ihm erst viel später und in vielen Fällen niemals die Einsicht in ihre so äusserst einfache natürliche Herkunft aufgehen wird! Derselbe Abweg in die Dogmatik, der selbst in der darstellenden Geometrie nach dem Beispiele von Schlesinger sofort in der vielbegrüssten Schrift von Scherling

»Vorschule und Anfangsgründe der descriptiven Geometrie« (Hannover 1870) nachgeahmt wurde. Es ist ja nicht unnatürlich, dass uns Lehrern die Dogmatik so nahe liegt, aber darum nicht minder gefährlich! Mit wie viel mehr Vertrauen und Interesse wird doch der Schüler den aus der Beziehung der Affingleichheit fliessenden Folgerungen nachgehen — die §§ des Kruse'schen 4. Hauptstücks heissen: 32. Zwei affingleiche Punktreihen. 33. Affingleiche Gebilde zwischen zwei Parallelen. 34. Summirung der Flächen von Parallelogrammen oder Dreiecken. 35. Affingleiche Gebilde zwischen drei und mehr Parallelen — wenn dieselbe auf dem Wege der Darstellung ihm vorgeführt worden ist! Ob man dabei als eine erste Gruppe von geometrischen Verwandtschaften diejenigen der Parallelprojection: Die Congruenz, Affinität, Axensymmetrie und Affingleichheit, von der zweiten Gruppe: Aehnlichkeit, centrische Symmetrie, Collineation und Involution als von denen der allgemeinen Centralprojection abscheiden und ihnen vorausschicken will, kann dahingestellt bleiben, — aber ich denke, dass es pädagogisch richtig sein wird. In jedem Falle würde sich ergeben, dass die Affingleichheit als specieller Fall zu derjenigen besonderen Collineation gehört, bei welcher das Centrum in der Axe der Collineation enthalten ist und welche immer hervorgeht aus der entgegengesetzten Umlegung von der zum Falle der Involution führenden, wenn das Centrum der Projection in einer der Halbirungsebenen des Winkels zwischen der Original- und Bild-Ebene liegt. Dass dieser besondere Fall der Collineation im Kruse'schen System ganz fehlt, kann zeigen, dass die dogmatische Entwickelung selbst für einen gewiegten Sachkenner ihre Gefahren hat; denn dass die Unterordnung der Affingleichheit unter denselben nicht ohne Werth ist, wird schon zur Genüge angedeutet durch den daraus fliessenden für die Affingleichheit characteristischen allgemeinen noch nicht bemerkten Satz, dass zwischen dem einen der affingleichen Systeme und dem zum andern in Bezug auf die Axe oder Ebene orthogonal-symmetrischen System schräge Symmetrie in Bezug auf dieselbe Axe oder Ebene stattfindet. Von hier aus wäre Vieles zu dem Kruse'schen System zu bemerken, wenn ich bei Einzelheiten verweilen wollte.

Ich betrachte das System von Kruse als ein willkommenes Zeichen davon, dass von verschiedenen Standpunkten her der geometrische Unterricht der Reform entgegenreift, deren er bedarf, der Reform in der Richtung auf grössere Anschaulichkeit und Natürlichkeit. Aber ich glaube noch immer, dass die Initiative der Universitäten zur regelmässigen Pflege und Ausdehnung der geometrischen Studien für diese Reform vom höchsten Werthe sein müsste. Das geringe Maass und die hier und da daran geknüpfte Missachtung dieser Studien hat manche eigenthümliche Erscheinung bedingt; wie z. B. die beliebte aber principiell irreleitende Begründung der harmonischen Theilung auf Zirkel-Constructionen; oder in höherer Region die mannichfachen Missverständnisse der Bedeutung, welche die Theorie der Metrik für die Geometrie hat, in der Form der Nicht-Euklid'schen Räume, der Räume von n Dimensionen, etc.; auch die vielfachen Beweise von Unkenntniss des Geleisteten, welche selbst in unseren leitenden Zeitschriften so oft mit unterlaufen. Sie sind theils ernstlich schädlich, theils unerfreulich und durch die Universitäten leicht zu beseitigen. Oder sollte sich die Reform des Lehrsystems der Geometrie ohne die leitende Mitwirkung der Universitäten vollziehen müssen? Auch das ist in unserer literarischen von der Professorengelehrsamkeit so sehr viel unabhängigeren Zeit nicht unmöglich.