

Geometrische Mittheilungen

von

Wilh. Fiedler.

I. Die allgemeine Transformation der Coordinaten *).

(Mit Figuren 1 bis 6.)

Im Bd. XVI dieser Vierteljahrsschrift habe ich bemerkt, dass aus der geometrischen Deutung der Coefficienten einer linearen Substitution die Transformation der Coordinaten sich ergebe; ich will die Ausführung dieses Gedankens mit einigen Anwendungen erläutern.

Wenn ein Punkt respective eine Ebene in Bezug auf eine fundamentale Gruppe A_1, A_2, A_3, A_4, E oder \mathbf{E} die projectivischen Coordinaten x_i resp. ξ_i und in Bezug auf eine andere fundamentale Gruppe $A_1^{*'}, A_2^{*'}, A_3^{*'}, A_4^{*'}, E^{*'}$ oder $\mathbf{E}^{*'}$ die projectivischen Coordinaten x_i' resp. ξ_i' hat, so muss der Uebergang von den einen zu den andern durch eine lineare Substitution ausdrückbar sein, weil es der besondere Fall projectivischer Räume in Congruenz unter Deckung ist. (Vergl. «Darstellende Geometrie» Art. 138—145; ferner Art. 153.) Mit β_{ik} als ihren Coëfficienten, Δ als Determinante derselben und B_{ik} als den Elementen ihres adjungirten Systems ist

$$\mu x_i = \beta_{i1} x_1' + \beta_{i2} x_2' + \beta_{i3} x_3' + \beta_{i4} x_4', \quad \frac{\Delta}{\mu} x_i' = B_{i1} x_1 + B_{i2} x_2 + B_{i3} x_3 + B_{i4} x_4;$$
$$q \xi_k' = \beta_{1k} \xi_1 + \beta_{2k} \xi_2 + \beta_{3k} \xi_3 + \beta_{4k} \xi_4, \quad \frac{\Delta}{q} \xi_k' = B_{k1} \xi_1' + B_{k2} \xi_2' + B_{k3} \xi_3' + B_{k4} \xi_4'.$$

Die ungestrichenen Coordinaten der Fundamentalpunkte des gestrichenen Systems ergeben sich daraus, wie sie in

*) Die Abschnitte I, 1) und 4) stammen aus dem Sommer 1870, zu den Entwicklungen in 2) und 3) veranlasste mich der Druck der 3. Aufl. der „Analyt. Geom. des Raumes“ (Bd. I, Sommer 1878).

folgender Tafel stehen, in der noch die k'_i die von der Ecke A'_i ausgehenden Höhen im Fundamentaltetraeder des gestrichenen Systems sind:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$A_1^{*'}$	β_{11}	β_{21}	β_{31}	β_{41}	$\times \frac{h_1'}{\mu e_1'}$
$A_2^{*'}$	β_{12}	β_{22}	β_{32}	β_{42}	$\times \frac{h_2'}{\mu e_2'}$
$A_3^{*'}$	β_{13}	β_{23}	β_{33}	β_{43}	$\times \frac{h_3'}{\mu e_3'}$
$A_4^{*'}$	β_{14}	β_{24}	β_{34}	β_{44}	$\times \frac{h_4'}{\mu e_4'}$
$E^{*'}$	$\Sigma\beta_{1k}$	$\Sigma\beta_{2k}$	$\Sigma\beta_{3k}$	$\Sigma\beta_{4k}$	$: \mu$

Und man erhält eine analoge Tafel für die gestrichenen Coordinaten der Fundamentelebenen des ungestrichenen Systems mit Vertauschung der Reihen und Zeilen der β_{ik} und den Factoren $\frac{h_i^*}{\varrho e_i}$, sowie weitere Tafeln mit den Coëfficienten B_{ik} für die gestrichenen Coordinaten der Fundamentalpunkte des ungestrichenen Systems und die ungestrichenen der Fundamentelebenen des gestrichenen Systems.

Nach der ersten sind die Coëfficienten β_{ik} die ungestrichenen Coordinaten vom Index i für den Fundamentalpunkt des gestrichenen Raumes vom Index k ; und die Summe der Coëfficienten für die Coordinate x_i ist die Coordinate vom Index i für den Einheitpunkt $E^{*'}$ des gestrichenen Systems.

Wenn somit die vier neuen Fundamentalpunkte durch ihre Coordinaten im alten System $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$, $x_1^{(3)}$, $x_1^{(4)}$ und der neue Einheitpunkt durch seine alten Coordinaten $x_1^{(E)}$ gegeben sind, so gelten für die Bestimmung der linearen Substitution, welche dieser Coordinatentransformation äquivalent ist, die vier mit zwölf Gleichungen gleichbedeutenden Relationen

$$\beta_{11} : \beta_{21} : \beta_{31} : \beta_{41} = x_1^{(1)} : x_1^{(2)} : x_1^{(3)} : x_1^{(E)}$$

und die vier weiteren

$$\beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{14} = \mu x_1^{(E)}.$$

Von ihnen erlaubt die erste Gruppe die Coefficienten β_{ik} mit den ersten Indices 2, 3, 4 durch die Coefficienten mit dem ersten Index 1 und die Coordinaten der vier neuen Fundamentalpunkte auszudrücken, während man sodann aus der zweiten Gruppe die vier Coefficienten $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}$ direct bestimmt. Zum kurzen Ausdruck der Sache sei die Determinante der Coordinaten der neuen Fundamentalpunkte mit dem Werthe X und das System ihrer adjungirten Elemente $X_i^{(k)}$ eingeführt, also

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)} \\ x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, x_2^{(4)} \\ x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, x_3^{(3)}, x_3^{(4)} \\ x_4^{(1)}, x_4^{(2)}, x_4^{(3)}, x_4^{(4)} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)}, X_1^{(4)} \\ X_2^{(1)}, X_2^{(2)}, & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Wir erhalten dann zur Berechnung der Coefficienten der Substitution die Gleichung

$$\beta_{1i} X = \mu x_h^{(i)} \{ x_1^{(E)} X_1^{(i)} + x_2^{(E)} X_2^{(i)} + x_3^{(E)} X_3^{(i)} + x_4^{(E)} X_4^{(i)} \};$$

Und aus der analogen Coordinatentafel für die Fundamentalebene des gestrichenen Systems durch die beiden Gruppen von Gleichungen

$$B_{1i} : B_{2i} : B_{3i} : B_{4i} = \xi_1^{(i)} : \xi_2^{(i)} : \xi_3^{(i)} : \xi_4^{(i)},$$

$$B_{1i} + B_{12} + B_{13} + B_{14} = \frac{\Delta}{\varrho} \xi_1^{(e)},$$

welche ebenso zur directen Bestimmung der Coefficienten für die Substitution der ξ_i dienen und zu einer analogen Endformel für die B_{1i} führen, in der nur $\frac{\Delta}{\varrho}$ die Stelle von μ vertritt. Sind die alten Coordinaten Cartesische, so hat man zu setzen

$$x_1^{(i)} = 1, \quad x_2^{(i)} = x^{(i)}, \quad x_3^{(i)} = y^{(i)}, \quad x_4^{(i)} = z^{(i)};$$

$$x_1^{(E)} = 1, \quad x_2^{(E)} = x^{(E)}, \quad x_3^{(E)} = y^{(E)}, \quad x_4^{(E)} = z^{(E)}$$

und analog im Falle der Plücker'schen Coordinaten $\xi_1^{(1)} = 1$, $\xi_2^{(1)} = \xi^{(1)}$, $\xi_3^{(1)} = \eta^{(1)}$, $\xi_4^{(1)} = \zeta^{(1)}$, $\xi_2^{(0)} = \xi^{(0)}$, etc.

Die speciellen Fälle ergeben sich aus der allgemeinen Regel ohne Schwierigkeit. Wenn die Ecken des neuen Fundamentaltetraeders mit den gleichnamigen Ecken des alten zusammenfallen, indess der Einheitpunkt nach dem Punkte von den Coordinaten $x_i^{(B)}$ verlegt wird, so verschwinden in der Coordinatentafel und im adjungirten System derselben alle Elemente, die des Hauptgliedes ausgenommen und diese sind respective

$$\frac{h_1}{e_1}, \text{ etc. und } \frac{h_2 h_3 h_4}{e_2 e_3 e_4}, \text{ etc.}$$

so dass $X = \frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{e_1 e_2 e_3 e_4}$ ist und $\beta_{ii} = \mu x_i^{(B)}$ wird. Man erhält daher als Transformationsformeln $x_i = x_i^{(B)} x_i$, oder an Stelle der alten Coordinaten sind die mit den gleichnamigen Coordinaten des Einheitspunktes multiplicirten neuen zu setzen. Diess gestattet, von irgend einer speciellen Lage des Einheitspunktes Gebrauch zu machen, welche für gewisse z. B. metrische Erörterungen Vortheil bietet. Solche Lagen sind die im Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel und die im Schwerpunkt des Fundamentaltetraeders; da im ersteren Falle die e_i einander gleich werden, so sind die Punktecoordinaten als die normalen Entfernungen des Punktes von den vier Flächen des Tetraeders anzusehen oder man hat die «Vierebenen-Coordinaten»; während im letzteren Falle dieselben als die Verhältnisse jener Entfernungen zu den gleichgerichteten Höhen des Fundamentaltetraeders oder als die Verhältnisse der Volumina der Tetraeder $PA_2 A_3 A_4$, $PA_3 A_4 A_1$, $PA_4 A_1 A_2$, $PA_1 A_2 A_3$ zum Volumen des Fundamentaltetraeders erscheinen — «Volumen-Coordinaten». (Vergl. «Darstell. Geom.» p. 546). Dabei gewährt der letztere Fall den weiteren Vorzug, dass die verein-

fachende Voraussetzung der harmonischen Trennung von Einheitpunkt und Einheitsbene (vergl. a. a. O. p. 550 resp. 532) die unendlich ferne Ebene als Einheitsebene ergibt, sodass die Coordinaten der Ebene als ihre Abstände von den vier Fundamentalpunkten genommen werden können. In diesem Sinne gehören die «Vierpunkt-Coordinaten» und die Volumen-Coordinaten zusammen und bieten für den Ausdruck der metrischen Relationen sowohl in den x_i als in den ξ_i die gleichen Vorzüge dar. Ich wende mich zu den Beispielen.

1) Die Transformation von einem System schiefwinkliger Cartesischer Coordinaten in der Ebene zu einem andern als Spezialfall der allgemeinen.

Seien A_1 und A'_1 die Anfangspunkte und A_2, A_3 respective A'_2, A'_3 die Axenrichtungen des alten und des neuen Systems (Fig. 1), dazu a und b Abscisse und Ordinate des neuen Fundamentalpunktes im alten System, α und α' die Winkel der neuen Axe $A'_1 A'_2$ gegen die alten Axen $A_1 A_2, A_1 A_3$ respective, sowie β und β' die Winkel der neuen Axe $A'_1 A'_3$ gegen dieselben Axen, sämtlich gemessen auf der Seite der Einheitpunkte, also als Richtungsunterschiede z. B. der Strahlen $A'_1 E'_3$ und $A_1 E_3, A_1 E_2$ und $A'_1 E'_2$, etc. und so dass für ω als den Winkel der Axen des alten Systems $\omega = \alpha + \alpha' = \beta + \beta'$ ist; man erhält dann nach elementaren Formeln (Vergl. «Kegelschnitte» 4. Aufl. Art. 12.) die Coordinaten-Determinante der neuen Fundamentalpunkte im alten System für ϱ als einen von A_1 ausgehenden beliebig grossen Radius-vector, den wir unendlich gross denken,

$$\begin{vmatrix} 1, & 0 & , & 0 \\ a, & \frac{\varrho \sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} & , & \frac{\varrho \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega} \\ b, & \frac{\varrho \sin \alpha}{\sin \omega} & , & \frac{\varrho \sin \beta}{\sin \omega} \end{vmatrix} \equiv X = \frac{\varrho^2 \sin(\beta - \alpha)}{\sin \omega};$$

und daher das adjungirte System dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\varrho^2 \sin(\beta-\alpha)}{\sin \omega}, & \frac{\varrho}{\sin \omega} \{b \sin(\omega-\beta) - a \sin \beta\}, & \frac{\varrho}{\sin \omega} \{a \sin \alpha - b \sin(\omega-\alpha)\} \\ 0, & \frac{\varrho}{\sin \omega} \sin \beta, & \frac{-\varrho}{\sin \omega} \sin \alpha \\ 0, & \frac{-\varrho}{\sin \omega} \sin(\omega-\beta), & \frac{\varrho}{\sin \omega} \sin(\omega-\alpha) \end{vmatrix}$$

Man erhält ferner die Coordinaten des Einheitpunktes E' als der freien Ecke des Rhombus von der Seite Eins in den neuen Axen aus der Figur mit

$$x_2^{(E)} = x^{(E)} = a + \frac{\sin(\omega-\alpha) + \sin(\omega-\beta)}{\sin \omega}, \quad x_3^{(E)} = y^{(E)} = b + \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \omega}$$

und daher die Multiplicatoren der $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}$ in der Klammer rechts gleichmässig mit dem Werthe

$$\frac{\varrho \sin(\beta - \alpha)}{\sin \omega},$$

damit aber die Coefficienten der Substitution

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \mu, \beta_{21} = \mu a, \beta_{31} = \mu b; \\ \beta_{12} &= 0, \beta_{22} = \mu \frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin \omega}, \beta_{32} = \mu \frac{\sin \alpha}{\sin \omega}; \\ \beta_{13} &= 0, \beta_{23} = \mu \frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin \omega}, \beta_{33} = \mu \frac{\sin \beta}{\sin \omega}; \end{aligned}$$

und endlich die Substitution selbst («Kegelschnitte» Art. 9, 10.)

$$x = a + x' \frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin \omega} + y' \frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin \omega}, \quad y = b + x' \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} + y' \frac{\sin \beta}{\sin \omega}.$$

Insbesondere für beide Coordinationssysteme als rechtwinklig oder

$$\begin{aligned} \omega &= 90^\circ, \quad \beta = 90^\circ + \alpha, \quad \alpha' = 90^\circ - \alpha, \quad \beta' = -\alpha \\ x &= a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass das Verschwinden von β_{12} und β_{13} stets an das Ineinanderliegen der Fundamentallinien $A_2 A_3$ und $A_2' A_3'$ geknüpft ist.

2) Das orthogonale Hyperboloid. Wenn zwei windschiefe Gerade in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten für die Linie ihrer kürzesten Distanz $2b$ als Axe der y und die Halbirungslinien ihres Richtungsunterschiedes $\arctan m$ durch den Mittelpunkt derselben als Axen der x und z , also mit den Gleichungen

$$y = b, \quad mz = x; \quad y = -b, \quad mz = -x$$

gegeben sind, so ist der Ort der Durchschnittslinien der zu einander normalen Ebenen, welche durch die erste und die zweite respective hindurchgehen, nach den Gleichungen derselben, welche der Bedingung der Rechtwinkligkeit genügen,

$$\lambda(1 - m^2)(y - b) = mz - x, \quad y + b = \lambda(mz + x)$$

das einfache Hyperboloid (vgl. «Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raumes» I, Art. 121),

$$(1 - m^2)(y^2 - b^2) = m^2 z^2 - x^2$$

oder

$$a) \quad \frac{x^2}{b^2(1 - m^2)} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{m^2 z^2}{b^2(1 - m^2)} = 1;$$

insbesondere so für $m^2 < 1$, dagegen für $m^2 = 1$ das Ebenenpaar $z \pm x = 0$ und für $m^2 > 1$ das Hyperboloid

$$\frac{m^2 z^2}{b^2(m^2 - 1)} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2(m^2 - 1)} = 1;$$

wobei noch bemerkenswerth ist, dass für jedes m^2 wegen der gleichbedeutenden Form

$$y^2 - b^2 + x^2 = m^2(y^2 - b^2 + z^2)$$

für $x^2 = z^2$ oder $x = \pm z$, also in den Halbirungsebenen durch die Axe y , die Querschnittscurven $x^2 + y^2 = b^2$ erhalten werden, die Kegelschnitte K_1, K_2 in jenen Ebenen. (Fig. 2.)

Die Scheitelkanten dieser Steiner'schen Erzeugung sind also die von den Scheiteln der grossen Axe des elliptischen Hauptschnittes ausgehenden Erzeugenden. Dagegen giebt die andere Zerlegung derselben Gleichung $a)$ nämlich

$$\lambda \left(\frac{y}{b} + \frac{mz}{b\sqrt{1-m^2}} \right) = 1 + \frac{x}{b\sqrt{1-m^2}}, \quad \frac{y}{b} - \frac{mz}{b\sqrt{1-m^2}} = \lambda \left(1 - \frac{x}{b\sqrt{1-m^2}} \right)$$

die Erzeugung desselben Hyperboloids aus entsprechenden Ebenen gleichwinkliger Ebenenbüschel, zunächst mit den Scheitelkanten

$$y = \mp \frac{mz}{\sqrt{1-m^2}}, \quad x = \mp b\sqrt{1-m^2},$$

d. h. den von den Scheiteln der kleinen Axe des elliptischen Hauptschnittes ausgehenden Erzeugenden. Denn für zwei beliebige Werthe λ_1, λ_2 des Parameters λ sind die Coefficienten der x, y, z in den Gleichungen der Ebenen respective

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{b\sqrt{1-m^2}}, \quad \frac{\lambda_1}{b}, \quad \frac{\lambda_1 m}{b\sqrt{1-m^2}}; \quad \frac{\lambda_1}{b\sqrt{1-m^2}}, \quad \frac{1}{b}, \quad -\frac{m}{b\sqrt{1-m^2}}; \\ & -\frac{1}{b\sqrt{1-m^2}}, \quad \frac{\lambda_2}{b}, \quad \frac{\lambda_2 m}{b\sqrt{1-m^2}}; \quad \frac{\lambda_2}{b\sqrt{1-m^2}}, \quad \frac{1}{b}, \quad -\frac{m}{b\sqrt{1-m^2}}, \end{aligned}$$

und diese erfüllen immer die Bedingung, welche die Gleichheit der Winkel zwischen den Ebenen λ_1 und λ_2 im ersten und denen im zweiten Büschel fordert.

Aber nach der ersten Erzeugung — die wir der bequemern Formeln wegen bevorzugen — wird dasselbe Hyperboloid auch von den Ebenenbüscheln

$$\begin{aligned} \lambda_1 (1-m^2)(y-b) - (mz-x) + \kappa \{ y + b - \lambda_1 (mz + x) \} &= 0, \\ \lambda_2 (1-m^2)(y-b) - (mz-x) + \kappa \{ y + b - \lambda_2 (mz + x) \} &= 0, \end{aligned}$$

hervorgebracht, welche die den Parameterwerthen λ_1, λ_2 jener Erzeugung entsprechenden Geraden zu ihren Scheitelkanten haben; und wir können die Frage beantworten, welche Abhängigkeit zwischen λ_1 und λ_2 die Rechtwinkligkeit entsprechender Ebenen oder die Gleichwinkligkeit entsprechender Paare von Ebenen dieser Büschel erfordert. Die Bedingung der Rechtwinkligkeit giebt wegen der Forderung iden-

tischer Erfüllung für jedes κ die beiden Gleichungen (die zweite ist erfüllt),

$$-\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{1+m^2} = \frac{1+m^2}{(1-m^2)^2},$$

welche nur für $m=0$ verträglich sind und dann die den Verhältnissen des Rotationscylinders in der That entsprechende Relation liefern $\lambda_1 \lambda_2 = -1$. Die Bedingung der Gleichwinkligkeit der Ebenen κ_1, κ_2 im ersten und der Ebenen κ_1, κ_2 im zweiten Büschel wird aber immer erfüllt, wenn $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ d. h. wenn $\lambda_2 = -\lambda_1$ ist, also für unendlich viele Paare, die eine leicht näher zu discutierende Involution bilden. Die Regelschaaren dieser Hyperboloide entstehen also in einer Art aus orthogonalen Paaren, in unendlich vielen Arten aus gleichwinkligen Büscheln. Die Analogie dieser Hyperboloide mit dem Kreis und mit der gleichseitigen Hyperbel wird hierdurch erweitert.

Wenn das Hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ aus gleichwinkligen Ebenenbüscheln erzeugt sein soll, so muss zur Uebereinstimmung der Quadrate der trigonometrischen Tangente des Winkels zwischen den Ebenen λ_1 und λ_2 in den erzeugenden Büscheln

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}$$

für alle Werthe von λ_1, λ_2 die Gleichheit bestehen

$$\frac{(a^2 + c^2)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \lambda_1 \lambda_2} = \frac{(a^2 + c^2)(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(a^2 b^2 + b^2 c^2) \lambda_1 \lambda_2 + c^2 a^2},$$

d. h. zwischen den Quadraten der Halbaxen besteht die Relation

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 = c^2 a^2,$$

welche für die orthogonalen erfüllt ist.

Und wenn die Ebenenbüschel

$$\lambda(mz - x) + y - b = 0, \quad \lambda'(mz + x) + y + b = 0$$

projectivisch gleichwinklig sein sollen, so wird für die Projectivitätsgleichung

$$\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$$

das Paar der Bedingungen

$$\beta = -\gamma \quad \text{und} \quad \delta(1 + m^2) = 1$$

erfordert und das Erzeugniss ist ein orthogonales Hyperboloid.

Der Uebergang von der einen zur anderen Erzeugung ist auch constructiv sehr einfach zu vollziehen; ich gebe die von einem meiner Zuhörer, Herrn F. Ruth aus Graz, entwickelte Form. Der Asymptotenkegel eines Hyperboloids aus gleichwinkligen Büscheln habe g_1, g_2 als die Scheiteltanten der zu jenen parallelen Büschel, die ihn erzeugen, so dass seine zugehörigen Tangentialebenen mit der Ebene $g_1 g_2$ gleiche Winkel einschliessen und der Querschnitt der von dieser mit ihnen gebildeten dreiseitigen Ecke mit jeder zu g_1 und g_2 gleichgeneigten Ebene ein gleichschenkliges Dreieck und ihre Schnittlinie mit $g_1 g_2$ zur einen Axe ihres Querschnittes mit dem Kegel parallel sein muss. Die zu g_1 und g_2 gleichgeneigte und zu $g_1 g_2$ normale Ebene durch den Scheitel des Kegels, die ihn reell schneidet, giebt sofort die Steiner'schen Erzeugenden, denn die zu ihnen normalen Ebenen sind die Ebenen der Kreisschnitte. Umgekehrt sind in einem Kreisschnitte bei der Steiner'schen Erzeugung (Fig. 3) die Durchstosspunkte S_1 und S_2 von s_1 und s_2 die Endpunkte eines Durchmesser und die G_1 und G_2 von g_1 und g_2 die Endpunkte einer zu ihm normalen Sehne, T der Pol derselben. Dann sind $(G_1 \cdot S_2 S_1 G_2 T)$ und $(G_2 \cdot S_2 S_1 T G_1)$ harmonische Büschel und zugleich die Spurenbüschel der erzeugenden Ebenenbüschel; folglich die Ebenen von den Spuren $G_1 S_2, G_1 S_1$ und ebenso $G_2 S_2, G_2 S_1$, weil sie nach der Steiner'schen Erzeugung orthogonal zu einander sind, Halbirungsebenen der Winkel der Ebenen von den Spuren $G_1 G_2, G_1 T$ und $G_2 T$,

$G_2 G_1$ und somit die Winkel der Ebenen über $G_1 G_2$, $G_1 S_1$ und $G_2 G_1$, $G_2 S_1$ einander gleich als ihre Hälften; in Folge dessen können aber die erzeugenden Büschel an g_1 und g_2 als projectivisch nur congruent sein.

Herr Ruth hat auch bemerkt, dass die Paare der Scheitkantengleichwinkliger Büschel $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}; g_1^{(2)}, g_2^{(2)}$; etc. von derselben Schaar in jeder Erzeugenden der andern Schaar l eine Involution mit Doppelpunkten in den entsprechenden s_1, s_2 , auf einer der Steiner'schen Erzeugenden aber insbesondere eine symmetrische Reihe bilden, deren Doppelpunkt im Endpunkt der grossen Axeder Hauptschnittellipse liegt; etc.

Endlich mag angeführt werden, dass dieselben Hyperboloide nach Chasles als Orte der Punkte von gleichem Verhältniss der Distanzen von zwei windschiefen Geraden (vgl. «Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. Raumes» I, Art. 121 etc.) erhalten werden; für die Geraden $z = \pm c, y = \pm mx$ findet man seine Gleichung in Cartesischen und respective in Plücker'schen Coordinaten

$$b) \quad (z - c)^2 + \frac{(y - mx)^2}{1 + m^2} = \lambda^2 \left\{ (z + c)^2 + \frac{(y + mx)^2}{1 + m^2} \right\},$$

$$(c\xi - 1)^2 + \frac{(\xi - m\eta)^2}{1 + m^2} = \lambda^2 \left\{ (c\xi + 1)^2 + \frac{(\xi + m\eta)^2}{1 + m^2} \right\};$$

für alle Werthe des Verhältnisses λ ein Büschel sowohl als eine Schaar, in der That durch ein imaginäres windschiefes Viereck gehend, da für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ die Flächengleichung übergeht in

$$(mx \pm y)^2 + (z \pm c)^2 (1 + m^2) = 0$$

oder in die Gleichung von vier Ebenen

$$(mx \pm y) \pm i(z \pm c) \sqrt{1 + m^2} = 0,$$

die die Kugel vom Radius Null oder den unendlich fernen imaginären Kreis berühren, weil die Summe der Quadrate ihrer Coordinaten verschwindet. Aber diese Verhältnisse sind

im Zusammenhang mit der Steiner'schen Erzeugung sehr schön synthetisch entwickelt von Herrn Schröter in der Abhandlung «über ein einfaches Hyperboloid von besonderer Art» im Bd. 85 des «Journal f. d. r. u. a. Math.» und es ist selbstverständlich, dass die analytische Behandlungsweise ihrerseits sie leicht erschliesst. Hier waren sie zu berühren, weil ich demnächst behandeln will

3) Das orthogonale Hyperboloid als Object der Coordinatentransformation; zuerst gemäss der Chasles'schen, dann der Steiner'schen Entstehung, zuletzt in einer Verbindung der Steiner'schen mit der Erzeugung aus gleichwinkligen Büscheln.

Die Gleichung der Chasles'schen Erzeugung für die angegebene Wahl der Axen in der aus der Figur des Problems sich ergebenden Form

$$\{(1 + \lambda)z + (1 - \lambda)c\} \{(1 - \lambda)z + (1 + \lambda)c\} + \\ + \frac{1}{1 + m^2} \{(1 + \lambda)y + (1 - \lambda)mx\} \{(1 - \lambda)y + (1 + \lambda)mx\} = 0$$

transformire ich zunächst unter Beibehaltung des Einheitpunktes auf ein Fundamentaltetraeder, von dessen Ecken A_3 und A_4 die Richtungen der gegebenen Geraden und A_1 und A_2 die Fusspunkte ihrer kürzesten Entfernung in ihnen sind. Dann sind die Coordinaten des Einheitpunktes $(1, 1, 1, 1)$ und die Determinante X der Coordinaten der Fundamentaltetraederpunkte ist

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & \infty, & \infty \\ 0, & 0, & -m\infty, & m\infty \\ c, & -c, & -c, & c \end{vmatrix} \equiv -4cm\infty^2;$$

das adjungirte System derselben ist

$$\begin{vmatrix} -2cm\infty^2, & -2cm\infty^2, & 0, & 0 \\ 2cm\infty, & 2cm\infty, & -2cm\infty, & -2cm\infty \\ 2c\infty, & -2c\infty, & 2c\infty, & -2c\infty \\ -2m\infty^2, & 2m\infty^2, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

und die Coefficienten der Substitution ergeben sich wie folgt

$$\beta_{13} = 0, \beta_{14} = 0, \beta_{21} = 0, \beta_{22} = 0, \beta_{31} = 0, \beta_{32} = 0, \beta_{43} = 0, \beta_{44} = 0;$$

$$2c\beta_{11} = \mu(1+c), 2c\beta_{12} = -\mu(1-c); 2m\beta_{23} = -\mu(1-m), 2m\beta_{24} = \mu(1+m);$$

$$2\beta_{33} = \mu(1-m), 2\beta_{34} = \mu(1+m); 2\beta_{41} = \mu(1+c), 2\beta_{42} = \mu(1-c).$$

Die Substitution selbst ist daher

$$x = \frac{c}{m} \frac{(1+m)x_4 - (1-m)x_3}{(1+c)x_1 - (1-c)x_2}, \quad y = c \frac{(1+m)x_4 + (1-m)x_3}{(1+c)x_1 - (1-c)x_2},$$

$$z = c \frac{(1+c)x_1 + (1-c)x_2}{(1+c)x_1 - (1-c)x_2};$$

die gegebenen Geraden und die Axe der z werden wie es sein muss in

$$x_1 = 0, x_4 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 0, x_3 = 0; \quad x_3 = 0, x_4 = 0$$

übergeführt, indess die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ und die unendlich ferne Ebene die Gleichungen erhalten

$$(1+m)x_4 = (1-m)x_3, \quad (1+m)x_4 = -(1-m)x_3; \quad (1+c)x_1 = (1-c)x_2.$$

Damit wird die Gleichung des Hyperboloids (für $\lambda = 1$ des hyperbolischen Paraboloids)

$$b'), (1+m^2) \{(1+c)^2 x_1^2 - (1-c)^2 \lambda^2 x_2^2\} + \{(1+m)^2 x_4^2 - (1-m)^2 \lambda^2 x_3^2\} = 0$$

und zeigt sofort, dass das Fundamentaltetraeder in Bezug auf alle diese Flächen ein Quadrupel ist und dass seine drei Gegenkantenpaare Paare conjugirter Geraden sind. Für jedes λ^2 geht das Hyperboloid durch das nicht reelle windschiefe Vierseit, welches die Ebenenpaare

$$x_1 (1+c) (1+m^2)^{\frac{1}{2}} \pm i (1+m) x_4 = 0,$$

$$x_2 (1-c) (1+m^2)^{\frac{1}{2}} \pm i (1-m) x_3 = 0$$

mit einander hervorbringen, offenbar die Ebenen vom Schlusse des vorigen Art., die Doppelebenen der orthogonalen Involutionsen harmonischer Polarebenen durch die betrachteten Geraden. Das Hyperboloid für einen bestimmten Werth von

λ^2 enthält überdies die vier Geraden, die der hier zum Ausgangspunkt genommenen Cartesischen Gleichung entsprechen

$$(1+c)x_1 \pm \lambda(1-c)x_2 = 0, \quad (1+m)x_4 \pm \lambda(1-m)x_3 = 0.$$

und die ebenfalls reellen anderen vier

$$(1+c)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}x_1 \pm \lambda(1-m)x_3 = 0,$$

$$(1+m)x_4 \pm \lambda(1-c)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}x_2 = 0,$$

welche den Geraden in der ursprünglichen Ausdrucksweise entsprechen

$$(y-mx) \pm \lambda(1+m^2)^{\frac{1}{2}}(z+c) = 0, \quad \lambda(1+m^2)^{\frac{1}{2}}(z-c) \pm (y+mx) = 0.$$

Wendet man dieselbe Transformation auf die Steiner'sche Erzeugung in den unter 2) gegebenen Gleichungsformen an, so hat man nur zu beachten, dass die cyclische Verschiebung der Buchstaben b, x, y, z in c, y, z, x von der Bezeichnung des vorigen zu der des Anfangs von Art. 2) führt, erhält also für die dort gegebenen Gleichungen die Substitution

$$x = b \frac{(1+m)x_4 + (1-m)x_3}{(1+b)x_1 - (1-b)x_2}, \quad y = b \frac{(1+b)x_1 + (1-b)x_2}{(1+b)x_1 - (1-b)x_2},$$

$$z = \frac{b(1+m)x_4 - (1-m)x_3}{m(1+b)x_1 - (1-b)x_2}$$

und damit aus

$$y+b = 2b(1+b)x_1, \quad y-b = 2b(1-b)x_2;$$

$$mz+x = 2b(1+m)x_4, \quad mz-x = -2b(1-m)x_3$$

die Gleichung

$$a') \quad (1-b^2)x_1x_2 + x_3x_4 = 0.$$

Die Kreisschnittdiametralebenen $z = \pm mx$ gehen über in

$$(1+m^2)x_3 = (1+m)^2x_4,$$

$$(1-m)^2x_3 = (1+m^2)x_4.$$

Das Coordinatensystem, welches hier benutzt ist, hat einiges allgemeine Interesse und ich will es kurz besprechen.

Weil A_3, A_4 unendlich fern sind, so kann man zur Construction die von A_1 respective A_2 ausgehenden Gruppen von je drei Kanten benutzen und die beiden ungeschlossenen Ketten $A_3 A_1 A_2 A_4$ und $A_4 A_1 A_2 A_3$, also die Coordinatenverhältnisse $x_2 : x_1, x_3 : x_1, x_4 : x_1; x_1 : x_2, x_3 : x_2, x_4 : x_2; x_3 : x_1, x_1 : x_2, x_2 : x_4; x_4 : x_1, x_1 : x_2, x_2 : x_3$ respective, die sich mit Ausnahme von $x_1 : x_2$ auf einfache Verhältnisse reduciren, während diess ist $\frac{A_1 E_{12}}{A_2 E_{12}} : \frac{A_1 P_{12}}{A_2 P_{12}}$. Wenn wir den Einheitpunkt insbesondere so wählen, dass $A_1 E_{12} = E_{12} A_2$ ist, also E_{12} als Mittelpunkt der Strecke $A_1 A_2$, so wird diess — $A_2 P_{12} : A_1 P_{12}$; indess

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{A_1 P_{13}}{A_1 E_{13}}, \quad \frac{x_4}{x_1} = \frac{A_1 P_{14}}{A_1 E_{14}}, \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{A_2 P_{23}}{A_2 E_{23}}, \quad \frac{x_4}{x_2} = \frac{A_2 P_{24}}{A_2 E_{24}}.$$

Macht man $A_1 E_{13} = A_1 E_{14} = A_2 E_{23} = A_2 E_{24} = A_1 E_{12}$ und setzt diese gleich Eins, so hat man diese Verhältnisse sämmtlich als einfache Längenzahlen von $A_1 P_{13}, A_1 P_{14}, A_2 P_{23}, A_2 P_{24}$ respective, indess $x_1 : x_2$ ein einfaches Theilverhältniss ist; die beiden ersten oder die zweiten oder eins und vier oder zwei und drei geben in Verbindung mit diesem eine bequeme Construction.

In der vorigen Untersuchung entspricht dem die Annahme, dass die Coordinaten des Einheitpunktes seien $(1, 0, \frac{b}{2m}, 0)$, also in der Bezeichnung der Transformationstafel vom Anfang dieses Artikels $(1, \frac{c}{2m}, 0, 0)$; die Substitutionsgleichungen werden in die jetzige Bezeichnung zurück verschoben einfach

$$x = -\frac{b}{2} \frac{x_3 - x_4}{x_1 + x_2}, \quad y = b \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}, \quad z = \frac{b}{2m} \frac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2},$$

somit

$$y + b = \frac{2b x_1}{x_1 + x_2}, \quad y - b = \frac{-2b x_2}{x_1 + x_2}, \quad mz + x = \frac{b x_4}{x_1 + x_2}, \quad mz - x = \frac{b x_3}{x_1 + x_2},$$

und die Gleichung des Hyperboloids von gleicher Einfachheit wie vorhin, nur dass b verschwindet und die Richtungsconstante m eintritt.

$$a'') \quad 4(1 - m^2) x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0.$$

Der Erzeugung aus gleichwinkligen Büscheln entsprechen nach dem Obigen die Gleichungen

$$c) \quad \lambda = \frac{b-y}{x-mz}, \quad \lambda' = -\frac{b+y}{x+mz}; \quad \lambda\lambda' + \beta(\lambda - \lambda') + \frac{1}{1+m^2} = 0;$$

die ersten beiden liefern durch die benutzte Substitution

$$\lambda = -\frac{1-b}{1-m} \frac{x_2}{x_3}, \quad \lambda' = -\frac{1+b}{1+m} \frac{x_1}{x_4},$$

also die Gleichung des Hyperboloids in der Form

$$c') \quad \frac{1-b^2}{1-m^2} x_1 x_2 + \frac{x_3 x_4}{1+m^2} + \beta \left\{ \frac{1+b}{1+m} x_1 x_3 - \frac{1-b}{1-m} x_2 x_4 \right\} = 0,$$

in der sie zeigt, dass alle Hyperboloide aus gleichwinkligen Büscheln von denselben Scheitelkanten aber verschiedenen Anfangslagen, die gemeinschaftlichen Geraden des Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids von den respectiven Gleichungen

$$\frac{1-b^2}{1-m^2} x_1 x_2 + \frac{x_3 x_4}{1+m^2} = 0, \quad \frac{1+b}{1+m} x_1 x_3 = \frac{1-b}{1-m} x_2 x_4$$

oder durch die windschiefen Vierecke $A_1 A_3 A_2 A_4$ und $A_1 A_2 A_3 A_4$ enthalten (nämlich die ausser $A_2 A_3$, $A_1 A_4$ ihnen gemeinschaftlichen). Dieserein imaginären Geraden sind die Durchschnittslinien der durch die Scheitelkanten an den imaginären Kreis im Unendlichen gehenden Tangentialebenen; denn ihre Gleichungen

$$(x \pm mz) \pm i(y \pm b) \sqrt{1+m^2} = 0$$

gehen durch dieselbe Transformation in

$$\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}} x_3 \pm i(1-b) x_2 = 0; \quad \frac{1+m}{\sqrt{1+m^2}} x_4 \pm i(1+b) x_1 = 0$$

über und das Product dieser Gleichungen giebt in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt die vorigen Gleichungen zweiten Grades wieder — eine nicht uninteressante analytisch-geometrische Construction der Gleichung des orthogonalen Hyperboloids. Jene Ebenen machen mit jeder Anfangslage im bezüglichen Büschel unmessbar grosse Winkel und entsprechen sich daher unabhängig von jenen Lagen. Auf die Analogien in der Ebene brauche ich nur hinzuweisen.

Die einfachste Gleichung für diese Hyperboloide giebt aber eine gewisse Combination der Steiner'schen Erzeugung mit der Erzeugung aus gleichwinkligen Büscheln. Ich habe unter 2) gezeigt, dass die Erzeugenden aus den Scheiteln der kleinen Axe des elliptischen Hauptschnittes Scheitellanten gleichwinkliger erzeugender Büschel sind, während die Erzeugenden aus den Scheiteln der grossen Axe des elliptischen Hauptschnittes die Scheitellanten für die Erzeugung aus normalen Ebenenpaaren bilden. Zwei Erzeugende derselben Schaar von den Scheiteln der kleinen und die beiden Erzeugenden der andern Schaar von den Scheiteln der grossen Axe des elliptischen Hauptschnittes bilden das regelmässigste Tetraeder, welches aus Erzeugenden der Fläche von den beiden Haupttypen gebildet werden kann und es giebt solcher Tetraeder nur zwei, welche in Bezug auf die Hauptebenen der Fläche offenbar orthogonalsymmetrisch sind. Für eines derselben als fundamental wird der einfachste Ausdruck der Fläche dann entstehen, wenn man den Mittelpunkt der Fläche, der augenscheinlich zugleich der gemeinsame Schwerpunkt beider Tetraeder ist, zum Einheitpunkte macht. Dann ist zugleich die Einheitsbene, als harmonisch getrennt vom Einheitpunkte durch das Tetraeder, die unendlich ferne Ebene und die projectivischen Coor-

dinaten sind zwar auf ein wirkliches Tetraeder bezogen und insofern allgemein, aber die x_i sind Volumen- und die ξ_i Vierpunkt-Coordinaten und das Fundamentaltetraeder ist von ganz bestimmten Dimensionsverhältnissen (z. B. Fig. 4 von den kürzesten Abständen der Gegenkanten gleich 15, 12, 20 resp.); die beiden vorbesprochenen Tetraeder bilden zusammen ein rechtwinkliges Parallelepiped, zwischen dessen zu den Axen x, y, z respective parallelen Kanten $2a, 2b, 2c$ die Relation besteht

$$a^2b^2 + b^2c^2 = c^2a^2.$$

Dass hierin und in dem Ergebniss unter 2) nach der Gleichung a) die besten darstellend geometrischen Constructions mittel (Fig. 4 u. Fig. 2) für Hyperboloide dieser Art liegen, ist offenbar; hier aus acht Erzeugenden, den Steiner'schen und den vier symmetrischen unter den gleichwinkligen, und dort aus zwei Diametralschnitten K_1, K_2 und den vier Steiner'schen Erzeugenden $s_1, s_2; s_1^*, s_2^*$. Die fragliche letzte Transformation aber ist folgende: Mit den Scheitelkanten der rechtwinkligen Paare

$$y = \pm b, \quad mz = \pm x$$

nehme ich als Scheitelkanten der gleichwinkligen Büschel

$$x = \mp b\sqrt{1-m^2}, \quad y\sqrt{1-m^2} = \mp mz$$

und erhalte die Coordinatentafel der neuen Fundamentalepunkte $s_1g_1, s_2g_1, s_2g_2, s_1g_2$ in Fig. 4

$$\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 \\ -b\sqrt{1-m^2} & , & -b\sqrt{1-m^2} & , & b\sqrt{1-m^2} & , & b\sqrt{1-m^2} \\ b & , & -b & , & -b & , & b \\ -\frac{b}{m}\sqrt{1-m^2} & , & \frac{b}{m}\sqrt{1-m^2} & , & -\frac{b}{m}\sqrt{1-m^2} & , & \frac{b}{m}\sqrt{1-m^2} \end{vmatrix}$$

mit dem Determinantenwerthe

$$X = \frac{16b^3}{m}(1-m^2)$$

und dem adjungirten System

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{4b^3(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^3(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^3(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^3(1-m^2)}{m} \\ -\frac{4b^2}{m}\sqrt{1-m^2}, & -\frac{4b^2}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{4b^2}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{4b^2}{m}\sqrt{1-m^2} \\ \frac{4b^2(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^2(1-m^2)}{m}, & -\frac{4b^2(1-m^2)}{m}, & \frac{4b^2(1-m^2)}{m} \\ -\frac{4b}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{4b}{m}\sqrt{1-m^2}, & -\frac{4b}{m}\sqrt{1-m^2}, & \frac{4b}{m}\sqrt{1-m^2} \end{array} \right];$$

für $(1, 0, 0, 0)$ als die Coordinaten des neuen Einheitpunktes folgen die Coefficienten der Substitution aus der Formel

$$\beta_{hi} x = \mu x_{hi}^{(i)} X_1^{(i)}$$

und die Substitution

$$x = -b\sqrt{1-m^2} \frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}, \quad y = b \frac{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4},$$

$$z = -\frac{b\sqrt{1-m^2}}{m} \frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$$

dadurch aber die Gleichung des Hyperboloids

$$d) \quad x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0$$

und in Ebenencoordinaten

$$\xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4 = 0,$$

welche den Nenner der Substitution als die linke Seite der Gleichung der Polarebene des Einheitpunktes in Bezug auf die Fläche und diesen als Mittelpunkt bestätigen. Die Diametralebenen der Kreisschnitte sind

$$(x_2 - x_3)(1 + m^2) + (x_4 - x_1)(1 - m^2) = 0,$$

$$(x_2 - x_3)(1 - m^2) + (x_4 - x_1)(1 + m^2) = 0,$$

und die Kreisschnitte selbst

$$x_2(x_1 - x_2) + x_3 \left(x_1 + \frac{1+m^2}{1-m^2} x_2 \right) = 0; \text{ etc.}$$

Die Construction der Gleichung, die ich am Schlusse der vorigen Untersuchung angegeben habe, ist auch

hier von Interesse. Die durch die Scheitelkanten der benutzten gleichwinkligen Büschel gehenden Tangentialebenen des imaginären Kreises im Unendlichen sind

$$i\left(1 + \frac{x}{b\sqrt{1-m^2}}\right) = \frac{y}{b} + \frac{mz}{b\sqrt{1-m^2}}, \quad 1 - \frac{x}{b\sqrt{1-m^2}} = i\left(\frac{y}{b} - \frac{mz}{b\sqrt{1-m^2}}\right);$$

sie werden durch die Transformation respective in

$$i(x_3 + x_4) + (x_3 - x_4) = 0, \quad i(x_1 - x_2) - (x_1 + x_2) = 0$$

übergeführt und das Product derselben ist

$$(x_1x_4 - x_2x_3) + i(x_1x_3 + x_2x_4) = 0,$$

das hyperbolische Paraboloid durch den Einheitpunkt und das Vierseit $A_1 A_3 A_4 A_2$ und das betrachtete Hyperboloid, welche beide die reellen Erzeugenden $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ und die zwei rein imaginären aus den angezogenen Ebenen gemeinsam haben und durch die alle andern Hyperboloide aus gleichwinkligen Büscheln um dieselben Scheitelkanten bestimmt sind.

4) Transformation und metrische Relationen.

Im Vorigen (p. 159) war Anlass, das specielle Coordinatensystem mit zwei unendlich fernen Fundamentalpunkten zu erwähnen; hier soll zunächst das mit nur einem unendlich fernen Fundamentalpunkt A_1 kurz besprochen werden, weil es dem Cartesisch-Plücker'schen mit der unendlich fernen Fundamentalebene A_1 nach dem Princip der Dualität gegenüber steht. Man hat für die Coordinaten des Punktes

$$\frac{x_2}{x_1} = (A_2 A_1 E_{12} P_{12}) = \frac{A_2 E_{12}}{A_2 P_{12}}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{A_3 E_{13}}{A_3 P_{13}}, \quad \frac{x_4}{x_1} = \frac{A_4 E_{14}}{A_4 P_{14}}$$

und somit bei der Wahl des Einheitpunktes E nach den Relationen

$$A_2 E_{12} = A_3 E_{13} = A_4 E_{14} = -1$$

die bezeichneten Coordinatenverhältnisse des Punktes als die negativen Reciproken der Längenzahlen der Abschnitte, welche von den nach ihm durch $A_3 A_4$, $A_4 A_2$, $A_2 A_3$

gehenden Ebenen in den Gegenkanten des fundamentalen prismatischen Mantels $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ gebildet werden, vom fundamentalen Querschnitt aus gerechnet. Für die Ebenencoordinaten ist wegen $\xi_1 = 1$

$$\xi_2 = (A_1 A_2 E_{12} P_{12}) = \frac{A_2 P_{12}}{A_2 E_{12}}, \quad \xi_3 = \frac{A_3 P_{13}}{A_3 E_{13}}, \quad \xi_4 = \frac{A_4 P_{14}}{A_4 E_{14}},$$

oder unter Annahme der harmonischen Trennung von Einheitpunkt und Einheitsene wegen

$$A_2 E_{12} = A_3 E_{13} = A_4 E_{14} = -A_2 E_{12} = 1, \\ \xi_2 = A_2 P_{12}, \quad \xi_3 = A_3 P_{13}, \quad \xi_4 = A_4 P_{14},$$

d. h. die Coordinaten der Ebene sind die Längenzahlen ihrer Abschnitte in den Kanten des prismatischen Mantels vom fundamentalen Querschnitt aus gemessen. Die Einheitsene E ist dem letzteren parallel im Abstand Eins in der Richtung A_1 ; der Einheitpunkt liegt in der durch den Schwerpunkt E_1 des Querschnitts $A_2 A_3 A_4$ in der Richtung A_1 gehenden Geraden im Abstände $E_1 E = -\frac{1}{3}$.

Die Bedingung des Ineinanderliegens von Punkt und Ebene, d. h. die Gleichung der Ebene respective des Punktes, je nachdem die x oder die ξ als veränderlich gelten, ist

$$x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

und kann natürlich, wo Verwechslungen mit Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten nicht zu fürchten sind, auch in der Form

$$1 + \xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

geschrieben werden, so dass den Rechnungsergebnissen mit dieser Gleichungsform jedenfalls dadurch eine zweite gleichberechtigte Reihe von Interpretationen erwächst; dieselbe kann auch ganz wie bei Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten unmittelbar aus der Figur abgelesen werden als Ausdruck der Relation zwischen drei Abschnitten auf dem Radius vector $A_1 P$ eines Punktes P der Ebene P und ihrer Summe;

nämlich Abschnitten, welche von den Parallelebenen zu \mathbf{P} aus den Punkten der Kanten des prismatischen Mantels, also $A_2 P_{12}$, $A_3 P_{13}$, $A_4 P_{14}$ in dem Radius vector bestimmt werden. Allerdings ist diese elementare Ableitung auch für Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten meines Wissens nirgends veröffentlicht. Sie verläuft allgemein wie folgt. (Vergl. für Bezeichnung und Entwicklung «Darstell. Geom. und Geom. der Lage» Art. 143.) Ist P ein Punkt der Ebene \mathbf{P} für Cartesisch-Plücker'sche Coordinaten mit den von A_1 ausgehenden Axen von den Richtungen A_2, A_3, A_4 respective (Fig. 5), sind $\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{13}, \mathbf{P}_{14}$ die Axenschnittpunkte der Ebene, P_{12}, P_{13}, P_{14} die in den Axen liegenden Ecken des projectirenden Parallelepipeds von P , ferner P_4 die vierte in der Ebene $A_1 A_2 A_3$ liegende Ecke desselben und \mathbf{P}_{14}^* der Durchschnittpunkt der Geraden $A_1 P_4$ von der Richtung P_{23} , $\mathbf{P}_{13} P_{13}, \mathbf{P}_{14} P$, sowie \mathbf{P}_{12}^* und \mathbf{P}_{13}^* die in den Richtungen A_3, A_2 respective gebildeten Projectionen von \mathbf{P}_{14}^* auf $A_1 A_2, A_1 A_3$, so hat man unmittelbar aus der Figur nach der Lage von P in der Geraden $\mathbf{P}_{14} \mathbf{P}_{14}^*$ im Dreieck $A_1 A_4 P_{23}$ und nach der Lage von \mathbf{P}_{14}^* in der Geraden $\mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{13}$ im Dreieck $A_1 A_2 A_3$ respective

$$\frac{A_1 P_{14}}{A_1 \mathbf{P}_{14}} + \frac{A_1 P_4}{A_1 \mathbf{P}_{14}^*} = 1, \quad \frac{A_1 \mathbf{P}_{12}^*}{A_1 \mathbf{P}_{12}} + \frac{A_1 \mathbf{P}_{13}^*}{A_1 \mathbf{P}_{13}} = 1.$$

Multiplirt man die drei Glieder der letzteren Gleichung der Reihe nach mit den drei gleichen Verhältnissen (Figur)

$$\frac{A_1 P_{12}}{A_1 \mathbf{P}_{12}^*} = \frac{A_1 P_{13}}{A_1 \mathbf{P}_{13}^*} = \frac{A_1 P_4}{A_1 \mathbf{P}_{14}^*},$$

so erhält man

$$\frac{A_1 P_{12}}{A_1 \mathbf{P}_{12}} + \frac{A_1 P_{13}}{A_1 \mathbf{P}_{13}} = \frac{A_1 P_4}{A_1 \mathbf{P}_{14}^*}$$

und somit durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$\frac{A_1 P_{12}}{A_1 \mathbf{P}_{12}} + \frac{A_1 P_{13}}{A_1 \mathbf{P}_{13}} + \frac{A_1 P_{14}}{A_1 \mathbf{P}_{14}} = 1$$

oder nach den Coordinatendefinitionen

$$\frac{\lambda_2 \xi_2 x_2 + \lambda_3 \xi_3 x_3 + \lambda_4 \xi_4 x_4}{\lambda_1 \xi_1 x_1} = 1,$$

d. h. nach der speciellen Bezeichnung der Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten $\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$.

Specieller aber erhält man dasselbe Resultat durch Einführung des Radius vector $A_1 P$ und der Schnittpunkte desselben mit den drei durch P_{12} , P_{13} , P_{14} zur Ebene \mathbf{P} gehenden Parallelebenen; denn

$$\frac{A_1 P_{12}}{A_1 P_{12}} + \frac{A_1 P_{13}}{A_1 P_{13}} + \frac{A_1 P_{14}}{A_1 P_{14}} = 1$$

ist nichts andres als der Ausdruck des Umstandes, dass der Radius vector $A_1 P$ der Summe seiner drei so gebildeten Abschnitte gleich ist.

Im dualistischen Coordinatensystem mit dem Dreieck in der Hauptebene $A_2 A_3 A_4$ und der Hauptrichtung A_1 (Fig. 6) erhält man dagegen für \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{13} \mathbf{P}_{14} als den Querschnitt der Ebene \mathbf{P} mit dem prismatischen Mantel und den Punkt P in derselben mit der Projection P_4 aus A_4 auf die Ebene $A_1 A_2 A_3$, mit den Schnitten P_{12} , P_{13} , P_{14} und P_{23} der Kanten $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ mit den Ebenen, welche P mit den respectiven Gegenkanten $A_3 A_4$, $A_2 A_4$, $A_2 A_3$, $A_1 A_4$ verbinden, mit \mathbf{P}_{14}^* als dem Schnitt von \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{13} , \mathbf{P}_{14} P , P_{23} P_4 A_1 und \mathbf{P}_{12}^* , \mathbf{P}_{13}^* als den Projectionen desselben aus A_3 , A_2 auf $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ respective aus der Lage von P in der Geraden \mathbf{P}_{14} \mathbf{P}_{14}^* im Dreieck $A_1 A_4 P_{23}$ und aus der Lage von \mathbf{P}_{14}^* in der Geraden \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{13} im Dreieck $A_1 A_2 A_3$ die Gleichungen

$$\frac{A_4 P_{14}}{A_4 P_{14}} + \frac{P_{23} P_{14}^*}{P_{23} P_4} = 1, \quad \frac{A_2 P_{12}}{A_2 P_{12}^*} + \frac{A_3 P_{13}}{A_3 P_{13}^*} = 1.$$

Multiplicirt man die drei Glieder der letzteren mit den drei ersichtlich gleichen Verhältnissen

$$\frac{A_2 P_{12}^*}{A_2 P_{12}} = \frac{A_3 P_{13}^*}{A_3 P_{13}} = \frac{P_{23} P_{14}^*}{P_{23} P_4}$$

der Reihe nach, so erhält man

$$\frac{A_2 P_{12}}{A_2 P_{12}} + \frac{A_3 P_{13}}{A_3 P_{13}} = \frac{P_{23} P_{14}^*}{P_{23} P_4}$$

und durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$\frac{A_2 P_{12}}{A_2 P_{12}} + \frac{A_3 P_{13}}{A_3 P_{13}} + \frac{A_4 P_{14}}{A_4 P_{14}} = 1 \text{ oder } 1 + \xi_2 \frac{x_2}{x_1} + \xi_3 \frac{x_3}{x_3} + \xi_4 \frac{x_4}{x_1} = 0.$$

Ich will hier eine Anwendung dieser Coordinatensysteme skizziren, die eine gewisse systematische Bedeutung hat. Wenn man in zwei Orthogonalsystemen an verschiedenen Scheiteln S_1, S_2 die nach den Punkten P einer Ebene \mathbf{P} gehenden Strahlenpaare $S_1 P, S_2 P$ und die Normalebene $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ derselben nimmt, so gehört ihre Durchschnittslinie einer Strahlencongruenz als Bild der Punktebene an und markirt in dieser den zu P doppelt conjugirten Punkt P^* . Für S_{11}, S_{21} als Fußpunkte der Normalen zu \mathbf{P} aus S_1 und S_2 und $11', 22'$ als die zu S_{11}, S_{21} senkrechten Durchmesser der um S_{11}, S_{21} mit den Radien $S_1 S_{11}, S_2 S_{21}$ beschriebenen Kreise sind die in S_{11}, S_{21} liegenden Punkte des Kreises durch $122' 1'$ und die dazu normale Richtung die Ausnahmepunkte der involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades zwischen P und P^* und daher die natürlichen Fundamentalpunkte für die analytische Untersuchung derselben; analog dient ein prismatisches System zur Untersuchung der Congruenz, etc. (Vergl. diese Vierteljahrsschrift Bd. XXI, pag. 371).

Natürlich kann man den Normalschnitt des prismatischen Mantels als fundamentalen Querschnitt wählen und denselben insbesondere als gleichseitiges Dreieck festsetzen, in welchem Falle E_1 zugleich der Schnittpunkt seiner Höhen oder der Conjugirten seiner Seiten aus den Gegenecken in Bezug auf den imaginären Kreis im Unendlichen ist; man kann ebenso in der Ebene die parallelen Axen $A_1 A_2, A_1 A_3$, mit ihrer

Normalbreite A_2 A_3 zu Fundamentallinien wählen und das Analogon der rechtwinkligen Coordinaten bilden. Weil jetzt Hauptebene und Hauptrichtung conjugirt sind in Bezug auf den imaginären Kreis im Unendlichen, so erhält man einfache Formeln für die metrischen Relationen — immerhin von geringerer Einfachheit, als im Falle rechtwinkliger Cartesisch-Plücker'scher Coordinaten.

Den Character dieser Differenz wird sofort die folgende Ueberlegung deutlich machen. Der Uebergang von einem gegebenen zu einem neuen System der Fundamental-Elemente projectivischer Coordinaten entspricht, wenn man Punkte und Ebenen mit einerlei Coordinatenwerthen als entsprechend betrachtet, dem Uebergang von einem System zu einem mit ihm collinearen, in der Ebene insbesondere also zu einer perspectivischen Abbildung — nach der Natur der projectivischen Coordinaten. Entspricht dabei die unendlich ferne Ebene respective Gerade sich selbst, so hat man nicht Collineation im Allgemeinen, sondern Affinität; Richtungen und Stellungen entsprechen wieder Richtungen und Stellungen, entsprechende Gerade sind durch die entsprechenden Punkte proportional getheilt. Bei Benutzung von zwei Cartesisch-Plücker'schen Coordinatensystemen findet offenbar dies Verhältniss immer statt, während es für zwei Systeme von der so eben besprochenen Art nur für einzelne Richtungen und Stellungen gilt, analog eingeschränkt auch für den Uebergang zwischen beiderlei Arten von Systemen.

Betrachtet man unter demselben Gesichtspunkte die allgemeinen Coordinatensysteme, so ergibt sich wieder jene schon im Eingang hervorgehobene ausgezeichnete Stellung der beiden Systeme der Volumen- und der Vierpunkt-Coordinaten. Geht man von Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten zu solchen über, so wird eine Fundamental-ebene

respective -linie des ersten zur Einheit-ebene (-linie) des zweiten; und beim Uebergang von einem System Volumen-Vierpunkt-Coordinaten zu einem andern bleibt die unendlich-ferne Einheitsbene dieselbe; im letzteren Falle haben die Punkte, etc. von denselben Coordinatenwerthen also die Bedeutung als entsprechende Punkte in affinen Systemen, parallelen Geraden und Ebenen entsprechen parallele Gerade und Ebenen und zwischen entsprechenden geraden Reihen besteht ein bestimmtes, von der Richtung abhängiges Verjüngungsverhältniss. Im ersten Falle findet ein solches Entsprechen nicht statt, weil in der unendlich fernen Ebene nicht zwei entsprechende Ebenen zusammenfallen.

Man weiss, dass die metrischen Relationen Beziehungen der Elementenpaare zum imaginären Kugelkreis in unendlicher Ferne sind, in der Ebene zu den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten in derselben. Zur analytischen Ausdrucksweise dieser absoluten Elemente der Metrik gelangt man leicht bei der Untersuchung der metrischen Relationen, welche zwischen den Fundamentelementen und den drei Coordinaten eines Punktes respective einer Geraden in der Ebene, und ebenso den vier Coordinaten eines Punktes respective einer Ebene im Raum bestehen. Wenn mit p_i und e_i die Längen der Perpendikel vom Punkt auf die Fundamentallinien a_i oder die Fundamentebenen A_i bezeichnet werden, so hat man $x_i = p_i : e_i$ oder $p_i = e_i x_i$; und da für s_i als die Länge der Seite a_i respective F_i als die Flächenzahl des Dreiecks der Fundamentalpunkte in der Ebene A_i und für F als die Fläche des Fundamentaldreiecks, V als das Volumen des Fundamentaltetraeders offenbar die Gleichungen gelten müssen

$$s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3 = 2 F, \quad F_1 p_1 + F_2 p_2 + F_3 p_3 + F_4 p_4 = 3 V,$$

so hat man die Abhängigkeit der Coordinaten eines

Punktes von den Maassen der fundamentalen Gruppe in der Form

$$e_1 s_1 x_1 + e_2 s_2 x_2 + e_3 s_3 x_3 = 2 F, \quad e_1 F_1 x_1 + e_2 F_2 x_2 + e_3 F_3 x_3 + \\ + e_4 F_4 x_4 = 3 V.$$

Insbesondere für E als Schwerpunkt des Dreiecks respective des Tetraeders wegen $3 e_i = h_i$ und $h_i s_i = 2 F$ im ersten und $4 e_i = h_i$, $h_i F_i = 3 V$ im zweiten Falle

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \text{ resp. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4.$$

Dann ist unter Voraussetzung der harmonischen Trennung von Einheitpunkt und Einheitlinie respective Ebene die Letztere die unendlich ferne Gerade respective -Ebene und also sind

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

ihre respectiven Gleichungen. Im allgemeinen Falle werden dieselben

$$\Sigma e_i s_i x_i = 0, \quad \Sigma e_i F_i x_i = 0;$$

denn in $\Sigma e_i s_i x_i - 2 F = 0$ kann die Constante $2 F$ die für einen unendlich fernen Punkt unendlich grossen Producte $e_i s_i x_i$ nicht auf Null reduciren, wenn diese es nicht unter einander thun, etc. Man hat somit den Ausdruck des Absoluten der Metrik in Coordinaten x_i gefunden. Sein Ausdruck in Linien- respective Ebenen-Coordinaten ist für Ebene und Raum

$$\xi^2 + \eta^2 = 0 \quad \text{und} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

respectively, für ξ, η und ξ, η, ζ als die rechtwinkligen Plücker'schen Coordinaten der Geraden und der Ebene. Denn das Verschwinden von $\xi^2 + \eta^2$, respective $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ für eine Gerade oder Ebene bedingt, dass die Entfernung der Geraden oder Ebene von einem beliebigen Punkte unendlich gross ist und diess findet nur statt, wenn die Gerade durch einen der Kreispunkte geht, respective wenn die Ebene den imaginären Kugelkreis berührt, d. h. die vorigen Gleichungen

chungen repräsentiren das Absolute als Enveloppe von der zweiten Classe. Denn die Distanz des Punktes von der Geraden oder Ebene wird in der Linie von ihm nach ihrem Pol in Bezug auf das Absolute gemessen und in dem Falle der Berührung mit demselben fällt dieser mit dem Berührungspunkt und also zugleich mit dem Endpunkt der Distanz in der Ebene oder Geraden zusammen und dieselbe ist unendlich gross. Setzt man nun, um die entspringende Entwicklung für die Ebene auszuführen $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ als die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten der Eckpunkte des Fundamentaldreiecks und sind ξ_i (oder die Verhältnisse $\pi_i : \varepsilon_i$ der senkrechten Abstände der Fundamentalphunkte von ihr und von der angenommenen Einheitlinie) die Coordinaten einer willkürlichen Geraden von der Cartesisch-Plücker'schen Gleichung

$$\xi x + \eta y + 1 = 0,$$

so hat man $\pi_i = \varepsilon_i \xi_i = \frac{\xi x_i + \eta y_i + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ und somit

$$\varepsilon_1 \xi_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi x_1 - \eta y_1 = 1,$$

$$\varepsilon_2 \xi_2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi x_2 - \eta y_2 = 1,$$

$$\varepsilon_3 \xi_3 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi x_3 - \eta y_3 = 1;$$

Gleichungen, aus denen man bestimmt

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} : \xi : \eta : 1 = \left| \begin{array}{c} 1, x_1, y_1 \\ 1, x_2, y_2 \\ 1, x_3, y_3 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \xi_1, 1, -y_1 \\ \varepsilon_2 \xi_2, 1, -y_2 \\ \varepsilon_3 \xi_3, 1, -y_3 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \xi_1, -x_1, 1 \\ \varepsilon_2 \xi_2, -x_2, 1 \\ \varepsilon_3 \xi_3, -x_3, 1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \xi_1, x_1, y_1 \\ \varepsilon_2 \xi_2, x_2, y_2 \\ \varepsilon_3 \xi_3, x_3, y_3 \end{array} \right|$$

und daher einerseits die identische Relation zwischen den projectivischen Coordinaten einer Geraden

$$\left| \begin{array}{c} 1, x_1, y_1 \\ 1, x_2, y_2 \\ 1, x_3, y_3 \end{array} \right|^2 = \left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \xi_1, 1, -y_1 \\ \varepsilon_2 \xi_2, 1, -y_2 \\ \varepsilon_3 \xi_3, 1, -y_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \xi_1, -x_1, 1 \\ \varepsilon_2 \xi_2, -x_2, 1 \\ \varepsilon_3 \xi_3, -x_3, 1 \end{array} \right|^2,$$

andererseits die Gleichung der imaginären Kreispunkte als Enveloppe zweiter Klasse oder des Absoluten

$$\left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \xi_1, 1, -y_1 \\ \varepsilon_2 \xi_2, 1, -y_2 \\ \varepsilon_3 \xi_3, 1, -y_3 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \xi_1, -x_1, 1 \\ \varepsilon_2 \xi_2, -x_2, 1 \\ \varepsilon_3 \xi_3, -x_3, 1 \end{array} \right|^2 = 0.$$

Man sieht die linke Seite der ersteren repräsentirt das Quadrat der doppelten Flächenzahl des Fundamentaldreiecks, indess die rechte Seite giebt

$$\varepsilon_1^2 \xi_1^2 \{ (y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 \} + \dots \\ + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \xi_1 \xi_2 \{ 2 (y_2 - y_3) (y_3 - y_1) + 2 (x_2 - x_3) (x_3 - x_1) \} + \dots$$

d. h. $\varepsilon_1^2 \xi_1^2 s_1^2 + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \xi_1 \xi_2 (s_3^2 - s_1^2 - s_2^2) + \dots$

oder $s_1^2 (\varepsilon_1 \xi_1 - \varepsilon_2 \xi_2) (\varepsilon_1 \xi_1 - \varepsilon_3 \xi_3) + s_2^2 (\varepsilon_2 \xi_2 - \varepsilon_1 \xi_1) (\varepsilon_2 \xi_2 - \varepsilon_3 \xi_3) + s_3^2 (\varepsilon_3 \xi_3 - \varepsilon_1 \xi_1) (\varepsilon_3 \xi_3 - \varepsilon_2 \xi_2)$

oder also auch

$$(\varepsilon_1 \xi_1) s_1^2 + \dots - 2 (\varepsilon_1 \xi_1) (\varepsilon_2 \xi_2) s_1 s_2 \cos A_3 - \dots,$$

wenn man die Winkel des Fundamentaldreiecks an den Ecken A_1, A_2, A_3 selbst durch A_1, A_2, A_3 bezeichnet. Für Dreipunkt-Coordinationen oder die Einheitlinie als die unendlich ferne Gerade setzt man $\xi_i = \pi_i$ oder $\varepsilon_i = 1$ und erhält damit die Relation zwischen den Coordinationen einer Geraden in der Form

$$4 F^2 = \xi_1^2 s_1^2 + \dots - 2 \xi_1 \xi_2 s_1 s_2 \cos A_3 - \dots,$$

und die Bedingung für ihr unendlich grosswerden oder die Gleichung des Absoluten in Liniencoordinaten

$$0 = \xi_1^2 s_1^2 + \dots - 2 \xi_1 \xi_2 s_1 s_2 \cos A_3 - \dots$$

oder auch

$$0 = s_1^2 (\xi_1 - \xi_2) (\xi_1 - \xi_3) + s_2^2 (\xi_2 - \xi_1) (\xi_2 - \xi_3) + s_3^2 (\xi_3 - \xi_1) (\xi_3 - \xi_2),$$

welche sich nur für ein gleichseitiges Fundamentaldreieck noch weiter vereinfacht. Ihre Discriminante ist

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & , & -\cos A_3, & -\cos A_2 \\ -\cos A_3, & & 1 & , & -\cos A_1 \\ -\cos A_2, & -\cos A_1, & & & 1 \end{array} \right|$$

und somit Null, weil A_1, A_2, A_3 die Winkel eines Dreiecks sind.

Da die Tangenten eines Kreises vom Mittelpunkte x_1' , x_2' , x_3' desselben aus nach den imaginären Kreispunkten gehen, so hat man als Gleichung des Kreises

$$(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')^2 = \{ \xi_1^2 s_1^2 + \dots - 2 \xi_1 \xi_2 s_1 s_2 \cos A_3 - \dots \}$$

oder

$$(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3')^2 = \{ s_1^2 (\xi_1 - \xi_2) (\xi_1 - \xi_3) + s_2^2 (\xi_2 - \xi_1) (\xi_2 - \xi_3) + s_3^2 (s_3 - s_1) (\xi_3 - \xi_2) \},$$

woraus speciell die eingeschriebenen Kreise für $x_1' = \pm s_1$ hervorgehen, also z. B. mit $x_1' = + s_1$

$$s_1 s_2 \xi_1 \xi_2 \cos^2 \frac{A_3}{2} + s_2 s_3 \xi_2 \xi_3 \cos^2 \frac{A_1}{2} + s_3 s_1 \xi_3 \xi_1 \cos^2 \frac{A_2}{2} = 0$$

oder in Punkteordinaten

$$x_1^2 s_2^2 s_3^2 \cos^4 \frac{1}{2} A_1 + \dots - 2 x_1 x_2 s_1 s_2 s_3^2 \cos^2 \frac{1}{2} A_1 \cos^2 \frac{1}{2} A_2 - \dots = 0$$

d. h. auch

$$(x_1 s_2 s_3)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A_1 + (x_2 s_3 s_1)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A_2 + (x_3 s_1 s_2)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} A_3 = 0.$$

Aus der Gleichung des Absoluten folgt auch die Bedingung der Orthogonalität von zwei geraden Linien ξ_1' , ξ_1'' als die Relation der harmonischen Trennung ihrer Richtungen durch die Kreispunkte

$$s_1^2 \xi_1' \xi_1'' + s_2^2 \xi_2' \xi_2'' + s_3^2 \xi_3' \xi_3'' = s_1 s_2 \cos A_3 (\xi_1' \xi_2'' + \xi_1'' \xi_2') + s_2 s_3 \cos A_1 (\xi_2' \xi_3'' + \xi_2'' \xi_3') + s_3 s_1 \cos A_2 (\xi_3' \xi_1'' + \xi_3'' \xi_1');$$

also z. B. für die zur Fundamentallinie $x_1 = 0$ normalen Geraden die Relation

$$s_1 \xi_1 = s_2 \xi_2 \cos A_3 + s_3 \xi_3 \cos A_2$$

und insbesondere die Gleichung der zugehörigen Höhe des Fundamentaldreiecks

$$s_2 x_3 \cos A_3 = s_3 x_2 \cos A_2 \quad \text{oder} \quad x_3 \tan A_2 = x_2 \tan A_3,$$

und das dieselbe Seite halbirende Perpendikel

$$x_1 \sin (A_2 - A_3) - \sin A_1 (x_2 - x_3) = 0; \text{ etc.}$$

man bestimmt ebenso leicht die Normale einer Geraden ξ_1' durch den Punkt x_1' , indem man die Relation der Orthogonalität in der Form der Bedingungsgleichung für die Coordinaten ξ_i der Normale schreibt

$$s_1 \xi_1 (s_1 \xi_1' - s_2 \xi_2' \cos A_3 - s_3 \xi_3' \cos A_2) + s_2 \xi_2 (s_1 \xi_1' \cos A_3 - s_2 \xi_2' - s_3 \xi_3' \cos A_1) + s_3 \xi_3 (s_1 \xi_1' \cos A_2 - s_2 \xi_2' \cos A_1 - s_3 \xi_3') = 0.$$

Es erübrigt, die Distanz zweier Punkte und den Winkel zweier Geraden auszudrücken und ich will das Mittel der Transformation hierfür in Anwendung bringen. Für $X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3$ als die Coordinaten der Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3 in einem rechtwinkligen Cartesischen System sind $\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3), \frac{1}{3}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$ die Coordinaten ihres Schwerpunktes, den ich als Einheitpunkt des Systems projectivischer Coordinaten denke. Man hat dann die Coordinatentafel und das adjungirte System derselben

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2, & X_3 Y_1 - X_1 Y_3, & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \\ Y_2 - Y_3, & Y_3 - Y_1, & Y_1 - Y_2 \\ X_3 - X_2, & X_1 - X_3, & X_2 - X_1 \end{vmatrix};$$

erstere mit dem Werthe $2F$ als Determinante für F als die Fläche des Fundamentaldreiecks. Damit ergeben sich die Multiplicatoren von $\mu x_h^{(i)}$ auf der rechten Seite der allgemeinen Gleichung von I

$$\beta_{h1} X = \mu x_h^{(i)} \{ x_1^{(E)} X_1^{(i)} + x_2^{(E)} X_2^{(i)} + x_3^{(E)} X_3^{(i)} \}$$

gleichmässig gleich $\frac{2}{3} F$ und man erhält

$$\begin{aligned} 3 \beta_{11} &= \mu, & 3 \beta_{21} &= \mu X_1, & 3 \beta_{31} &= \mu Y_1; & 3 \beta_{12} &= \mu, & 3 \beta_{22} &= \mu X_2 \\ 3 \beta_{23} &= \mu Y_2; & 3 \beta_{13} &= \mu, & 3 \beta_{23} &= \mu X_3, & 3 \beta_{33} &= \mu Y_3; \end{aligned}$$

somit die Substitution

$$x = \frac{X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \quad y = \frac{Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + Y_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3},$$

welche in der That die Cartesische Gleichung der unendlich fernen Geraden $0 X + 0 Y + 1 = 0$ in die der Einheitlinie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ der Dreipunkt-Coordinaten überführt. Nach der letzten Formel in der ersten Gruppe desselben Abschnittes I erhält man die Substitution für die Liniencoordinaten gleichzeitig

$$\xi = \frac{(Y_2 - Y_3) \xi_1 + (Y_3 - Y_1) \xi_2 + (Y_1 - Y_2) \xi_3}{(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) \xi_1 + (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) \xi_2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \xi_3},$$

$$\eta = \frac{(X_3 - X_2) \xi_1 + (X_1 - X_3) \xi_2 + (X_2 - X_1) \xi_3}{(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) \xi_1 + (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) \xi_2 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \xi_3};$$

man erkennt in den Coëfficienten des Nenners die Flächen-coordinaten des Anfangspunktes der Cartesischen Coordinaten; die Zähler geben natürlich die linken Seiten in den Gleichungen der alten Axen im Endlichen vorhin und die von denen der alten Fundamentalpunkte im Unendlichen jetzt. Aus den letzteren Gleichungen erhält man sofort für den Winkel θ von zweigeraden Linien $(\xi_1', \xi_2', \xi_3'), (\xi_1'', \xi_2'', \xi_3'')$

durch Einsetzen in $\tan \theta = \frac{\xi' \eta'' - \xi'' \eta'}{\xi' \eta'' + \eta' \eta''}$ den Ausdruck

$$\frac{\{(Y_2 - Y_3) \xi_1' + \dots\} \{(X_3 - X_2) \xi_1'' + \dots\} - \{(Y_2 - Y_3) \xi_1'' + \dots\} \{(X_3 - X_2) \xi_1' + \dots\}}{\{(Y_2 - Y_3) \xi_1' + \dots\} \{(Y_2 - Y_3) \xi_1'' + \dots\} + \{(X_3 - X_2) \xi_1' + \dots\} \{(X_3 - X_2) \xi_1'' + \dots\}},$$

in dessen Nenner man durch Entwicklung unmittelbar die Function

$$s_1^2 \xi_1' \xi_1'' + \dots - s_1 s_2 \cos A_3 (\xi_1' \xi_2'' + \xi_1'' \xi_2') - \dots$$

wieder erkennt, deren Verschwinden die Bedingung der Rechtwinkligkeit der betrachteten Geraden bildet; während der Zähler sich sofort als das Product der Determinaten-Ausdrücke

$$(\xi_1' \xi_2'' - \xi_1'' \xi_2') + (\xi_2' \xi_3'' - \xi_2'' \xi_3') + (\xi_3' \xi_1'' - \xi_3'' \xi_1'),$$

$$(Y_2 X_1 - Y_1 X_2) + (Y_3 X_2 - Y_2 X_3) + (Y_1 X_3 - Y_3 X_1)$$

erweist, von denen der erstere durch sein Verschwinden den

Parallelismus der Geraden ξ_1', ξ_1'' oder die Lage ihres Schnittes auf der unendlich fernen Einheitlinie bedingt, während der zweite den doppelten Inhalt des Fundamentaldreiecks ausdrückt.

Aehnlich im Falle der Distanzbestimmung von zwei Punkten x_1', x_1'' und der Distanz eines Punktes x_1 von einer Geraden ξ_1 . Im letzteren Falle geht der Cartesisch-Plücker'sche Ausdruck

$$\frac{\xi x' + \eta y' + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

durch die angegebene Substitution über in

$$\frac{\{(Y_2 - Y_3) \xi_1 + \dots\} \{X_1 x_1' + \dots\} + \{(X_3 - X_2) \xi_1 + \dots\} \{Y_1 x_1' + \dots\} + \{(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) \xi_1 + \dots\} (x_1' + \dots)}{\sqrt{\{(Y_2 - Y_3) \xi_1 + \dots\}^2 + \{(X_3 - X_2) \xi_1 + \dots\}^2}}$$

wo sich der Nenner durch Entwicklung und Ordnung nach den ξ_i, ξ_k sofort in

$$\sqrt{s_1^2 \xi_1^2 + s_2^2 \xi_2^2 + s_3^2 \xi_3^2 - 2 s_1 s_2 \cos A_3 \xi_1 \xi_2 - 2 s_2 s_3 \cos A_1 \xi_2 \xi_3 - 2 s_3 s_1 \cos A_2 \xi_3 \xi_1}$$

verwandelt, eine Grösse, die durch ihr Verschwinden ausdrückt, dass die gerade Linie ξ_i durch einen der Kreispunkte geht, mithin zu sich selbst orthogonal d. h. conjugirt bezüglich der Kreispunkte und also zu ihrer Normale aus dem Punkte x_1 parallel ist, so dass die fragliche Distanz unendlich gross wird; während der Zähler durch Entwicklung und Ordnung nach den x_i' dieselbe Grösse

$$\{(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) + (X_3 Y_1 - X_1 Y_3) + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\}$$

oder den doppelten Inhalt des Fundamentaldreiecks $2 F$ als gemeinsamen Factor aller Glieder zeigt, so dass derselbe das Product von $2 F$ in das Trinom $\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3'$ ist, dessen Verschwinden anzeigt, dass der Punkt x_1' der Geraden ξ_1 angehört, also die Distanz Null von ihr hat.

Für die Distanz d von zwei Punkten x_1', x_1'' sei nur erwähnt, dass aus (vergl. pag. 145, 147)

$$x = \frac{\beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{23} x_3}{\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \beta_{13} x_3}, \quad y = \frac{\beta_{31} x_1 + \beta_{32} x_2 + \beta_{33} x_3}{\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \beta_{13} x_3}$$

für den Ausdruck von

$$d^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$

zuerst der Werth folgt

$$\left\{ \frac{\beta_{21} x_1' + \beta_{22} x_2' + \beta_{23} x_3'}{\beta_{11} x_1' + \beta_{12} x_2' + \beta_{13} x_3'} - \frac{\beta_{21} x_1'' + \beta_{22} x_2'' + \beta_{23} x_3''}{\beta_{11} x_1'' + \beta_{12} x_2'' + \beta_{13} x_3''} \right\}^2 +$$

$$\left\{ \frac{\beta_{31} x_1' + \beta_{32} x_2' + \beta_{33} x_3'}{\beta_{11} x_1' + \beta_{12} x_2' + \beta_{13} x_3'} - \frac{\beta_{31} x_1'' + \beta_{32} x_2'' + \beta_{33} x_3''}{\beta_{11} x_1'' + \beta_{12} x_2'' + \beta_{13} x_3''} \right\}^2$$

und bemerkt, dass die hier auftretenden Nenner einerlei Werth haben; denn $\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \beta_{13} x_3$ ist in der That, wenn ich den Factor $\frac{\mu}{X}$ d. i. $\frac{\mu}{2F}$ unterdrücke, der allen β_{ik} gemeinsam ist und aus dem Ausdruck verschwindet,

$$2 \{ x_1 \cdot \triangle E A_2 A_3 + x_2 \cdot \triangle E A_3 A_1 + x_3 \cdot \triangle E A_1 A_2 \}$$

$$\text{d. h. } \left\{ \frac{p_1}{e_1} \cdot e_1 s_1 + \frac{p_2}{e_2} \cdot e_2 s_2 + \frac{p_3}{e_3} \cdot e_3 s_3 \right\} \quad \text{oder } 2 F;$$

(dieselbe Grösse ist p. 170 f. die linke Seite in der Relation der Punktcoordinaten oder in der Gleichung der unendlich fernen Geraden) es tritt desshalb im Nenner des Ausdrucks für d^2 das Quadrat der doppelten Fläche des Fundamentaldreiecks auf, wie bekannt. (Vgl. «Analyt. Geom. der Kegelschnitte» 4. Aufl., Art. 66.) Und diess führt zugleich zur Entwicklung der Zähler, da $\beta_{2i} = \beta_{1i} X_i$, $\beta_{3i} = \beta_{1i} Y_i$.

Wenn ich noch erwähne, dass die letzteren Entwicklungen auf die metrische Fundamentalrelation der zweiten Dimension, die Dreieckfläche, übergehen und in wesentlich derselben Weise für den Raum von drei Dimensionen vollzogen werden können — also für die metrischen Grundformeln der ersten Dimension: Winkel zweier Ebenen oder zweier Geraden oder einer Geraden und einer Ebene, Distanz

zweier Punkte und eines Punktes von einer Ebene, etc., ausgehend natürlich von der in Analogie zu p. 172 f. verlaufenden Entwicklung der Relation zwischen den vier Coordinaten einer Ebene und der Gleichung des allen Kugeln gemeinsamen imaginären Kreises im Unendlichen — so glaube ich über die einfachen Zielpunkte dieser Note eingehend genug gehandelt zu haben. Dem für den Uebergang von den Resultaten für eine bestimmte Lage der Einheits-elemente zu denen einer andern Lage derselben ist durch die am Eingange dieser Note (pag. 148) und speciell im Anfang dieses Schlussabschnitts gemachten Bemerkungen vollständig gesorgt; man hat z. B. für den Uebergang von Flächencoordinaten zu Dreiliniencoordinaten nur zu benutzen, dass die Flächencoordinaten m_i vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises durch $m_i (s_1 + s_2 + s_3) = s_i$ bestimmt sind. Dieselben Erörterungen geben auch die Führung zur Vergleichung der hier erhaltenen Resultate mit den in der «Analyt. Geom. d. Kegelschnitte» (4. Aufl. 1878) niedergelegten und dieser untereinander, insoweit sie verschiedenen Coordinatendefinitionen entsprechen.

Ich muss nur noch bemerken, dass es einer höheren Stufe des Unterrichts in der analytischen Geometrie ganz entspricht, die Untersuchung der metrischen Relationen — nur der Euklid'schen Geometrie — erst nach der Feststellung der Hauptsätze aus der Theorie der Curven (Flächen) zweiten Grades vorzunehmen; mit diesen erst (der Theorie der Pole und Polaren oder der harmonischen Trennung und der Discriminante) ist die vollständige Interpretation der metrischen Grundgleichungen in Cartesisch-Plücker'schen Coordinaten erhältlich und sie giebt auch dem hier bezeichneten Wege zu ihrer Uebertragung in allgemeine Coordinaten die sichere Führung und alle geometrischen Mittel zur Abkürzung der Rechnung.

II. Zur projectivischen Verbindung der Gebilde höherer Stufen.

Wenn man durch U_i und V_i homogene Functionen derselben Veränderlichen und von gleichen Graden: m für die U_i und n für die V_i — bezeichnet, während λ_i und μ_i Parameter sind, denen alle Werthe der Zahlenreihe beigelegt werden dürfen, so sind

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_i U_i = 0, \quad \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \dots + \mu_i V_i = 0$$

die Ausdrücke für lineare Gebilde gleicher Stufen. Eine algebraische Relation unter den beiderseitigen Parametern, durch welche für die Annahme von einer Gruppe oder mehreren Gruppen der λ_i eine Gruppe der μ_i linear abhängig gemacht wird, ordnet die Elemente beider Gebilde, oder gewissen Combinationen der Elemente des einen die Elemente des andern, zu und lässt so einfach oder mehrfach unendlich viele Paare von Zugeordneten bilden. Die allgemeine Form derselben, welche ich hier betrachte, ist die lineare, zunächst die bilineare

$$(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots)\mu_1 + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots)\mu_2 + (a_{31}\lambda_1 + \dots)\mu_3 + \text{etc.} = 0$$

oder

$$(a_{11}\mu_1 + a_{21}\mu_2 + \dots)\lambda_1 + (a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + \dots)\lambda_2 + (a_{13}\mu_1 + \dots)\lambda_3 + \text{etc.} = 0.$$

Für Gebilde erster Stufe wird sie

$$(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2)\mu_1 + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2)\mu_2 = 0$$

$$\text{oder} \quad a_{11} + a_{12} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + a_{21} \frac{\mu_2}{\mu_1} + a_{22} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,$$

d. h. sie geht in die elementare Projectivitätsgleichung zwischen den Parametern über; jedem Element des ersten Gebildes ist ein Element des zweiten zugeordnet und werden somit einfach unendlich viele Paare aus den Elementen von

beiden gemacht; durch die Annahme, dass die Fundamental-Elemente U_1, U_2 den gleichnamigen Fundamental-Elementen V_1, V_2 entsprechen, werden $a_{11} = 0, a_{22} = 0$, die Parameter-Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1, \mu_2 : \mu_1$ einander proportional und wenn man den Proportionalitätsfactor implicite der behafteten Function denkt, einander gleich; für Gebilde beliebiger Stufe gibt die Voraussetzung der Gleichheit entsprechender Parameter eine analoge Zuordnung, die man als Collineation derselben bezeichnen kann, wenn man den ursprünglichen Sinn dieses Ausdrucks im Gebiete der Elementargebilde auf die linearen Gebilde aus beliebigen Elementen erweitert.

Für Gebilde zweiter Stufe kann durch die Relation

$$(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3)\mu_1 + (a_{21}\lambda_1 + \dots)\mu_2 + (a_{31}\lambda_1 + \dots)\mu_3 = 0$$

oder (Vgl. «Analyt. Geom. des Raumes» Bd. 2, 2. Aufl. p. 21, Note 7)

$$(a_{11}\mu_1 + \dots)\lambda_1 + (a_{12}\mu_1 + \dots)\lambda_2 + (a_{13}\mu_1 + \dots)\lambda_3 = 0$$

nur aus zwei Werthgruppen der λ_i oder μ_i — etwa $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$; $\lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_3''$ — eine Werthgruppe der μ_i oder λ_i bestimmt werden; und da der Willkürlichkeit der Wahl von zweien der Werthe in jeder Gruppe zweifach unendlich viele Möglichkeiten entsprechen, so gibt es ∞^2 Paare der besagten Art; ebenso für Gebilde dritter Stufe ∞^3 Paare, nämlich von einer Gruppe von drei aus bestimmten Parameterwerthen λ_i oder μ_i hervorgehenden Elementen des Gebildes U oder V und einem der zugehörigen Werthgruppe μ_i respective λ_i entspringenden Element des Gebildes V oder U .

Der Stufe p entspricht die bilineare Relation zwischen den $2p$ Parametern λ_i und μ_i mit p^2 Coëfficienten, und bei nicht verschwindender Determinante dieser Coëfficienten erhält man aus jeder Gruppe von p Werthesystemen der λ oder μ ein Werthesystem der μ respective λ und damit p fach unendlich viele Paare von je einem Elemente des einen Ge-

bildes mit einer bestimmten Gruppe von p Elementen des andern. Wenn insbesondere jedes Element V_h derjenigen Gruppe von Bestimmungselementen U_1, \dots, U_i des ersten Gebildes entspricht, in der U_h nicht vorkommt, so verschwinden alle Coëfficienten der bilinearen Relation, welche ungleiche Indices haben, und sie erhält die einfache Form

$$a_1 \lambda_1 \mu_1 + a_2 \lambda_2 \mu_2 + \dots = 0.$$

Die Gesammtheit der so verbundenen Paare wird offenbar durch Elimination der $\mu_i, \lambda_i', \lambda_i'',$ etc. zwischen den für sie geltenden Gleichungen ausgedrückt, also zwischen

$$\begin{aligned} \lambda_1 U_1 + \dots = 0, \quad \mu_1 V_1 + \dots = 0, \\ (a_{11}\lambda_1' + \dots)\mu_1 + (a_{21}\lambda_1' + \dots)\mu_2 + \dots = 0, \quad (a_{11}\lambda_1'' + \dots)\mu_1 + \\ + (a_{21}\lambda_1'' + \dots)\mu_2 + \dots = 0, \text{ etc.;} \end{aligned}$$

und dieses drückt sich mittelst der Determinante der Substitution aus durch Hinzufügung des Saumes der U_i und der V_i zu derselben oder nach der ersten Zeile entwickelt wie folgt

$$U_1 \begin{vmatrix} V_1, a_{12}, a_{13} \dots \\ V_2, a_{22}, a_{23} \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{vmatrix} + U_2 \begin{vmatrix} a_{11}, V_1, a_{13} \dots \\ a_{21}, V_2, a_{23} \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{vmatrix} + U_3 \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, V_1, a_{14} \dots \\ a_{21}, a_{22}, V_2, a_{24} \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{vmatrix} + \text{etc.} = 0,$$

speciell im Falle der in angegebener Weise vereinfachten Relation als

$$U_1 V_1 a_2 a_3 \dots + a_1 U_2 V_2 a_3 \dots + a_1 a_2 U_3 V_3 a_4 \dots + \text{etc.} = 0.$$

Das Erzeugniss ist algebraisch immer angebar und sein Grad die Summe der Grade der erzeugenden Gebilde oder der diese bestimmenden Elemente.

Für die Geometrie fragt es sich nun, welche dieser Verbindungen einen geometrischen Sinn haben und sich construierend durchführen lassen. Diess beschränkt einerseits die Zahl der Veränderlichen in den Functionen, andererseits die Stufenzahl der Gebilde; jenes unbedingt, so lange es sich um Constructionen im Raum von drei Dimensionen handeln soll, dieses in gewissem Sinne. Die Zahl der

Veränderlichen kann in jener Beschränkung zwei, drei und vier sein für die x_i und ξ_i , dagegen sechs mit einer verbindenden Relation für die p_{ik} , π_{ik} , entsprechend der Reihe nach den Punkten, Strahlen und Ebenen der Elementargebilde erster Stufe, den Punkten und Strahlen oder Strahlen und Ebenen, den Curven und Kegeln in den Elementargebilden zweiter Stufe, den Punkten, Ebenen und Flächen im Raum von drei Dimensionen, endlich den Strahlen und ihren Complexen im selben Raum. Andererseits wird die Stufenzahl der Gebilde durch die Construirbarkeit des Erzeugnisses beschränkt; denn dieselbe ist nur vollständig, wenn jedes Paar der definirten Systeme selbst construirbar ist und ein Element des Erzeugnisses liefert; minder direct wenigstens gewiss, auch unter Voraussetzung des erstern, wenn erst einfach unendlich viele solche Paare ein solches Element oder eine Gruppe von solchen liefern; noch weniger, wenn diess erst zweifach unendlich viele Paare thun, etc.

Die natürlichen Beispiele erläutern diess sofort. Für drei Veränderliche sind Curve und Kegel, im Falle linearer Functionen Strahl, Punkt, Strahl, Ebene die Elemente; zwei derselben liefern in Verbindung Gruppen von Punkten, Strahlen oder Ebenen; zwei von ihnen haben aber mit einem dritten im Allgemeinen nichts gemein, so dass nur unter einfach unendlich vielen Paaren solche sind, die mit dem zugeordneten dritten ein Element gemein haben und also ein Erzeugniss liefern. Wenn ich also auch Gebilde zweiter Stufe in drei Veränderlichen definire, so ist ein Erzeugniss aus zweien doch nur in der Form des Ineinanderliegens, wie man sagen darf, möglich, die soeben erklärt ist. Für zwei Veränderliche ist diess geradezu der einzige Fall; für vier Veränderliche tritt er ein bei der Stufe drei und für die sechs Veränderlichen p_{ik} , π_{ik} bei der Stufe vier — überall mit den-

selben Stufen, mit denen auch zum erstenmal die Bestimmungs-Elemente der Gebilde keine geometrischen Elemente mehr gemein haben.

Im Falle der von vier Veränderlichen x_i, ξ_i giebt die erste Stufe Büschel und Schaaren von Flächen, also Gebilde von einfach unendlicher Mächtigkeit, deren Elemente eine Curve respective Developpable gemein haben, und ein Erzeugniss als Gesamtheit von einfach unendlich vielen Curven oder Developpabeln, also eine Fläche; für die zweite Stufe habe ich zweifach unendlich viele Flächen, welche ein System von Punkten oder Ebenen gemein haben, und zwar im Falle der Collineation drei solche Gebilde, deren entsprechende Elemente auch je eine Gruppe von Punkten oder Ebenen als gemeinsam liefern und durch die ∞^2 Wiederholungen eine Fläche erzeugen wie vorher. Im Falle der bilinearen Relation zwischen nur zwei solchen Gebilden liefern die zwei bestimmten Elemente des ersten, welche gewählten Werthegruppen der einen Parameterreihe entsprechen, zusammen mit dem entsprechenden Elemente des zweiten ebenfalls eine solche Gruppe von Punkten oder Ebenen, nämlich als gemeinsam jenen eine Curve oder Developpable und als gemeinsam dieser mit dem letztern die besagte Gruppe; durch die ∞^2 Wiederholungen also wiederum die Fläche. Mit der dritten Stufe erhalte ich im ersten wie im zweiten Falle ein Erzeugniss nur in der Form des Ineinanderliegens und die bestimmenden Elemente der Gebilde haben auch selbst keine Raumelemente mehr gemein, vier Flächen wie keinen Punkt im Allgemeinen, so auch keine Ebene. Das Ineinanderliegen entsprechender Paare findet unter ∞^3 malen ∞^2 mal statt; nämlich für die Collineation ist ∞^2 mal unter den ∞^3 Combinationen zu drei Elementen aus den drei ersten Gebilden ein Punkt oder eine Ebene der ihnen gemeinsamen

Gruppen auch angehörig der Fläche, welche das entsprechende Element des vierten Gebildes ist; und im Falle der bilinearen Relation, die nun viergliedrig ist in der vorher angewendeten Ausdrucksform, liefern die drei bestimmten Elemente des ersten Gebildes, welche drei Werthegruppen seiner Parameter entsprechen, mit dem entsprechenden des zweiten aus der zugehörigen Werthegruppe seiner Parameter entspringenden, nur in ∞^2 unter den sämtlichen ∞^3 Fällen einen gemeinsamen Punkt oder eine gemeinsame Ebene, nämlich wenn ein Punkt oder eine Ebene von der gemeinsamen Gruppe der drei ersten zugleich dieser letzten angehört.

Insbesondere entstehen bei linearen Functionen der x_i oder ξ_i die Flächen zweiten Grades im Falle der Gebilde erster Stufe als bestehend aus einfach unendlich vielen geraden Reihen oder Ebenenbüscheln; im Falle der Gebilde zweiter Stufe und der bilinearen Relation aus zweifach unendlich vielen Punkten oder Ebenen (man vergleiche besonders die in eine Determinante concentrirte Form ihres Ausdrucks von pag. 182 mit der gewöhnlichen Darstellung) und im Falle der Gebilde dritter Stufe und der bilinearen Relation aus zweifach unendlich vielen Fällen des Ineinanderliegens von Punkt und Ebene unter einer Gesamtheit von dreifach unendlich vielen Paaren; dagegen entsteht bei Gebilden zweiter Stufe im Falle der Collineation wie bekannt die Fläche dritter Ordnung oder Classe, bei denen der dritten im nämlichen Falle durch Ineinanderliegen in ∞^2 unter ∞^3 Fällen eine Fläche vierter Ordnung respective Classe. (Vergl. «Darstell. Geom.» Art. 172. und zugleich für das Folgende «Analyt. Geom. d. Raumes» Bd. I, Art. 241 — 3. Aufl. 1879, deren Revision die Veranlassung zu dieser Mittheilung gab.)

Für lineare Functionen der p_{ik} oder π_{ik} , also lineare Complexe als Bestimmungselemente der Gebilde, geben die

Gebilde erster Stufe Complexe der U durch eine gemeinschaftliche lineare Congruenz und Complexe der V durch eine andere solche Congruenz; die Paare derselben geben einfach unendlich viele lineare Congruenzen, die den erzeugten Complex zweiten Grades zusammen setzen.

Die Gebilde zweiter Stufe liefern Complexe der U respective V über einer gemeinsamen Regelschaar; je zweien des einen Gebildes wird durch die bilineare Relation einer des zweiten zugeordnet und dieser hat mit der jenen gemeinsamen linearen Congruenz eine Regelschaar gemein, so dass der Complex zweiten Grades aus zweifach unendlich vielen Regelschaaren aufgebaut wird.

Im Falle der Gebilde dritter Stufe ist je drei Complexen des einen Gebildes über einem Strahlenpaar ein bestimmter Complex des andern zugeordnet und dieser hat mit der zu jenen gemeinsamen Regelschaar ein Strahlenpaar gemein, so dass der Complex zweiten Grades aus dreifach unendlich vielen Strahlenpaaren gebildet wird.

Mit der vierten Stufe endlich, wo die Complexe desselben Gebildes keine Strahlen-Elemente mehr gemein haben, tritt von den ∞^4 Fällen der Paarung einer Gruppe von vier Complexen des einen Gebildes mit einem des andern in ∞^3 Fällen der Umstand ein, dass ein Strahl des Paares, welches jenen gemeinsam ist, auch dem zugeordneten des andern angehört.

Daraus entspringen die Fragen nach der Möglichkeit und ferner der Art und Weise des Ueberganges von einer dieser Erzeugungen zur andern, Fragen, welche ich bei den Flächen zweiten Grades durch den Gedanken der Projectivitäten mit singulären Elementen beantwortet habe, der seinerseits so naturgemäss der darstellend-geometrischen Quelle der Anschauung der Elementargebilde entsprungen ist. (Vergl. «Darstell. Geom.» Art. 21; e. f.).

Haben die reciproken ebenen Systeme Σ , Σ' je eine singuläre Linie s_1 , s_2' , denen alle Punkte der jedesmaligen andern Ebene entsprechen, während ihren Punkten Strahlenbüschel aus projectivisch zugeordneten Punkten der andern Ebene entsprechen, so wird die entstehende Fläche zweiter Classe berührt von allen durch s_1 und allen durch s_2' gehenden Ebenen, so wie von allen den Ebenen, welche durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte in s_1 und s_2' hindurchgehen, oder die specielle Erzeugung der Regelflächen zweiten Grades durch projectivische Gebilde erster Stufe geht aus der allgemeinen aller reellen Flächen zweiten Grades durch reciproke Gebilde zweiter Stufe hervor. (Vergl. die weitere Ausführung a. a. O. p. 676; u. ferner p. 653, 703). Der bezeichnete Uebergang findet in der That in allen Fällen der bilinearen Relation in ganz ähnlicher Weise statt; doch soll dies hier nicht weiter ausgeführt werden.

Man kann aber zwischen drei Gebilden aus Elementen U_i , V_i , W_i mittelst einer in den drei Reihen von Parametern λ_i , μ_i , ν_i linearen Relation eine Beziehung bilden und ein Erzeugniss von geometrischer Construirbarkeit für den Fall der Gebilde erster Stufe erhalten, wenn vier oder sechs Veränderliche vorausgesetzt werden — während algebraisch sich diess Verfahren auf vier, etc. Gebilde mit Relationen, welche in vier, etc. Reihen von Parametern linear sind, fortsetzen lässt. Man hätte für jene und die erste Stufe

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0, \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 = 0, \nu_1 W_1 + \nu_2 W_2 = 0$$

als die Gleichungen der Gebilde und als die Parameterrelation

$$0 = \{(a_{111} \lambda_1 + a_{112} \lambda_2) \mu_1 + (a_{121} \lambda_1 + a_{122} \lambda_2) \mu_2\} \nu_1 + \\ + \{(a_{211} \lambda_1 + a_{212} \lambda_2) \mu_1 + (a_{221} \lambda_1 + a_{222} \lambda_2) \mu_2\} \nu_2$$

und erhält durch Elimination der Parameter sofort

$$0 = a_{111} U_2 V_2 W_2 + a_{122} U_1 V_1 W_2 + a_{212} U_1 V_2 W_1 + a_{221} U_2 V_1 W_1 - \\ - a_{112} U_1 V_2 W_2 - a_{121} U_2 V_1 W_2 - a_{211} U_2 V_2 W_1 - a_{222} U_1 V_1 W_1$$

als Gleichung des Erzeugnisses; für Ebenenbüschel also eine Fläche dritter Ordnung durch die Scheitelkanten derselben, aus ihren ∞^2 Punkten als Schnitten von zwei beliebigen Ebenen der ersten beiden Büschel mit einer durch sie bestimmten Ebene des dritten; wobei jedoch den unendlich vielen Paaren aus jenen, für welche

$$\frac{(a_{111} \lambda_1 + a_{112} \lambda_2) \mu_1 + (a_{121} \lambda_1 + a_{122} \lambda_2) \mu_2}{(a_{211} \lambda_1 + a_{212} \lambda_2) \mu_1 + (a_{221} \lambda_1 + a_{222} \lambda_2) \mu_2}$$

ein constantes Verhältniss ist und die daher eine hyperboloidische Regelschaar bilden, die nämliche Ebene des dritten Büschels als zugeordnet auftritt, so dass jene den in ihr noch gelegenen Kegelschnitt der Fläche erzeugen; Erzeugung der Fläche dritter Ordnung aus einer linearen Congruenz und einem diesen ihren Regelschaaren projectivisch zugeordneten Ebenenbüschel — zugleich einfachste ebene Abbildung derselben nach Punkten; und analog für höhere Grade. Man erhält im Allgemeinen drei Erzeugungen für eine Fläche höherer Ordnung; z. B. für die Ordnung sechs aus Ebenenbüschel, Flächenbüschel zweiten Grades und Flächenbüschel dritter Ordnung mittelst Congruenzen aus Kegelschnitten und zugeordneten Flächen dritter Ordnung durch Curven der Ordnung neun; sodann mittelst Congruenzen aus ebenen Curven dritter Ordnung und zugeordneten Flächen zweiten Grades durch Curven von der Ordnung acht, endlich mittelst Congruenzen aus Raumcurven sechster Ordnung und zugeordneten Ebenen durch ebene Curven fünfter Ordnung — oder in Zusammenfassung der hier gesonderten Constructionselemente zu einfach unendlichen Gruppen aus zwei Flächenbüscheln dritter Ordnung, Flächenbüschel zweiter und vierter Ordnung, Ebenenbüschel und Flächenbüschel fünfter Ordnung.

Ferner für drei Büschel von Complexen ein Complex

von der Summe ihrer Grade, der die drei fundamentalen Congruenzen derselben enthält und aus ∞^2 Regelschaaren gebildet wird, die zwei beliebigen Complexen des ersten und zweiten mit dem entsprechenden des dritten Büschels gemeinsam sind, aber wiederum in der Weise, dass unendlich viele Paare dort mit demselben Complex hier sich verbinden, um unendlich viele Regelschaaren dem Erzeugniss zu liefern; unendlich viele Congruenzen, welche einem dem constanten Verhältniss entsprechenden Complex correspondiren und selbst einen durch dieses Verhältniss bestimmten Complex zusammensetzen. Man sieht, dass diese Darstellungsweise geeignet ist, die Erzeugung aus dem Zusammentritt complicirter Gebilde in die aus einfacheren stufenweis zu zerlegen.

Es ist offenbar, dass diese verschiedenen Erzeugungen eine Classification der Erzeugnisse begründen. Sie ist bei den Flächen zweiten Grades bekannt, denn sie unterscheidet dieselben der Reihe nach als reelle und nicht reelle Flächen, als allgemeine und als Regelflächen zweiten Grades.

Zu der schon p. 181 gegebenen Verweisung für die bilineare Relation bei den Gebilden zweiter Stufe (Prof. Padova's Abhandl. in Bd. 9 p. 148 von «Battaglini's Giornale») ist noch zu bemerken, dass die Anwendung auf die Complexe zweiten Grades im Sommer 1878 in der 3. Aufl. des ersten Bandes der «Raumgeometrie» (p. 336 f.) entwickelt wurde, der jedoch erst mit der bevorstehenden Vollendung des zweiten Bandes ausgegeben wird; sowie dass die im März 1879 veröffentlichte Berliner Dissertation von Dr. Fr. Schur für die eine der drei gegebenen Erzeugungsweisen der Complexe zweiten Grades, nämlich die aus ∞^2 Regelschaaren, eine ausführliche und lichtvolle synthetische Discussion gegeben hat, von welcher also meine Entwicklung vollständig unabhängig ist.

*III. Das Problem der Kegelquerschnitte in allgemeiner Form
nebst Bemerkungen zum Problem des Apollonius.*

Mit Figuren 7—10.

1. Ebener Querschnitt der Kegelfläche. Wenn eine Kegelfläche durch den Mittelpunkt oder die Spitze M und eine ebene Leitcurve L in der Ebene L und überdiess eine Ebene E gegeben ist, so ist die Entwicklung der Construction der Querschnittscurve E der Letzteren mit dem Kegel das bezeichnete Problem; natürlich die der zweckmässigsten, d. h. der einfachsten und genauesten Construction.

Dieselbe ist für den allgemeinen Fall der Lage und unter Benutzung der allgemeinen Projectionsmethode, also der centralen, zu geben, weil daraus alle speciellen Fälle nach einheitlicher Methode mit erledigt werden. Trotz der Bedeutung des Problems war dasselbe bis auf meine «Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage» nicht erledigt, und weil ich in diesem Buche die Construction in dieser allgemeinen Form nur als Beispiel und sehr kurz, auch mit einer (allerdings absichtlich) unvollständigen Figur behandelt habe (Art. 66, 13, p. 235-236), so will ich hier etwas eingehender davon handeln, um so mehr, als ich damit zugleich für die folgende Mittheilung ein gutes Beispiel erhalte.

Welche die zweckmässigste Construction sei, ergibt sich leicht aus der Natur der Sache; denn der Zusammenhang zwischen Leitcurve und Querschnittscurve ist durch die centrische Collineation gegeben, für den Mittelpunkt M als Centrum und die Schnittlinie der Leitcurven- und Querschnitts-Ebene als Axe s der Collineation, so wie für die Schnittlinien dieser beiden Ebenen L und E mit den durch M gehenden Parallelebenen der jedesmaligen anderen (sie mögen

E^* und L^* heissen), also für die zu s parallelen Geraden LE^* und EL^* als Gegenaxen r in der Leitcurvenebene und q in der Querschnittebene respective (a. a. O. Art. 65). Einer geraden Linie g der Schnittebene E , welche s in S und q in Q schneidet, entspricht als mit ihr in derselben Ebene aus M liegend eine Gerade h der Leitcurvenebene L , welche durch S geht, zu MQ parallel ist und r in R schneidet, so dass MR parallel QS ist; womit auch die Construction von g aus h ebenso gewiesen ist: g parallel MR durch S . (Fig. 7) Dieser Zusammenhang im Raum wird durch Projection aus einem Centrum C auf eine Ebene mittelst geradliniger Strahlen immer in centrische Collineation ebener Systeme verwandelt, und man hat diese Letztere im Bilde zu bestimmen, um die geforderten Theile derselben schnell und sicher erhalten zu können. Ist das Projectionscentrum unendlich fern — also für die Darstellungen der Géométrie descriptive und der Axonometrie — so sind die Projectionen von q , s , r und der durch M gehenden Parallelen t derselben, der vierten Kante des parallelepipedischen Mantels aus den Paaren paralleler Ebenen E , E^* und L , L^* , vier parallele Gerade q' , s' , r' , t' mit der gleichen Streifenbreite zwischen r' , s' , und t' , q' und zwischen q' , s' und t' , r' , und mit der gleichen Mittellinie zwischen s' , t' und q' , r' ; und die Projection $Q'S'R'M'$ des Parallelogramms $QSRM$ ist wieder ein Parallelogramm. Die Construction vollzieht sich also unverändert wie im Raum in der Projection. Wie den in r gelegenen Punkten der Leitcurve L und ihren Tangenten die unendlich fernen Punkte der Querschnittscurve E und ihre Asymptoten entsprechen, so entspringen auch direct aus den Projectionen von jenen die Projectionen von diesen mittelst der gleichen Relationen von Schnitt und Parallelismus zwischen M' , q' , s' , r' , g' , h' , wie sie zwischen M , q , s , r , g , h selbst bestehen.

Ist aber das Projectionscentrum ein Punkt C in endlicher Entfernung, so sind \mathbf{L} , \mathbf{L}^* und \mathbf{E} , \mathbf{E}^* Ebenenpaare von einerlei Fluchtlinie $q'_{\mathbf{L}\mathbf{L}^*}$ und $q'_{\mathbf{E}\mathbf{E}^*}$ respective und also von parallelen Spuren $s_{\mathbf{L}}$, $s_{\mathbf{L}^*}$ und $s_{\mathbf{E}}$, $s_{\mathbf{E}^*}$ und ihre Durchschnittslinien q , s , r , t erscheinen als vier Gerade von gemeinsamem Fluchtpunkt im Schnitt von $q'_{\mathbf{L}}$ und $q'_{\mathbf{E}}$ und deren Durchstosspunkte natürlich ein Parallelogramm bilden. Ist nun g also g' bekannt, so hat man S in seinem Schnitt mit s' und Q' in dem mit q' ; aber um die Parallele zu g durch M zu ziehen, hat man M' mit dem Fluchtpunkt von g im Schnitt von g' mit der Fluchtlinie $q'_{\mathbf{E}}$ zu verbinden; ihr Schnitt mit r' gibt das Bild von R und $S'R'$ ist das Bild von h . Dann müssen $M'Q'$ und $R'S'$ als Bilder paralleler Linien in den Ebenen \mathbf{L}^* und \mathbf{L} sich in der Fluchtlinie $q'_{\mathbf{L}\mathbf{L}^*}$ dieser Ebenen begegnen und man hat damit auch die Construction von g aus h hergestellt. (Fig. 8^a.)

Noch immer entsprechen den in r gelegenen Punkten der Leitcurve die unendlich fernen Punkte der Querschnittscurve und ihren Tangenten die Asymptoten der Letzteren; aber die Bilder dieser unendlich fernen Punkte der Querschnittscurve liegen in $q'_{\mathbf{E}}$ und daher nicht unendlich fern. Andererseits entsprechen den in q gelegenen Punkten der Querschnittscurve die unendlich fernen Punkte der Leitcurve, deren Bilder sich in $q'_{\mathbf{L}}$ befinden. Ob zwar auch diese, die Bilder der wirklich unendlich fern liegenden Punkte beider Curven und ihrer Asymptoten, nothwendig sind, so sind doch für die Construction noch werthvoller die unendlich fernen Punkte der Bilder beider Curven und ihre Asymptoten. Diese aber hängen von der Lage des Projections-Centrums C respective der durch dasselbe gehenden Parallelen zur Bildebene oder der Verschwindungsebene \mathbf{V} gegen das System ab; denn nur die Bilder der Punkte und Linien der Verschwindungsebene sind unendlich

fern, für andere Parallelebenen zur Bildebene sind es nur die der unendlich fernen Punkte. Die unendlich fernen Punkte im Bilde der Leitcurve sind somit die Bilder ihrer Schnittpunkte mit der Verschwindungsebene und es ist evident, dass diese nur in der Verschwindungslinie v_L ihrer Ebene L liegen können. Und die unendlich fernen Punkte im Bilde der Schnittcurve sind die Bilder ihrer Schnittpunkte mit der Verschwindungsebene oder mit der Verschwindungslinie v_E von E . Man erhält aber die entsprechenden zu diesen Linien in der jedesmal andern Ebene als die Schnitte q_v, r_v der Ebenen von M nach v_L mit E und von M nach v_E mit L ; weil dieselben den Verschwindungspunkt V_s von s enthalten, so sind ihre Bilder mit dem Bilde von s parallel und rücksichtlich der Strecken zwischen Durchstoss- und Fluchtpunkt gleich und von gleichem Sinne. Und da sie den Geraden von unendlich fernen Bildern in der jedesmal andern Ebene entsprechen, so sind sie als die parallelen Gegenaxen der in Betracht kommenden centrischen Collineation zu bezeichnen, gegenüber den oben besprochenen Gegenaxen q und r , deren Bilder convergiren, indess sie selbst parallel sind. Um jene zu construiren — denn die Construction der Letzteren ist oben erledigt — zieht man (Fig. 8^b) durch M eine Gerade nach dem Verschwindungspunkte von s oder E, L und legt durch diese Ebenen, deren Fluchtlinien und Spuren zu denen von E, L respective parallel sind, die sich also mit jenen in der Verschwindungsebene V schneiden; ihre Schnittlinien mit L, E respective sind r_v und q_v .

Mit diesen parallelen Gegenaxen erhält man nun die entsprechenden Geraden h' aus g' , indem man $g' s'$ oder S' und $g' q'_v$ oder Q'_v markirt und durch S' die Parallele h' zu $M' Q'_v$ zieht, welche dann r'_v in R'_v schneidet, so dass auch $M' R'_v$ zu g' parallel ist und somit der Uebergang von h' zu

g' in gleicher Weise nur mit Vertauschung von r_v mit q_v geschieht. (Fig. 8^b.)

Diese parallelen Gegenaxen haben unendlich ferne Bilder; weil sie der Verschwindungsebene angehören, wenn die Kegelspitze M in dieser enthalten ist; d. h. für solche Kegel erscheinen die Bilder aller ebenen Querschnitte als affin unter einander und mit dem Bilde der Leitcurve. Dagegen werden die Bilder der convergenten Gegenaxen q' und r' im Falle des Cylinders oder des unendlich fernen M mit den Fluchtlinien der Ebenen \mathbf{E} und \mathbf{L} identisch; sind seine Erzeugenden der Bildebene parallel, so verschwinden die parallelen Gegenaxen in unendlicher Ferne und die ebenen Schnitte erscheinen als affine Figuren, so wie sie es ja in Wirklichkeit sind.

Je nachdem das Bild der Leitcurve \mathbf{L}' die Bilder der Gegenaxen r' und r'_v *a*) beide schneidet, *b*) beide nicht schneidet, *c*) nur die r' schneidet und *d*) nur die r'_v schneidet, hat *a*) die Schnittcurve \mathbf{E} und ihr Bild \mathbf{E}' reelle unendliche Aeste, haben *b*) \mathbf{E} und \mathbf{E}' gleichzeitig keine reellen unendlichen Aeste; hat *c*) die Querschnittcurve selbst, nicht aber ihr Bild, und *d*) das Bild der Querschnittcurve, nicht aber sie selbst unendliche Aeste und Asymptoten.

Und wenn insbesondere das Bild der Leitcurve \mathbf{L}' *a*) die r' und r'_v berührt, oder *b*) die r' oder *c*) die r'_v berührt, so hat *a*) die Querschnittcurve selbst sowohl als auch ihr Bild ebenso viele parabolische Aeste als solche Berührungsstellen existiren, *b*) die Querschnittcurve selbst aber nicht ihr Bild und *c*) das Bild der Querschnittcurve aber nicht sie selbst parabolische Aeste in der Anzahl der fraglichen Berührungsstellen — und zwar natürlich in allen Fällen in der Richtung des Verbindungsstrahles der Berührungsstelle mit dem Collineationscentrum M' .

Wenn z. B. wie in der Figur 9 das Bild der hyperbolischen

Leitcurve (der Kreis \mathbf{L}') r'_v im Schnittpunkte U'' mit r' berührt, und also r' noch in einem andern Punkte U'_1 schneidet, so hat die Schnitthyperbel E selbst ihre unendlichen Aeste in den Strahlen $M'U''$ und $M'U'_1$, natürlich projicirt in der Fluchtlinie q'_E der Schnittebene; man lernt, dass der Strahl von M' nach dem Schnittpunkt von r' mit r'_v zu s_E , etc., parallel geht, und erkennt leicht, dass ebenso der Schnittpunkt von q' mit q'_v in der durch M' gehenden Parallelen zu s_L etc. gelegen ist — womit die einfachsten Mittel zur Construction der parallelen Gegenaxen gefunden sind, wie ich dieselben bereits a. a. O. («Darstellende Geometrie etc.» unter 13, p. 235 Mitte) angegeben habe. Das Bild dieser Hyperbel ist aber eine Parabel mit der Axenrichtung in der Geraden $M'U''$.

Berührt ferner das Bild der Leitcurve r' sowohl als r'_v und liegen die fraglichen Berührungspunkte in einem Strahl aus dem Collineationscentrum M' , so ist nicht nur die Querschnittscurve \mathbf{E} selbst, sondern auch ihr Bild \mathbf{E}' mit einem parabolischen Aste versehen, und beide liegen in derselben Richtung, d. h. der Strahl vom Centrum M' nach dem Berührungspunkt von \mathbf{E}' mit q'_E hat die Richtung des unendlichen Astes von \mathbf{E}' . Ist insbesondere \mathbf{L}' in diesem Falle parabolisch, so ist es durch den Collineationsstrahl der Berührungspunkte mit r' , r'_v vollständig bestimmt; und dieser Strahl ist zugleich der zu q'_E als Tangente conjugirte Durchmesser für das parabolische Bild der Schnittcurve. Es ist diess also auf einfach unendlich viele Weise möglich. Man findet leicht, dass unter den Leitcurvenbildern zweiten Grades, die den analogen Bedingungen genügen, auch zwei Kreise sind; etc.

Alle speciellen Fälle sind in dieser allgemeinen Construction enthalten. Zunächst im Falle der Centralprojection für den Parallelismus der Leitcurveebene mit der Schnitt-

ebene, wo die Gegenaxen q' und r' mit der Fluchtlinie der Schnittebene und der Leitcurvenebene respective zusammenfallen und auch die Collineationsaxe s' die gemeinschaftliche Fluchtlinie dieser Ebenen ist, indess q'_v und r'_v sich wie vorher ergeben *), nur speciell als Schnittlinien von Ebenen mit parallelen Spuren und Fluchtlinien. Durch sie wird die Construction in gleicher Einfachheit vollzogen; es ist die Construction der Bilder von ähnlichen Figuren in Centralprojection. Sind beide Ebenen der Tafel parallel, so vereinigen sich alle Gegenaxen in ihrer unendlich fernen Geraden und die Bilder der Curven **L** und **E** sind ähnlich und ähnlich gelegen für M' als Centrum, etc. Sodann zweitens für die Lage der Schnittebene oder der Leitcurvenebene in der Bildebene mit dem Ergebniss, dass beide Systeme von Gegenaxen parallel werden, und dass im ersteren Falle die beiderlei Gegenaxen r' , r'_v des Leitcurvensystems zusammenfallen, während diess in letzterem Falle ebenso mit den Gegenaxen q' , q'_v des Schnittecurvensystems geschieht. Im letztern Falle kann man auch die wahre Gestalt der Querschnittcurve direct d. h. ohne vorherige Darstellung ihrer Projection construiren, indem man die Umklappung (M) der Kegelspitze M mit der Ebene **E*** in die Tafel unter Beibehaltung von s und q' als Centrum der Collineation benutzt. (Vergl. «Darstell. Geom.» Art. 67.) Ferner in den Fällen der Parallelprojection mit zahlreicheren Specialitäten, gemäss der Verbindung von zwei oder eigentlich drei und im Falle der Axonometrie, wenn

*) Wenn dabei der Unterschied von convergenten und parallelen Gegenaxen verschwindet, so ist darum der Gegensatz beider nicht aufgehoben; das zweite Kennzeichen der parallelen Gegenaxen, das der symmetrischen Lage gegen das Bild des Collineationscentrums und der Collineationsaxe, besteht für q'_v und r'_v fort, ohne für q' und r' auch aufzutreten.

man will, vier Projectionen miteinander. Gemeinsam ist allen Fällen der Parallelprojection, dass die Unterscheidung zwischen parallelen und convergenten Gegenaxen wegfällt, oder diese mit jenen identisch werden. Die Einzelfälle — die Ebenen E und L parallel; eine derselben als eine der Projectionsebenen, wobei die Umklappung wieder direct zur Ableitung der wahren Gestalt der Querschnittscurve führt, wenn L eine Projectionsebene ist; beide als verschiedene Projectionsebenen; im Falle der Axonometrie besonders als Bildebene oder als eine der Coordinatenebenen — sind bekannt (vergl. «Darstell. Geom.» a. a. O.) und zu einfach, um hier besprochen zu werden. Wiederum erhält man für L als Bildebene direct die wahre Gestalt der Querschnittscurve E , indem man unter Beibehaltung von s oder $E L$ und r oder $L E^*$ die Umlegung (M) von M mit E^* in die Bildebene als Centrum der Collocation benutzt; diese Umlegung von M wird vermittelt durch die Umlegung von einer der Spuren von E^* , welche man aus der betreffenden Coordinatenebene erhält. (Vgl. a. a. O. Art. 47, Fig. 90 mit der Behandlung der Axonometrie in Art. 60.)

2) Zum Problem des Apollonius. Dass die Unterscheidung und Bestimmung der Bilder der unendlichen Aeste und der unendlichen Aeste des Bildes für die Durchdringungscurve von zwei Kegelflächen in einer ganz analogen Weise geschehen kann, habe ich in Art. 79 der «Darstell. Geom.» unter 8) angegeben. Wenn M_1 und M_2 die Mittelpunkte und S_1, S_2 die als vortheilhafteste ebene Leitcurven dienenden Spuren der Kegel in der Bildebene sind — erstere in der Darstellung gegeben durch ihre Bilder auf je einer durch Durchstoss- und Fluchtpunkt bestimmten Geraden — so werden die Bilder der unendlichen Aeste der Durchdringung als die Bilder der Schnittpunkte paralleler Erzeugenden der

Kegel erhalten, d. h. durch diejenigen Ebenen des Büschels um die Gerade $M_1 M_2$, welche die gemeinsamen Erzeugenden des Kegels $M_1 S_1$ mit dem parallel sich selbst an den Scheitel M_1 verschobenen Kegel $M_2 S_2$ den ich $M_1 S_2^*$ nennen will, enthalten; die Spurecurve S_2^* des Letzteren aber ist zur Spur S_2 ähnlich und ähnlich gelegen für den Durchstosspunkt S der Geraden $M_1 M_2$ als Aehnlichkeitspunkt und für das Verhältniss seiner Abstände von den Spitzen M_1 und M_2 als Aehnlichkeitsverhältniss. Die Schnittlinien der Tangentialebenen der Kegel in den parallelen Erzeugenden sind die Asymptoten der Durchdringung.

Um dagegen die unendlichen Aeste und Asymptoten des Bildes der Durchdringung zu bestimmen, denke ich den Kegel $M_1 S_v$ vom Scheitel M_1 nach der Schnittcurve V_2 des Kegels $M_2 S_2$ mit der Verschwindungsebene und die Ebenen des Büschels $M_1 M_2$, welche die ihm und dem Kegel $M_1 S_1$ gemeinschaftlichen Erzeugenden enthalten; die Erzeugenden, welche diese aus $M_1 S_1$ und $M_2 S_2$ herauschneiden, erscheinen parallel, weil sie denselben Verschwindungspunkt besitzen, und die zu ihnen gehörigen Tangentialebenen der beiden Kegel schneiden sich in den Tangenten der Durchdringung, die als Asymptoten des Bildes erscheinen. Die Spurecurve S_v von $M_1 V_2$ ist zu S_2 ähnlich und ähnlich gelegen für den Durchstosspunkt S von $M_1 M_2$ als Aehnlichkeitspunkt und das Verhältniss seiner Abstände von den Projectionen M'_1 und M'_2 der Spitzen als Verjüngungsverhältniss.

Ich habe die Durchdringungen der Kegel zweiten Grades in der «Darstell. Geometrie» (Vergl. Art. 80, 81, 85, 86) eingehend untersucht und keinen der Hauptfälle übergangen. Es ist ersichtlich, dass in Bezug auf die unendlichen Aeste des Bildes eine solche Durchdringung alle die Fälle darbieten kann, welche in Bezug auf die wirklichen unendlichen Aeste

möglich sind; denn dieselben entspringen in beiden Fällen aus derselben Quelle, aus der Lagenbeziehung einer Ebene zur Curve, dort der Verschwindungsebene, hier der unendlich fernen Ebene. Im Allgemeinen sind daher auch alle Combinationen der beiderlei Vorkommnisse möglich. Zahl und Art derselben ist verschieden, je nachdem im Falle der Kegel zweiten Grades die Durchdringung eine eigentliche Curve vierter Ordnung, ohne oder mit Doppelpunkt oder stationärem Punkt, oder eine Curve dritter Ordnung mit einer zweifach schneidenden Geraden, oder ein Paar von Kegelschnitten mit zwei gemeinsamen Punkten oder ein Kegelschnitt mit einer ihn schneidenden doppelt zählenden Geraden ist. Nach dem Gesagten sind die constructiven Dispositionen für alle Fälle unschwer zu geben. Hier will ich in möglichster Kürze erläutern, wie eine gewisse specielle Form des Problems, welche eine Verbindung zweier Hauptfälle betrifft, zur Gergonne'schen Lösung des Apollonischen Problems führt. Die Durchdringungscurve kann in zwei Kegelschnitte zerfallen oder in einen Kegelschnitt und eine Gerade, längs welcher dann die Kegel einander berühren; parallele Kegel zweiten Grades, d. h. solche, welche denselben unendlich fernen Kegelschnitt enthalten, in Centralprojection also dieselbe Fluchtlinie haben, durchdringen sich ausserdem in einem Kegelschnitt im endlichen Raume, dessen Ebene durch die gemeinsame Sekante (gleichviel ob reelle oder ideale) ihrer Spurkegelschnitte hindurchgeht oder dieselbe zur Spur hat, während ihre Fluchtlinie die Verbindungslinie der Fluchtpunkte der in den äussersten oder berührenden Hilfsebenen liegenden paarweise parallelen Erzeugenden oder besser — denn diese Hilfsebenen sind nicht immer reell — die Polare vom Fluchtpunkt der Scheitelkante $M_1 M_2$ des Hilfsebenenbüschels in Bezug auf den gemeinsamen Fluchtkegelschnitt ist. Und

wenn zwei Kegel zweiten Grades sich längs einer Erzeugenden berühren, so hat die Ebene ihres Durchdringungskegelschnitts die gemeinsame Sekante ihrer Spurcurven, welche deren Berührungspunkt nicht enthält, zur Spur und diejenige ihrer Fluchtcurven zur Fluchtlinie. Das Apollonische Problem kann nun in folgender Form gestellt werden: Es sind drei parallele Kegel zweiten Grades gegeben, ihre Spurcurven also weil zum nämlichen Fluchtkegelschnitt ähnlich und ähnlich gelegen unter einander ähnlich und in ähnlicher Lage; man verlangt die Bestimmung eines vierten Kegels vom zweiten Grade, der jeden derselben längs einer geraden Erzeugenden berührt und dessen Spurkegelschnitt zu den ihrigen gleichfalls ähnlich und ähnlich gelegen ist. Denn mit der Annahme, dass die Spitze des einen der drei gegebenen Kegel das Projectionscentrum sei, fallen Flucht- und Spurkegelschnitt dieses Kegels zusammen und die Spuren der beiden andern sind zu ihm ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte; die Spitze des gesuchten Kegels, da sie nur einer der gemeinsamen Punkte der drei gegebenen Kegel sein kann, muss ihr Bild auf diesem Flucht- und Spurkegelschnitt haben und nach der geforderten Berührung der Kegel längs einer Erzeugenden, weil diese eine projicirende Linie ist, zugleich im Berührungspunkt desselben mit dem Spurkegelschnitt des verlangten Kegels. Die Lösung des Problems kommt also planimetrisch darauf hinaus, zu drei ähnlichen Kegelschnitten in ähnlicher Lage einen sie berührenden vierten zu ihnen ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitt zu construiren mittelst Angabe der Berührungspunkte, welche er mit ihnen hat; d. h. auf das erweiterte Apollonische Problem in der Gergonne'schen Lösung. (Man vergl. auch

Salmon-Fiedler, «Analyt. Geom. d. Kegelschnitte» Art. 359, 1 mit Art. 148—151 und Art. 384 für die Ausdehnung dieser Construction auf den Fall der Doppelberührung aller Kegelschnitte des Problems mit einem gegebenen festen Kegelschnitt.)

Die bekannte Construction — ich gebe sie in Fig. 10 für Kreise, weil diese bequeme Specialität nichts Wesentliches ändert — rechtfertigt sich dann wie folgt. Die Kreise S_1, S_2, S_3 sind die Spurcurven von drei parallelen Kegeln zweiten Grades, deren einer z. B. S_1 als projicirender Kegel gedacht wird, so dass S_1 zugleich die gemeinschaftliche Fluchtcurve Q'_1, Q'_2, Q'_3 der Kegel darstellt. Die Bilder M'_2 und M'_3 der Spitzen der beiden andern Kegel sind je einer der Aehnlichkeitspunkte zwischen den Kreisen S_1 und S_2 , respective S_1 und S_3 . Die Durchdringungcurve des Kegels S_1 mit dem Kegel S_2 liegt in einer Ebene, welche die Radicalaxe, Potenzlinie oder gemeinsame Sekante der endlich entfernten Schnittpunkte s_{12} von S_1 und S_2 zur Spur und die Polare des Aehnlichkeitspunktes M'_2 in Bezug auf $Q'_1 S_1$ zur Fluchtlinie q'_{12} hat; die Durchdringungcurve der Kegel S_1 und S_3 ebenso in einer Ebene mit der Potenzlinie von S_1 und S_3 als Spur s_{13} und der Polare des Aehnlichkeitspunktes M'_3 in Bezug auf $Q'_1 S_1$ als Fluchtlinie q'_{13} ; die gemeinsamen Punkte aller drei Kegel also in der Schnittlinie beider Ebenen oder in der Verbindungslinie des Potenzpunktes O der drei Kreise mit dem Schnittpunkt der Polaren der Aehnlichkeitspunkte M'_2, M'_3 oder dem Pol P_1 der Aehnlichkeitsaxe $M'_2 M'_3$ in Bezug auf den Kreis S_1 , und zwar projicirt in den Schnittpunkten dieser Geraden mit dem Kreise S_1 selbst. Die Verbindungslinien von O mit den Polen P_2 und P_3 derselben Aehnlichkeitsaxe $M'_1 M'_2$ in den Kreisen S_2 und S_3 geben in ihren Schnitten mit diesen Kreisen die Berührungspunkte derselben mit dem

nämlichen Paar Apollonischer Kreise K, K' , weil die Rolle der gemeinsamen Fluchtlinie der drei Kegel jedem der drei Kreise zugetheilt werden kann; etc.

In Bezug auf den systematischen Werth dieser Herleitung kann nur die Frage aufgeworfen werden, ob die bei der Construction zur Verwendung kommenden Eigenschaften der Gruppe von drei ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten, Aehnlichkeitscentra und Axen, Potenzlinien und Potenzpunkt betreffend, den Mitteln der darstellenden Geometrie zugänglich sind. Vom Gesichtspunkte meiner darstellenden Geometrie aus ist diese Frage zu bejahen und die nähere Ausführung schliesst sich sehr einfach an Art. 27 meines Buches an. Ich will sie skizziren. Nach dem dort Gegebenen, welches in § 162 a. a. O. seine allgemeinste Ausführung findet (— die auch den Fall der nicht reellen Kegelschnitte umfasst und die daher hier nicht erforderlich ist), haben zwei beliebige Kegelschnitte in derselben Ebene sechs Centra der Collineation in den Durchschnittspunkten T_{ik} der vier gemeinsamen Tangenten und sechs Axen der Collineation in den Verbindungslinien s_{ik} der vier gemeinsamen Punkte. Jedem dieser Centra entsprechen zwei der letzteren Geraden als zugehörige Collineationsaxen, nämlich den Centren auf einer Seite des gemeinsamen Tripels beider Kegelschnitte in gleicher Weise jede der beiden durch die Gegenecke derselben gehenden Axen, z. B. zu T_{1x}, T_{2x} in gleicher Weise s_{1x}, s_{2x} . Von diesen Centren und Axen sind mindestens je zwei reell und die centrische Collineation der zwei Kegelschnitte findet daher auf viererlei oder auf zwölferlei Art reell statt. Wenn insbesondere die Kegelschnitte ähnlich und ähnlich gelegen sind, so fallen zwei ihrer Schnittpunkte in die unendlich ferne Gerade und diese als die verbindende Sehne liefert als Axe der Collineation speciell Aehnlichkeit

in ähnlicher Lage für die beiden zugehörigen T_{ik} als Aehnlichkeitspunkte; dagegen ist die Verbindungslinie der beiden im Endlichen liegenden gemeinsamen Punkte für dieselben T_{ik} als Centra die Axe der beiden Collineationen. Im Falle ähnlicher ähnlich gelegener Hyperbeln mit zwei reellen Schnittpunkten im Endlichen sind alle übrigen Collineationen gleichfalls reell; im Falle der Kreise nicht. Wenn die Centra sämtlich reell sind, so sind es in diesem Falle die vier übrigen Axen nicht und den reellen Punkten und Tangenten des einen Kreises entsprechen für eines der Centra und jede der zugehörigen nicht reellen Collineationsaxen die imaginären Punkte und Tangenten des andern Kreises; die nicht reellen Axen gehen von den in der Centrallinie gelegenen endlich entfernten Ecken des Tripels X, Y nach den Kreispunkten der Ebene; ebenso dann, wenn keine reellen gemeinsamen Elemente existiren, wo auch die nicht reellen Centra in den Seiten x, y des Tripels liegen. Wenn nur zwei der gemeinsamen Tangenten und damit auch die zwei endlich entfernten Schnittpunkte reell sind, so gehen die imaginären Collineationsaxen von den reellen Schnittpunkten nach den Kreispunkten der Ebene und die zugehörigen Collineationscentra sind selbst imaginär, den imaginären Elementen des einen Kreis entsprechen die des andern. Die Construction der reellen Centra ergiebt sich aus ihrer gleichzeitigen Eigenschaft als Aehnlichkeitscentra mittelst paralleler Radien und damit erhält man auch die reelle Axe.

Die Eigenschaft der Collineationsaxe als Ort der Punkte gleicher Tangenten und damit die Existenz des Radicalcentrums oder Potenzpunktes bei drei Kreisen folgt ebenfalls elementar — das Dreieck aus zwei solchen Tangenten und dem Aehnlichkeitsstrahl ihrer Berührungspunkte hat an diesem gleiche Winkel und jene sind daher seine gleich langen Seiten.

Dass endlich die Aehnlichkeitspunkte von drei Kreisen (oder ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten) viermal zu dreien in einer Geraden liegen, folgt sofort aus der Bemerkung, dass sie die Collineationscentra für die unendlich ferne Gerade als Axe sind; denn die Natur der centrischen Collineation ebener Systeme liefert unmittelbar anschaulich den Satz: Wenn drei ebene Systeme in Paaren centrisch collinear sind mit derselben Geraden als Axe, so liegen ihre drei Collineationscentra in einer Geraden — wie auch den dualistisch entsprechenden. (Vgl. «Darstell. Geometrie» Art. 45.)

Was man sonst noch beim Apollonischen Problem zu erwähnen pflegt, wie dass die vier Paare Apollonischer Kreise für das Radicalcentrum und je eine der Aehnlichkeitsaxen centrisch collinear sind, etc. ergibt sich ohne Ausnahme aus dem hier Begründeten und die darstellend geometrische Behandlung ist daher auch als eine in sich consequente zu bezeichnen.

Es bleibt einzig die Frage übrig, wie man zu der auf p. 200 oben formulirten Fassung für das Apollonische Problem gelangen kann, welche doch auch von der Wahrheit aus, dass zwei ähnliche und ähnlich gelegene Curven der Bildebene stets als Spur und Fluchtlinie eines Kegels mit dem Aehnlichkeitspunkt als Bild der Spitze angesehen werden können, immer mehr nur als ein glücklicher Einfall erscheinen wird. Ich werde im folgenden Abschnitt einen Gedanken entwickeln, der mit Nothwendigkeit zu ihr hinführt, und der zugleich ebenso anwendbar ist auf eine grosse Reihe anderer allbekanntere und wichtiger Probleme über Kreise und Kreisysteme. (Vgl. p. 221 f.)

IV. Neue elementare Projectionsmethoden?

Mit Figuren 11—20.

Wenn man als elementare Projectionsmethoden diejenigen bezeichnet, welche mittelst geradliniger Strahlen aus einem Punkte die Bestimmung der Raumgestalten durch Bilder in einer Ebene erzielen, im Unterschied von denen, bei welchen die geradlinigen projicirenden Strahlen durch zwei feste Leitcurven oder ähnliche Bedingungen bestimmt werden, so erhebt sich naturgemäss die Frage, ob die Centralprojection in der gewöhnlichen Form und die orthogonale Parallelprojection in der Form der «*Géométrie descriptive*» die einzigen elementaren Projectionsmethoden sind?

Zu ihrer Beantwortung ist auszugehen von dem Wesentlichen in der Bestimmungsweise der Centralprojection; denn damit wird erkennbar, ob diess noch in anderer als der bei ihr verwendeten Form zu realisiren ist. Als dieses Wesentliche habe ich die Verbindung der Projectionsdata (Centrum und Bildebene) mit der perspectivischen Raumansicht bezeichnet, d. h. mit den Erklärungen und Vorstellungen über das Unendlichferne des Raumes als einer Ebene, welche jeder geraden Linie einen einzigen unendlich fernen Punkt oder eine Richtung und jeder Ebene eine einzige unendlich ferne Gerade oder eine Stellung zuerkennt. Die Bestimmungsweise der geraden Linien und Ebenen in der Centralprojection beruht auf dem hieraus entspringenden Umstande, dass ein Punkt respective eine Gerade der Bildebene nicht blos sich selbst in dem nach ihm gehenden projicirenden Strahl respective der nach ihr gehenden projicirenden Ebene, sondern auch die Richtung dieses Strahls respective die Stellung dieser Ebene eindeutig bestimmt, d. h. in der Centralprojection

werden die Raumelemente durch das feste Centrum und durch zwei feste Ebenen, die Bildebene und die unendlich ferne Ebene, bestimmt; zuerst die geraden Linien des Raumes und durch sie alle Punkte und Ebenen desselben.

Es ist ersichtlich, dass hieraus die Frage nach einer Centralprojection entspringt, bei welcher neben der Bildebene an Stelle der unendlich fernen irgend eine andere Ebene des Raumes benutzt wird, welche jene in einer gegebenen Geraden und unter einem bekannten Winkel durchschneidet. Ihre nähere Erörterung kann Manchem schon desshalb von Vortheil zu sein scheinen, weil Festsetzungen über das Unendlichferne dabei zunächst erspart werden könnten; ich werde mir indess eine solche schliesslich unnütze Beschränkung von vorn herein nicht auferlegen.

Die fragliche Projection ist übrigens sehr einfach. Die Bildebene \mathbf{S} werde in der Geraden*) u (Fig. 11) von der zweiten festen Ebene \mathbf{U} unter dem Winkel ω geschnitten, das Projectionscentrum C sei wie sonst in der Centralprojection durch den Distanzkreis (Fig. 11) in seiner Lage gegen die Bildebene bestimmt. Dann bestimmt jeder Punkt und jede Gerade der Letzteren einen projicirenden Strahl, respective eine projicirende Ebene. Jede andere Gerade g oder Ebene \mathbf{E} ist bestimmt durch die beiden Punkte S und U , respective Geraden s und u , welche sie mit der Bildebene \mathbf{S} und mit der Ebene \mathbf{U} gemein hat und von diesen fallen S und s mit ihren Bildern zusammen und sind U und u durch ihre Bilder U' und u' , d. h. die Schnitte der Bildebene mit dem projicirenden Strahl von U , respective mit der projicirenden Ebene von u bestimmt. Die Gerade SU' ist das Bild g' der Geraden SU , d. h. sie enthält die Bilder aller ihrer Punkte; zwei gerade Linien

*) Die Buchstaben u , q' , \mathfrak{C} des Textes entsprechen denselben Buchstaben der deutschen Schreibschrift der Fig. 11—18.

s, u' , welche sich auf u begegnen — weil Bildebene, Originalebene und Ebene U sich in einem Punkte treffen — bestimmen die Ebene E ; für projicirende Strahlen und Ebenen decken sich S und U' , respective s, u' . Die S, U' aller Geraden einer Ebene liegen in ihrer s respective u' .

Die Punkte U wie die Geraden u sind durch ihre Bilder U', u' allein bestimmt; die Bilder aller zu einander parallelen Geraden u_i gehen durch den Durchstosspunkt Q_i' ihres Parallelstrahls aus dem Centrum C — natürlich nicht minder die Bilder aller einander parallelen Geraden — und die Durchstosspunkte dieser Parallelstrahlen der u_i erfüllen die zu u parallele Gerade q' , welche die Spur der Parallelebene zu U durch das Centrum ist (Fig. 11). Weil parallele Ebenen sowohl parallele u als parallele s haben, so gehen ihre u' durch einen bestimmten Punkt Q' der Geraden q' , während ihre s durch die Schnittpunkte derselben mit u einander parallel laufen. Offenbar ersetzt die Angabe der Geraden q' zugleich den Winkel ω , denn er ist in einem rechtwinkligen Dreieck der Distanz gleichen Kathete gegenüber gelegen, welches den Abstand des Hauptpunktes C_1 von q' zur andern Kathete hat.

Die zur Bildebene parallelen Ebenen und Geraden sind durch ihre zu u parallelen u und u' , respective ihre U' und ihre Bilder g' bestimmt, die zugehörigen s , respective S sind unendlich fern; die Bilder der in ihnen gelegenen Figuren respective Segmente, sind zu ihren Originalen ähnlich für das Verhältniss der Distanz zum Abstand der Ebene oder Linie vom Centrum als Aehnlichkeitsverhältniss.

Die Bilder aller Punkte und Geraden, welche in der Parallelebene durch das Centrum zur Bildebene liegen, sind unendlich entfernt; solche Punkte, respective Gerade werden durch die Darstellung von Geraden, respective Ebenen bestimmt, die sie enthalten, man darf sagen als ihre Verschwindungspunkte und Verschwindungslinien und kann auch die

bezeichnete Parallelebene wie in der Perspective und gewöhnlichen Centralprojection die Verschwindungsebene V nennen.

Für Ebenen durch die Gerade u fallen s und u' in u zusammen und für gerade Linien, welche in solchen liegen, daher auch S und U' in einem Punkte von u ; sie sind durch ihre Bilder allein nicht bestimmt, aber ein zugehöriger Punkt, der durch sein Bild und in einer Geraden von anderer Lage bestimmt ist, vollendet die Bestimmung. Diess genügt auch für die der projecirenden Ebene von u angehörigen Elemente.

Die Ebenen des Büschels, welches die Ebene U mit der Verschwindungsebene bestimmt, sind durch ihre zu u parallelen s und die Geraden in solchen Ebenen durch ihre Bilder und ihre S bestimmt; die zugehörigen u' und U' sind unendlich fern.

Parallele Ebenen haben parallele Spuren und ihre u' schneiden einander in dem nämlichen Punkte von q' ; der von diesem Punkte in der Richtung der parallelen Spuren ausgehende Strahl giebt unter den Parallel-Ebenen diejenige, welche projecirend ist. (s_p, u'_p der Fig. 11.)

Wenn von einer Schaar paralleler Geraden eine gegeben ist, so erhält man in ihrem Bilde den Punkt Q' , durch den die Bilder aller andern auch gehen müssen, als Schnitt mit der Spur der parallelen projecirenden zu irgend einer jene Gerade enthaltenden Ebene; denn diese ist für alle solche Strahlen gleichbedeutend.

Mit diesen Erklärungen sind die Elementaraufgaben vom Durchschnitt der Ebenen unter einander und mit geraden Linien zu lösen; der Schnitt der u' und der Schnitt der s im ersten Falle giebt respective das U' und S der Schnittlinie und eine Hilfsebene durch die Gerade führt die zweite Aufgabe auf die erste zurück. Ich erwähne noch das leicht zu lösende Hilfsproblem: Durch einen gegebenen Punkt eine

Gerade zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden dasselbe U oder S hat und verweise auf «Darstell. Geometrie» Art. 8, 1 in Bezug auf die damit erhältliche Bestimmung der Verbindungslinie von zwei Punkten, etc.

Auch die Umlegung der Geraden g oder $S U'$ mit ihrer projicirenden Ebene in die Bildebene wird leicht erhalten; man zieht durch den Schnitt von g' mit u eine Parallele zu der von $g' q'$ nach dem umgelegten Centrum \mathcal{C} gehenden Geraden und erhält auf ihr im Strahl $\mathcal{C} U'$ die Umlegung von U , also mit $S(U)$ die Umlegung (g), in dieser die Umlegung des Verschwindungspunktes auf dem Parallelstrahl zu g' , etc.

Die Parallele durch \mathcal{C} zu (g) giebt auch den Parallelstrahl $\mathcal{C} Q'$ der Geraden in wahrer Länge und damit durch Zusammensetzung desselben als Hypothenuse mit der Distanz als gegenüberliegender Kathete den Neigungswinkel β der Geraden gegen die Bildebene.

Da man hierbei auch die Länge des Parallelstrahls vom Centrum bis zur festen Ebene \mathbf{U} erhält, so bestimmt sich in derselben Weise mittelst des senkrechten Abstandes derselben vom Centrum der Winkel β_u der Geraden gegen die feste Ebene \mathbf{U} .

Durch eine Anwendung der Umlegung der projicirenden Ebene in die Tafel erhält man den Satz: Der Schnittpunkt von zwei Geraden, welche dasselbe Bild haben und deren Bestimmungspunkte S und U' mit einander vertauscht sind — also S_1 und U_2' , S_2 und U_1' derselbe Punkt — liegt in derjenigen Ebene des Büschels von der Scheiteltante u , welche zur Ebene Cu harmonisch conjugirt ist in Bezug auf die Bildebene \mathbf{S} und die fixe Ebene \mathbf{U} ; sein Bild ist der vierte harmonische Punkt zu S , U' und dem Schnittpunkt des Bildes mit u . Woraus dann sofort folgt, dass

diese vierte harmonische Ebene der Ort ist für die Durchschnittslinien aller Ebenenpaare, für die die Geraden s und u' verkehrt auf einander fallen, und dass die Bilder jener Durchschnittslinien harmonisch conjugirt sind zu u in Bezug zu s und u' .

Für eine Normale zur Tafel von gegebenem Bilde n' (durch den Hauptpunkt C_1 gehend) und gegebenem Durchstosspunkt S bestimmt man durch diese Umlegung mit der projicirenden Ebene den Punkt U' und damit auch aus der Spur s einer Normalebene zur Tafel die Gerade u' derselben.

In Erinnerung an die einfache Bestimmung der zu einer gegebenen Ebene $s u'$ parallelen projicirenden Ebene — ihre Spur s_p ist die Parallele zu s durch den Schnitt von u' mit q' — sieht man, dass der Neigungswinkel α der Ebene gegen die Bildebene und der Neigungswinkel α_n derselben gegen die feste Ebene U sofort gefunden werden.

In der Bemerkung, dass die projicirende Parallelebene einer zur Tafel normalen Ebene den Hauptpunkt C_1 enthalten muss, hat man sodann das einfachere Mittel zur Darstellung der Normalebenen zur Tafel ohne Umlegung; ist s die Spur einer solchen, so geht ihr u' nach dem Schnitt von q' mit der zu s durch C_1 gezogenen Parallelen (Fig. 12.); und aus u' erfährt man s als die vom Punkt $u u'$ ausgehende Parallele zur Geraden von C_1 nach $q' u'$. Damit bestimmt sich eine Normale zur Tafel aus gegebenem S oder U' als Schnitt von zwei durch sie gehenden Normalebenen (Fig. 12.) und die Normalebene zur Tafel durch eine Gerade als Ebene durch sie und die Normale zur Tafel aus ihrem S oder U' .

Mit Hilfe der projicirenden Parallelebene lässt sich auch der gemeinsame Punkt der Bilder aller Normalen einer Ebene, d. h. der Durchstosspunkt Q_n' ihres Parallelstrahls bestimmen; mit Hilfe des projicirenden Parallelstrahls einer Geraden die Spur q_n' der projicirenden unter ihren Normal-

ebenen; die Bilder aller andern Normalen gehen durch jenen hindurch; die u' aller anderen Normalebene gehen durch den Punkt, welchen letztere mit q' gemein hat; etc. Die Parallelverlegung aller Winkelgrößen an das Centrum C , das so äusserst nützliche Constructionsprincip der Centralprojection (Vergl. «Darstell. Geom.» Art. 10), ist also auch hier anwendbar.

Ich will nur noch das Problem von der Umlegung der Ebene in die Tafel erläutern, wegen seiner fundamentalen Bedeutung. Man denke sich den aus zwei Paaren paralleler Ebenen: Bildebene und Verschwindungsebene, Ebene U und Parallelebene Cq' derselben gebildeten parallelepipedischen Mantel und seinen Schnitt mit der Originalebene E , ein Parallelogramm mit den Nachbarseiten s und u in der Bild- und Original-Ebene; dazu den ihm congruenten Querschnitt desselben Mantels mit der zu E parallelen projicirenden Ebene von den entsprechenden Seiten s_p und u_p (Fig. 7 kann mit veränderter Bezeichnung hier benutzt werden), so kann zunächst durch Umlegung der Letzteren die wahre Gestalt des besprochenen Parallelogramms ermittelt und dann durch Antragung desselben an die Seite s mit den Ecken in u und q' die Umlegung der Ebene E vollzogen werden. In Fig. 13 ist die einfache Ausführung davon für die Gerade SU' oder g' der Ebene su' enthalten; das Parallelogramm $s_p, (u_p)$ und das zweite $s, (u)$, auf letzterer Seite die Umklappung von U in $\mathcal{C}U'$ und (u) oder (U) und damit $(U)S$ oder (g) . Es liegt nahe, die zugehörigen Elemente der gewöhnlichen Centralprojection einzutragen, $Q', (R)$, welche natürlich Proben auf die Construction liefern; es ist der Einfachheit der Figur wegen unterblieben. Dieselbe zeigt auch den Rückgang von (g) zu g' als ebenso einfach. Es ist endlich klar, dass Bild und Umlegung in centrischer Collineation sind

für \mathcal{C} als Centrum und s als Axe und dass zur Construction derselben statt der unendlich fernen Geraden und einer Gegenaxe ein im Endlichen liegendes Paar entsprechender Geraden u' und (u) verwendet wird; es ist leicht von diesen zu den Gegenaxen überzugehen, indem man g' oder (g) als unendlich fern wählt.

Dass alle projectivischen Relationen zwischen Originalebene und Bild unverändert gültig und wirksam bleiben, liegt in der Natur der Sache als einer Abbildung durch gerade Linien aus einem Punkte auf eine Ebene.

Die Anwendung der Methode auf zusammengesetzte geometrische Formen ergibt sich aus den vorgeführten Elementen wie sonst und bietet keine Schwierigkeit dar; es wäre leicht, das Problem der Kegelquerschnitte in dieselbe zu übertragen.

Alles in Allem, die vorgetragene Methode liefert relativ einfache Constructionen, aber sie wird von der eigentlichen Centralprojection an Kürze und Einfachheit übertroffen, weil diese von vorn herein mit den Grundgedanken der perspectivischen Raumansicht Ernst macht; es ist überflüssig, eine andere Fix-Ebene einzuführen, da die unendlichferne Ebene die von dieser zu leistenden Dienste direct bietet. Obschon auch diess Ergebniss schon die vorigen Erörterungen vielleicht selbst an diesem Orte rechtfertigen kann, so führen dieselben doch noch zu weiteren wie mir scheint positiv nützlichen Consequenzen, nämlich durch die Einführung der Voraussetzung eines unendlich fernen Projectionscentrums. In der gewöhnlichen Centralprojection fällt mit dieser Annahme die Unterscheidbarkeit der Geraden fort, welche in derselben projicirenden Ebene liegen und denselben Durchstosspunkt haben und man kommt zu dem Ergebniss, dass durch eine Parallelpro-

jection die gerade Linie (und damit alles andere) nicht bestimmt werden kann. (Vergl. «Darstell. Geometrie» Art. 43.). Die Ursache davon ist die Lage des Centrums in der unendlich fernen Ebene oder in der zweiten festen Ebene, welche bei der Bestimmung benutzt wird. Wenn in der hier besprochenen Methode das Centrum C in der festen Ebene U liegt, so sind gleichfalls die Strahlen von einerlei Durchstosspunkt in derselben projicirenden Ebene ununterscheidbar; denn obzwar sie verschiedene U besitzen, so fallen doch die Bilder derselben alle in denselben Punkt von u zusammen und durch diese sind jene nicht einzeln bestimmt. Wenn aber als zweite feste Ebene gleichfalls eine Ebene im endlichen Raum benutzt wird, so tritt diese Consequenz mit der Einführung eines unendlich fernen Centrums nicht ein und eine Parallelprojection reicht zur Bestimmung hin.

Ich will im Folgenden kurz die Formen der Orthogonalprojection besprechen, die sich hieraus ergeben. Zuerst sei a) die zweite feste Ebene U unter einem bekannten Winkel ω — ich setze denselben gleich 45° voraus — gegen S geneigt und schneide dieselbe in der Geraden u ; sodann b) sei U zur Bildebene parallel in der bekannten Entfernung e . Es wird statthaft sein, beide Fälle in paralleler gleichzeitiger Entwicklung zu behandeln.

Die Bestimmung einer nicht projicirenden Geraden erfolgt durch Angabe ihres Durchstosspunktes S und ihres U' d. h. des Bildes von ihrem Durchstosspunkt in der Fix-Ebene U ; die Verbindungslinie beider ist ihr Bild SU' oder g' . Die Länge SU und den Winkel USU' oder β erhält man im Falle b) durch Construction des rechtwinkligen Dreiecks aus den Katheten SU' und e ; im Falle a) aus SU' und dem normalen Abstände von U' von der Geraden u .

Eine nicht projicirende Ebene wird im Falle a) durch ihre Spur s und die Orthogonalprojection u' ihrer Schnittlinie u mit der zweiten Fix-Ebene bestimmt, also durch zwei Gerade, welche sich in einem Punkte von u schneiden (Fig. 14); im Falle b) durch zwei parallele Gerade s und u' . Den Winkel α der Ebene \mathbf{E} gegen die Bildebene erhält man in beiden Fällen durch Benutzung eines Punktes U' von u' ; seine Höhe UU' über der Bildebene ist im Falle b) gleich e und im Falle a) gleich dem Abstände seiner Projection U' von der Geraden u und giebt mit dem Abstände der Projection von der Spur das Dreieck $U U' \alpha$ aus seinen Katheten, damit α und die Hypothenuse, durch deren Abtragung in der Normale zur Spur (Fig. 14) die Umklappung des Punktes U in die Bildebene und zugleich die Umklappung der Ebene \mathbf{E} vollständig erhalten wird. Es ist offenbar, dass im Falle a) hierbei zugleich der Winkel der Geraden s und u mit gefunden wird und dass man den Winkel α_n der Ebene \mathbf{E} gegen die zweite feste Ebene \mathbf{U} ebenso einfach durch Benutzung eines Punktes von s (z. B. des Scheitels von α) bestimmt; während im Falle b) die Hypothenuse des Dreiecks mit α die Breite des Streifens zwischen den parallelen Geraden s und u liefert und α_n gleich α ist.

Parallellinien und Parallelebenen zur Bildebene haben im Falle a) S respective s unendlich fern, desgleichen Parallellinien und Parallelebenen zur Ebene \mathbf{U} ihr U' und u' ; sie bleiben durch U' und ihr Bild, u' und andernfalls durch S und ihr Bild respective s bestimmt. Im Falle b) bilden diese Linien und Ebenen den Ausnahmefall der Bestimmung, wo ein Punkt, der durch eine ihn enthaltende Gerade bestimmt ist, und das Bild, respective ein Punkt etc. zur Bestimmung erforderlich ist. Dieser Ausnahmefall tritt bei der Methode a) ein für die durch u gehenden Ebenen und die in ihnen

enthaltenen Geraden. Eine Complication entspringt auch für diese nicht. Parallele Ebenen haben parallele s und parallele u' ; parallele Gerade haben parallele Bilder und die Verbindungslinien ihrer S und ihrer U' begegnen sich auf u .

Für Linien und Ebenen mit vertauschten Bestimmungselementen S, U' , respective s, u' liegen die Schnittpunkte, respective Schnittlinien im Fall a) in der Ebene des Büschels um u , welche zu der nach dem Centrum gehenden zur Bildebene \mathbf{S} normalen Ebene harmonisch conjugirt ist. Wählt man die Projectionsrichtung in der Normalstellung zu u und mit gleicher Abweichung von den Normalen beider festen Ebenen \mathbf{S} und \mathbf{U} , so würde diese vierte harmonische die Halbierungsebene des Winkels der Ebenen \mathbf{S} und \mathbf{U} sein. Indess gingen dann jene Einfachheits-Vorzüge der Methode verloren, durch welche die Orthogonalprojection sich von den schrägen Parallelprojectionen unterscheidet. (Vergl. «Darstellende Geometrie» Art. 43.) Im Falle b) schneiden sich Ebenen und Gerade mit vertauschten Bestimmungselementen in der Parallelebene zur Bildebene, welche die Distanz e halbiert und projiciren sich in der Mitte zwischen jenen. Man sieht, die eigenthümliche Bedeutung der vierten harmonischen Ebene des Büschels um u zu der nach C gehenden in Bezug auf \mathbf{S} und \mathbf{U} ist ein gemeinsamer Characterzug der Gruppe elementarer Projectionsmethoden, die ich hier bespreche. Derselbe fehlt auch nicht in der Methode der «Géométrie descriptive». Ebenen und Gerade, von denen zwei Spuren respective Durchstosspunkte verkehrt zusammenfallen, haben ihren Schnittpunkt respective ihre Schnittlinie in der Halbierungsebene desjenigen Winkels zwischen den entsprechenden Projectionsebenen, um den die eine bei der Vereinigung beider zur Zeichnungsebene gedreht worden ist; die vereinigten Bilder der Schnittlinie bilden

die Affinitätsaxe der Projectionen der in solchen Ebenen gelegenen Figuren. (Vergl. die historischen Notizen meiner «Darstell. Geom.» zu § 53, p. 734.) In der gewöhnlichen Centralprojection und Perspective überträgt sich die Hauptbedeutung der vierten harmonischen zu Cu in Bezug auf S und U auf die von mir zuerst hervorgehobene zweite Parallelebene, den Ort der in der Mitte zwischen S und Q' , s und q' projecirten Punkte der Geraden und Linien der Ebenen. (Vergl. mein Programm von 1860, den Abdruck meiner Dissertation, «Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft» 41 p. 4^{to}; auf p. 39 in einer Vergleichung der Central- und Parallel-Projection habe ich gerade diese für alle Regelflächen überdiess fortbestehende Analogie speciell betont.)

Für Ebenen, welche zur Bildebene normal sind, fallen s und u' zusammen. Da die zur zweiten Fix-Ebene normalen Geraden zu u normale Bilder und ihr S in der doppelten Entfernung ihres U' von u haben, so ergibt sich auch die Darstellung der Normalebene zur Ebene U (Fig. 15). Man würde zu Beiden auch von der vorerwähnten Construction der Winkel α und α_u gelangen. Aber an die Construction des Winkels α knüpft sich die Bestimmung der Normale einer Ebene, zunächst in einem Punkte A ihrer Geraden u ; man erhält aus dem Dreieck mit α sofort den Durchstosspunkt S_n dieser Normale. Alle andern Normalen projecirt man als Parallelen zu dieser und um sie durch gegebene Punkte (P' in g' oder SU') zu führen, bedarf man nur noch der sehr einfachen Lösung des Hilfsproblems: Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche mit einer andern gegebenen Geraden dasselbe S oder U hat. (Ich erwähne als einer zweckmässigen Uebung im Gebrauch derselben die Lösung der Aufgabe: Durch einen Punkt (A' auf SU') die Trans-

versale $S_1 U_1'$ zu zwei gegebenen sich kreuzenden Geraden $S_1 U_1'$, $S_2 U_2'$ zu ziehen.)

Die Normalebene zu einer Geraden haben Spuren s_n normal zum Bilde dieser Geraden, und zur angenommenen Spur bestimmt man mittelst der Umlegung der projicirenden Ebene der Geraden den in dieser gelegenen Punkt U_n' der Normalebene und durch sein Bild das u' derselben (Fig. 16). Man erhält (U_n) im Fusspunkte des Perpendikels auf der Umklappung des u der projicirenden Ebene, das man vom Punkte s_n , g' auf (g) fällt und daraus natürlich U_n' und u_n' . Im Falle b) erhält diess die noch einfachere Gestalt der Fig. 17.

Offenbar ist hierdurch auch die Bestimmung und Benutzung der Winkelgrössen mit einfachen Constructionen gesichert.

Ich denke, dass ich mir weiteres Eingehen in diese sehr einfachen Entwicklungen ersparen darf. Es ist offenbar, dass die Bestimmung wahrer Grössen und die Benutzung metrischer Relationen nicht complicirter ist als in der «*Géométrie descriptive*», während durch den Gebrauch einer einzigen Projection der Aufwand von Linien für die Ausführung irgend welcher Probleme sich in gleicher Weise reducirt, wie beim Gebrauch der Centralprojection. Die Einführung einer zweiten festen Ebene ist hier eben nicht wie im Falle der Centralprojection ein entbehrlicher Ueberfluss, sondern eine die Bestimmung der Raumelemente durch eine Parallelprojection erst sichernde Nothwendigkeit; die Methoden a) und b) sind nicht nur richtig gebildet, sondern auch im Einklang mit dem allgemeinen Grundgesetz der Sparsamkeit in der Anwendung von Hilfsmitteln, welches alle Theorie wie namentlich alle Praxis regieren soll. Ich glaube desshalb diese einfachen Neuerungen der Beachtung der Sachverstän-

digen empfehlen zu dürfen, nachdem ich sie selbst seit Jahren geprüft habe.

Von der Transformation der Grundelemente in den besprochenen Methoden der Projection, welche diesen Entwicklungen noch hinzu zu fügen wäre, sehe ich für diessmal ab; ihre Durchführung nach Analogie der Stellung, welche ich den Transformationen systematisch angewiesen habe («Darstell. Geom.» Art. 12, 13; Art. 57 f.), ist ohne Schwierigkeit.

Schliesslich mag auf Grund des im vorhergehenden Abschnitt III dieser Mittheilungen (vergl. p. 190) darüber Gesagten die Behandlung eine kurze Erörterung finden, welche das Problem der Kegelquerschnitte nach diesen Methoden erfährt.

Ich erinnere, wie diess Problem einen Punkt M , den Kegelmittelpunkt, eine Ebene L und eine darin enthaltene Curve L als Leitcurve und eine Schnittebene E voraussetzt, und das Bild eventuell die wahre Gestalt der in dieser entstehenden Querschnittscurve E des Kegels zu construiren fordert und wie dazu die Collineation der Curven L und E , deren Centrum M , deren Axe s , die Durchschnittlinie von L und E und deren Gegenaxen q und r , die Durchschnittslinien von E und L respective mit den durch M gelegten Parallelebenen L^* und E^* zu L und E dienen.

In Fig. 18 ist die Bestimmung dieser Elemente für die Orthogonalprojection mit einer durch u gehenden zweiten festen Ebene, in Fig. 19 für die mit einer zur Bildebene parallelen Fix-Ebene ausgeführt. Die Leitcurvenebene ist durch s_L, u'_L , die Schnittebene durch s_E, u'_E , der Mittelpunkt M durch sein Bild M' und eine ihn enthaltende Gerade $S_1 U_1'$ gegeben; die Collineationsaxe mit dem Bilde s' ist durch den Schnittpunkt S von s_L mit s_E und U' von u'_L und u'_E bestimmt.

Zur Ermittlung der Parallelebenen L^* und E^* durch M dient am besten die Parallele zu s , welche durch M geht und deren Bild die Parallele durch M' zu s' ist. Zur Bestimmung ihres Durchstosspunktes S^* und ihres Punktes U'^* hat man durch M zuerst eine Gerade gezogen, welche mit s dasselbe U' hat, und ihren Durchstosspunkt S_1^* mittelst der Bemerkung bestimmt, dass die Geraden $U'U_1'$ und $S_1S_1^*$ als u' und s einer Ebene sich auf u begegnen respective in Fig. 19 parallel zu einander sein müssen; nun ist S_1^*S die Spur der M mit s verbindenden Ebene, welche die fragliche Gerade enthält und man erhält in der Geraden von U' nach dem in u gelegenen Punkte von jener (derselbe ist unendlich fern in Fig. 19) das u' dieser Ebene, damit aber S^* und U'^* jener Geraden (der Parallelen durch M zu s). Nun können s_{E^*} , s_{L^*} und u'_{E^*} , u'_{L^*} gezeichnet und die Bilder der Gegenaxen q' und r' gefunden werden. In Fig. 18 ist noch zum Bilde einer Geraden h' auf L das Bild der entsprechenden Geraden g' auf E abgeleitet mittelst des Parallelogramms $M'Q'S'R$.

Man bemerkt, dass die Neigung der Ebene U gegen die Bildebene in Fig. 18 unbestimmt geblieben ist und dass also diese Figur für jede Neigung derselben gültig bleibt. Erst bei einer metrischen Bestimmung müsste über sie entschieden werden.

Endlich enthält Fig. 20 die directe Bestimmung der wahren Gestalt des Querschnittes (E) der Ebene E oder s_E , u'_E mit der Kegelfläche vom Mittelpunkt M auf SU' und von der in der Bildebene gelegenen Leitcurve L . In diesem Falle ist s_E zugleich die Collineationsaxe s ; die Gegenaxe q' ist das Bild der Durchschnittslinie der Ebene E mit der durch M gehenden Parallelebene zur Tafel und man findet daher einen Punkt Q' von ihr, wenn man durch die das Centrum enthaltende Gerade

SU' eine beliebige Ebene legt, als den Schnittpunkt ihrer Schnittlinie mit \mathbf{E} mit der durch M gezogenen Parallelen zur Tafel in ihr. Hieraus, mittelst der Symmetrielage zu M' , s oder als Spur einer zu \mathbf{E} parallelen Ebene durch M (ihr u' ist als u'_x in der Figur markirt) erhält man r , durch Umlegung von M mit dieser letzteren Ebene in die Tafel (M) und ebenso durch Umlegung von q mit der Ebene \mathbf{E} in die Tafel (q). Die Collineation (M), s , r , (q) liefert als entsprechend zu \mathbf{L} die Umklappung der Querschnittscurve (\mathbf{E}) in die Tafel.

Wenn ich die hier besprochenen Darstellungsmethoden in Verbindung mit der Centralprojection und der Methode der «Géométrie descriptive» als elementare Methoden glaube bezeichnen zu dürfen, so ist es wohl am Platze, den Sinn dieser Bezeichnung näher zu bestimmen. Vielleicht hätte ich sie als die der Forderung auf Bildlichkeit entsprechenden bezeichnen können («Darstellende Geometrie» Einleitung, pag. 1), bei deren Erfüllung allein die darstellende Geometrie zugleich die wissenschaftliche Grundlage der Zeichenkunst sein kann; ich wählte den Ausdruck «elementar» in dem Gedanken, dass eben diess, die Bedeutung als Grundlage der zeichnenden Künste, die natürliche und geschichtliche Quelle der darstellenden Geometrie ist und die Hauptgrundlage ihrer Bedeutung bleiben muss. Dazu ist der Anschluss an den Vorgang beim Sehen nöthig, den man in der Benutzung von geraden projicirenden Strahlen aus einem Centrum ausprägt, und es ist für die Ausbildung dieser Methoden wesentlich, zu erkennen, dass die Behandlung der geraden Linie das Fundamentale sein muss — wie ich diess am Schluss meiner Note «Ueber das System in der darstellenden Geometrie» in der «Zeitschrift für Mathematik und Physik», 1863 hervorgehoben habe. Dann müssen, insofern es sich um Ab-

bildung auf eine Ebene handelt, die vierfach unendlich vielen Geraden des Raumes durch die zweifach unendlich vielen Geraden der Bildebene dargestellt werden und es ist nöthig, einer jeden derselben, zur Unterscheidung der zweifach unendlich vielen Geraden in ihrer projicirenden Ebene, welche in ihr projicirt sind, zwei veränderliche Affecte beizulegen — wie diess durch die Hervorhebung zweier durch ihre Bilder allein völlig bestimmter Punkte (in den beiden Fix-Ebenen) in natürlichster Weise geschieht.

Sollte es sich um die Bestimmung der Punkte des Raumes durch ihre Bilder auf einer Ebene handeln, so wäre wohl das Natürlichste, sie durch die Kreise der Ebene darzustellen; nämlich so, dass ein Kreis, wie der Distanzkreis der elementaren Methoden, den Punkt repräsentire, welcher im Abstand des Radius von der Bildebene in der Normale derselben im Mittelpunkt auf einer bestimmten Seite der Ebene sich befindet; man würde diese Seite durch die Beifügung eines Pfeiles in der Peripherie des bestimmten Kreises angeben, indem man den Punkt als auf derjenigen Seite der Bildebene gelegen ansieht, von welcher aus der angegebene Drehungssinn demjenigen des Uhrzeigers entspricht; der Buchstabe des Punktes könnte an die Pfeilspitze geschrieben werden und man hätte so die Punkte der Ebene je mit dem einen veränderlichen Affect ausgestattet, der nöthig ist, um durch sie die dreifach unendlich vielen Punkte des Raumes zu bestimmen.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Abbildung der Punkte des Raumes durch die Kreise auf einer Kugel vollziehen; man kann sie aus der ebenen Abbildung durch die Anwendung der Transformation mittelst reciproker Radian ableiten, etc.

Es ist leicht, die Consequenzen dieser Bestimmungsart

auszuführen; Weniges genügt schon, um zu sehen, wie weit man sich mit ihr von jener practisch natürlichen Forderung der Bildlichkeit entfernt. Eine gerade Punktreihe würde in der Ebene durch die einfach unendlich vielen Kreise dargestellt, welche einen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt und auf derselben Seite desselben den nämlichen Drehungssinn haben; er selbst ist der der Reihe angehörige Nullkreis, der Durchstosspunkt der geraden Linie in der Bildebene. Man sieht wie zwei Punkte durch ihre Kreisbilder das Bild der Reihe in ihrer Verbindungsgeraden bestimmen; sie bestimmen auch den Winkel der Geraden gegen die Bildebene als den an ihrer Centraldistanz anliegenden spitzen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck, welches die algebraische Differenz ihrer Radien (mit Rücksicht auf die Uebereinstimmung oder den Gegensatz des Drehungssinnes der Kreise) zur zweiten Kathete hat*). Ein System concentrischer Kreise ist daher das Bild einer Normale zur Bildebene. Kreise, die sich in einem Punkte berühren, repräsentiren zwei Punkte in einer durch den Berührungspunkt als Durchstosspunkt gehenden 45° Linie, wenn im Falle der einschliessenden Berührung der Sinn derselbe und im Falle der ausschliessenden Berührung der Sinn beider entgegengesetzt ist; sie repräsentiren in den umgekehrten Fällen mit dem Berührungspunkt als Durchstosspunkt je zwei 45° Linien, von denen die eine zur andern in Bezug auf die Bildebene orthogonal symmetrisch ist.

*) Von hier aus gelangt man zu einer Abbildung der Strahlen des Raumes durch die Strahlen-Involutionen der Ebene mit dem bezüglichen Aehnlichkeitspunkt der Kreise der Punkt-Abbildung als Scheitel, wobei die 45° Linien als parabolische und die Normalen als Rechtwinkel-Involutionen, die übrigen Strahlen als elliptische und als hyperbolische Involutionen erscheinen; im letztern Falle dienen die Doppelstrahlen zur Bestimmung, im erstern wird man immer das Rechtwinkelpaar mit benutzen.

Zwei Gerade schneiden sich, wenn die repräsentirenden Kreisreihen den Kreis um den Schnittpunkt ihrer Centrallinien gemeinsam haben; bei parallelen Centrallinien also, wenn sie gleich sind, d. h. wenn der gleiche Abstand des Mittelpunktes vom Durchstosspunkt in beiden denselben Radius liefert. Damit ist, wie man sieht, das Bild der Ebene constituirt; die repräsentirenden Kreise ihrer Punkte haben in Paaren einen Aehnlichkeitspunkt in ihrer Spur oder Durchschnitlinie mit der Bildebene; drei Kreise bestimmen die Ebene, wenn zugleich ihr Sinn bestimmt ist; ohne den Letzteren repräsentiren sie acht Ebenen, welche in Paaren durch die vier Aehnlichkeitsaxen der Kreise als Spuren hindurchgehen und orthogonalsymmetrisch liegen zur Bildebene. Ihre Winkel zur Bildebene werden leicht gefunden; Parallelen zur Bildebene in einer solchen Ebene erscheinen als Reihen gleicher Kreise aus Punkten einer Parallelen zur Spur, etc. Man ist offenbar trotz aller Leichtigkeit der Behandlung von Anschaulichkeit im natürlichen Sinne weit entfernt; der Versuch, die regulären Polyeder respective ihre Eckpunkte also darzustellen, etwa für die Bildebene als Ebene orthogonaler Symmetrie derselben oder parallel einer solchen durch eine Ecke, bestätigt diess des Weiteren, so interessant die Figuren sind, zu denen er führt; man wird daher in der technischen Praxis von dieser Bestimmungsweise kaum Dienste erwarten.

Theoretisch ist dagegen der Gedanke einer Ausbildung werth. Denn die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, der Winkel, unter welchem zwei Kreise sich schneiden, etc. sind durch ihn einfacher Interpretationen fähig; die linearen Gebilde erster und zweiter Stufe aus Kreisen repräsentiren sich sehr einfach, wie ich in Kürze angeben will. Offenbar sind von den drei Bestimmungsgrößen

eines Kreises in der Coordinatenebene xy die Mittelpunkts-
 Coordinaten zugleich die Coordinaten X, Y des dargestellten
 Raumpunktes, während der Radius die Coordinate Z des-
 selben giebt; in Folge dessen repräsentiren die Kreise des
 Büschels

$$x^2 + y^2 - 2 \kappa x = \pm \delta^2$$

die Punkte des Raumes mit

$$Y = 0, \quad Z^2 - X^2 = \pm \delta^2$$

d. h. die Punkte einer gleichseitigen Hyperbel in der
 durch die Centrale des Büschels gehenden Normalebene zur
 Tafel mit den 45° Linien durch den Schnittpunkt von Axe
 und Centrale als Asymptoten und mit der Centrale als
 reell oder als imaginär begrenzter Hauptaxe, je nachdem das
 Büschel reelle Grenzpunkte im Poncelet'schen Sinne oder
 reelle Grundpunkte hat.

Und da die Kreise

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = Z^2 \text{ und } x^2 + y^2 = \pm r^2$$

einander rechtwinklig schneiden, wenn man hat

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \pm r^2,$$

so ist das Rotationshyperboloid der gleichseitigen
 Hyperbel von der Axe Z

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = \pm r^2$$

das räumliche Bild des linearen Gebildes zweiter
 Stufe aus Kreisen oder des Kreisnetzes. Es ist bei
 reellem Orthogonalkreis ein einfaches, bei nicht reellem Or-
 thogonalkreis ein zweifaches Hyperboloid. Jede zur Bildebene
 normale Ebene bestimmt mit demselben eine gleichseitige
 Hyperbel d. h. ein Büschel von Kreisen; im ersten Falle
 unterscheiden sich diese Ebenen in solche, welche den Orthogo-
 nalkreis reell und welche ihn nicht reell schneiden, und in
 solche, welche ihn berühren; die letzteren liefern Kreisreihen
 mit dem bezüglichen Berührungspunkt als gemeinsamen

Aehnlichkeits- und Berührungspunkt, die Bilder der geraden Erzeugenden des Hyperboloids — der Orthogonalkreis erscheint als Ort der Berührungspunkte von Curven des Netzes; im andern Falle ist von diesem durch das Verschwinden der Functionaldeterminante characterisirten Orte nur der lineare Theil, die unendlich ferne Gerade reell, die für jeden ihrer Punkte als Mittelpunkt als Kreis anzusehen ist.

Ich breche hier ab, weil ich nicht nebenher die Geometrie dieser Abbildungsmethode entwickeln kann und das Vorhergesagte zur Anregung genügt; es ist auch leicht erkennbar, dass andere Speculationen mit dem gleichen Ziele sich anschliessen lassen. Immerhin hat die vorher besprochene, auch abgesehen von ihrer Einfachheit und Natürlichkeit, im Zusammenhang dieser Mittheilungen noch eine besondere Bedeutung. (Vgl. p. 204).

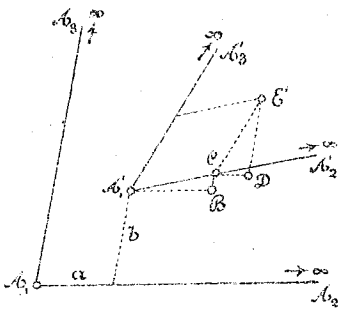
Ich mache dieselbe ersichtlich, indem ich die Figur des Apollonischen Problems in die Anschauung derselben übertrage. Die drei gegebenen Kreise S_1, S_2, S_3 derselben sind in ihrem Sinne die Repräsentanten von drei beliebigen Punkten 1, 2, 3 im Raume; ein Kreis der Lösung repräsentirt einen vierten Raumpunkt von solcher Lage, dass seine Verbindungsgeraden mit den drei gegebenen Punkten Linien unter 45° zur Bildebene sind. Die Lösung des Apollonischen Problems ist die Auffindung dieser Punkte und die Zeichnung ihrer repräsentirenden Kreise.

Die Bestimmung der Punkte im Raume vollzieht sich wie folgt: Man denkt um die Perpendikel von den drei gegebenen Punkten 1, 2, 3 zur Bildebene und mit jenen als Scheitel Winkel von 45° gedreht und erzeugt so drei rechtwinklige Rotationskegel mit parallelen Axen, für die die repräsentirenden Kreise ihrer Scheitel zugleich die Leitcurven

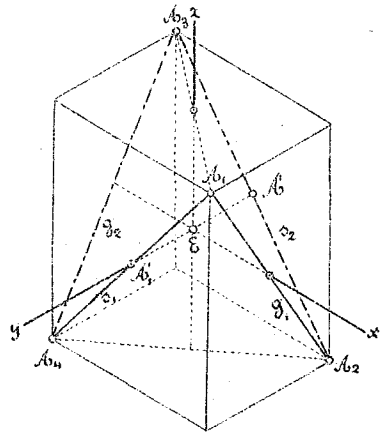
in der Bildebene sind; die gemeinschaftlichen Punkte ihrer Mäntel sind die gesuchten Punkte des Raumes. Der Wechsel des Sinnes bei den Kreisen führt auf vier Paare derselben. Man sieht, meine Abbildung führt auf die einfachste Weise zu der Formulirung des Apollonischen Problems als eines Problems der Kegeldurchdringung, die ich in der III. dieser Mittheilungen (p. 197 oben) durchgeführt habe. Der noch vorhandene Unterschied ist allein bedingt durch die Forderung grösstmöglicher Einfachheit in der Anschauung des Constructionsvorganges nach der Methode der Centralprojection; dazu wählt man den Mittelpunkt des einen Kegels als Projectionscentrum und macht dadurch die Bilder der Schnittpunkte der drei Kegel zu Punkten in seinem Spurkreis und zugleich zu den Berührungspunkten ihrer repräsentirenden Kreise mit demselben.

Die Steiner'sche Erweiterung der sogenannten Malfatti'schen Aufgabe von den drei einander und je zwei Seiten eines Dreiseits berührenden Kreisen ist ein ferneres Beispiel dieser Art; die Figur des Feuerbach'schen Kreises für ein Dreieck mit ihren Erweiterungen, die von den den Dreiecken des vollständigen Vierseits umschriebenen Kreisen, nicht minder die uralte Figurengruppe in den «*Collectiones mathematicae*» des Pappus libr. IV, Theorem 12—18 etc. desgleichen. Ich komme vielleicht darauf zurück; der offenbare Bezug auf die erste grosse Hauptgruppe der Arbeiten von Jac. Steiner sichert ja wohl auch jetzt noch solchen Betrachtungen einigcs Interesse.

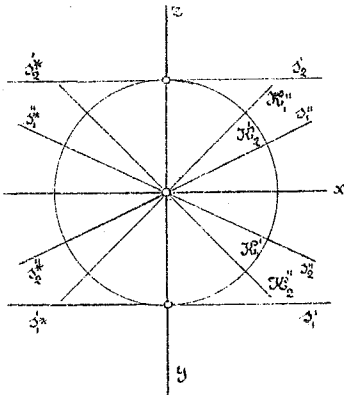
1.



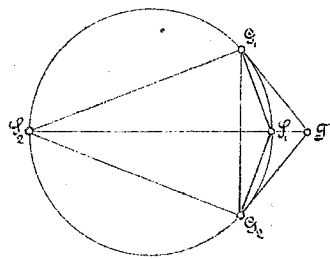
4.



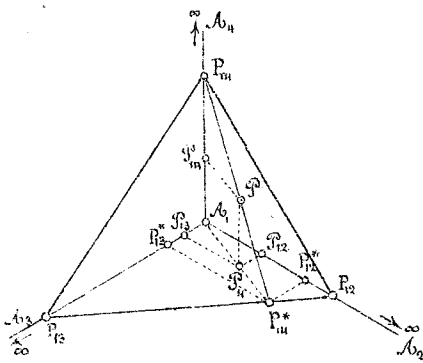
2.



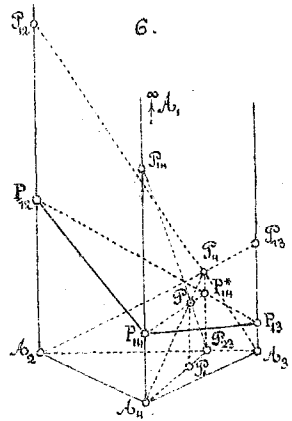
3.



5.

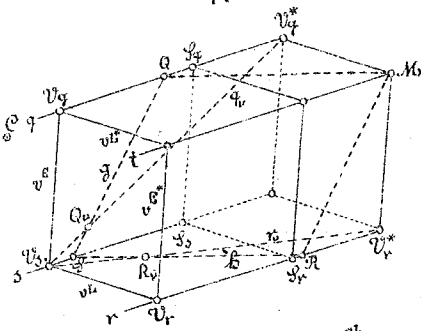


6.

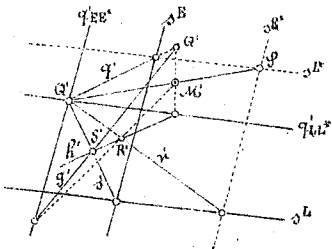


Aut. d. Bellet.

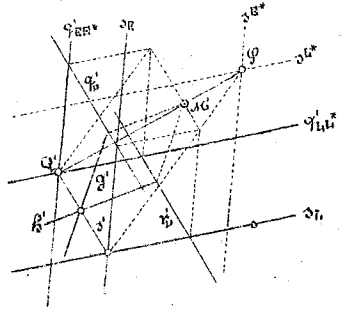
7.



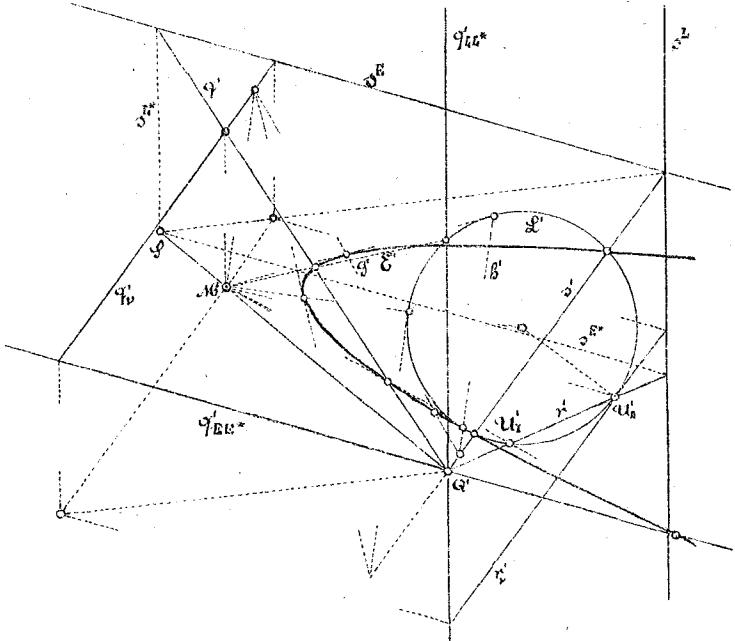
8 α

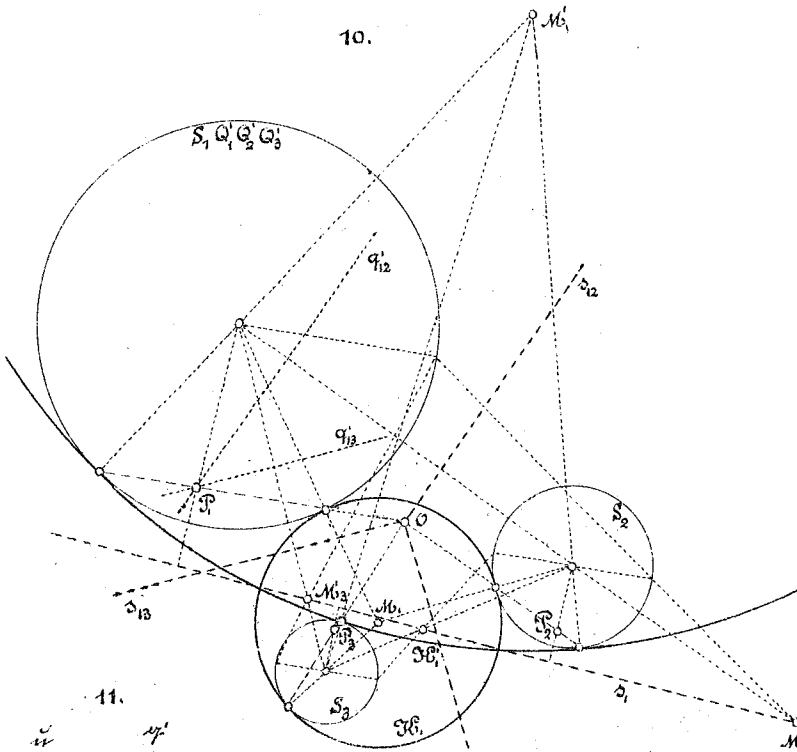


8 β

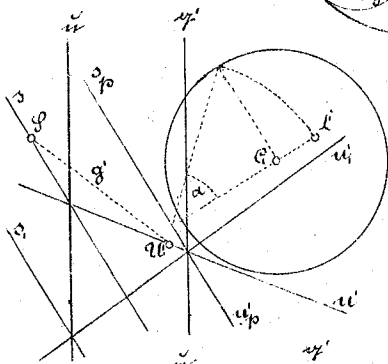


9.

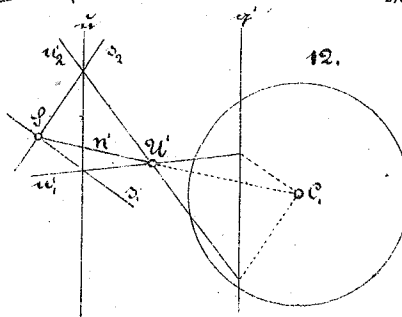




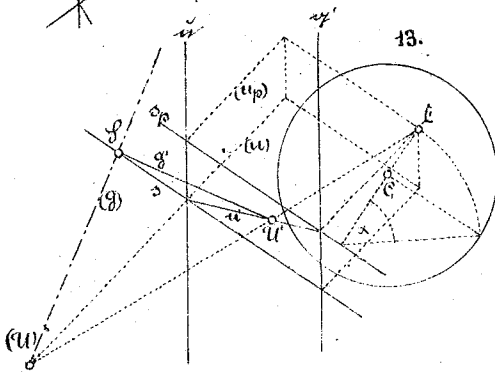
11.



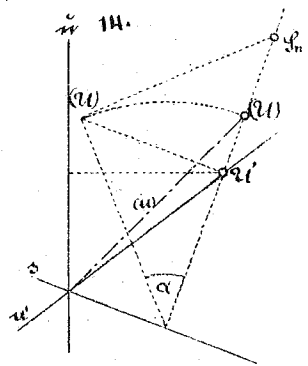
12.



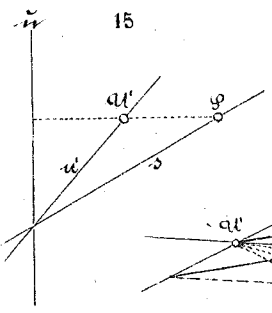
13.



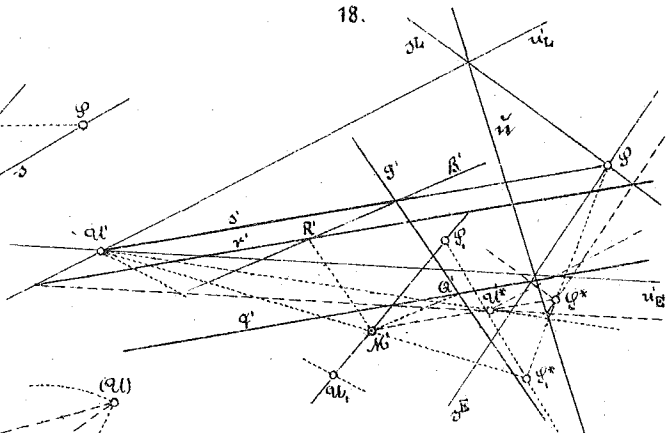
14.



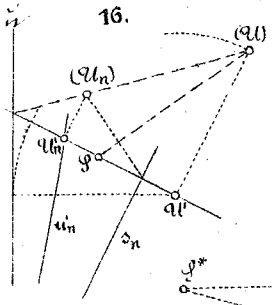
15.



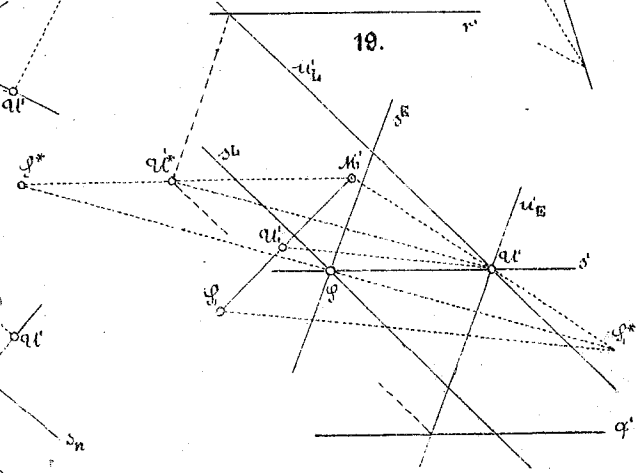
18.



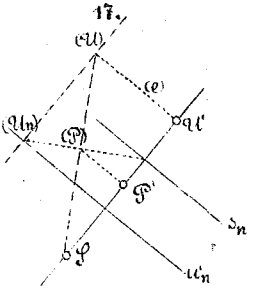
16.



19.



17.



20.

