allein in Betracht kommen können,haben dieselbe Grösse; die Länge derselben variirt bei beiden von 6—13 mm., die Breite von 3—4 mm. und zwar kommen auch bei der Bergföhre solche grösseren, bis 13 mm. langen Kätzchen vor, während sie allerdings in der Regel kürzer bleiben und nur 6—7 mm. Länge haben. Sie sind etwas dunkler gefärbt, als bei der gewöhnlichen Föhre.

Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten

von

H. F. Weber.

Der Vorgang der Wärmeleitung in Flüssigkeiten ist in den letzten zehn Jahren wiederholt messenden Untersuchungen unterworfen worden, welche theils in absolutem, theils in relativem Maasse die Grösse der Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeiten feststellen sollten.

Eine kritische Durchsicht dieser verschiedenen Untersuchungen führt zu dem Resultat: so viele Male die Wärmeleitung der Flüssigkeiten untersucht wurde, ebenso viele verschiedene, einander total widersprechende Resultate wurden gewonnen.

Ich übergehe die Resultate, welche Hr. Guthrie in einer ausgedehnten Arbeit *) über die relativen Leitungsfähigkeiten der Flüssigkeiten für Wärme erhalten hat, weil sie sich sofort als völlig irrig herausstellen. Hr. Guthrie hat eine im Princip leistungsfähige Methode in gänzlich fehlerhafter Weise gehandhabt und hat die durch diese

*) „On the Thermal Resistance of Liquids. By Frederick Guthrie, Communicated by Prof. Tyndall. Philosophical Transactions. Vol 159. p. 637.

Methode gewonnenen Beobachtungsdaten in ebenso fehlerhafter Weise interpretirt.

Die ersten absoluten Messungen der Wärmeleitungsfähigkeit einer Reihe verschiedener Flüssigkeiten hat Hr. Lundquist*) mit Hülfe der Methode ausgeführt, welche Ångström einige Jahre früher zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit der Metalle ausgebildet hatte. Die hauptsächlichsten Resultate, welche Hr. Lundquist durch Anwendung dieser ausserordentlich zuverlässigen, nur etwas zeitraubenden Methode erhalten hat, mögen in folgender kleiner Tabelle Platz finden. Das absolute Wärmeleitungsvermögen von Wasser, Kochsalzlösung und Zinkvitriollösung (Gramm, Centimeter, Minute und 1° C. als Einheiten zu Grunde gelegt) wurde bei einer mittleren Temperatur $\bar{t}$ und bei den angeführten Werthen der Dichte ϱ und der specifischen Wärme c gleich folgenden Werthen gefunden:

	k	$\bar{t}$	ϱ	c
Wasser	0.0933	40.°8	1.000	1.000
Kochsalzlösung	0.0895	43. 9	1.178	0.785
Zinkvitriollösung	0.0964	44. 1	1.242	0.816
Zinkvitriollösung	0.0949	45. 2	1.382	0.770

Fünf Jahre später hat Hr. Winkelmann den von Hrn. Stefan zur Bestimmung des absoluten Wärmeleitungsvermögens der Gase angegebenen Apparat dazu benutzt, das Wärmeleitungsvermögen von 6 Flüssigkeiten in absolutem Maasse festzustellen**). Die definitiven Werthe der absoluten Wärmeleitungsvermögen (ausgemessen mit Hülfe

*) Undersökning af några vätskors ledningsförmåga for värme. Upsala Universitets arsskrift. 1869.

**) „Ueber das Wärmeleitungsvermögen von Flüssigkeiten." Poggendorffs Annalen, Bd. 153, p. 481—498.

der oben angegebenen Einheiten), welche Hr. Winkelmann aus seinen Beobachtungen ableitete, sind in der folgenden Tafel enthalten:

Wasser	0.0924
Kochsalzlösung	0.1605
Chlorkaliumlösung	0.1147
Glycerin	0.0448
Alkohol	0.0904
Schwefelkohlenstoff	0.1202

Diese Resultate sind mit denen des Hrn. Lundquist unvereinbar: während beide Beobachter für das Leitungsvermögen des Wassers nahezu denselben Werth gefunden haben, ist für Kochsalzlösung das von Hrn. Winkelmann gefundene Leitungsvermögen fast doppelt so gross als das von Hrn. Lundquist gefundene; nach den Ergebnissen des einen Beobachters würden die wässerigen Salzlösungen die Wärme nur wenig anders leiten als Wasser, nach den Resultaten des andern Beobachters würden im Gegentheil wässerige Salzlösungen bei Weitem bessere Wärmeleiter sein als ihr Lösungsmittel.

In nicht viel besserer Uebereinstimmung stehen die von Hrn. Winkelmann erhaltenen Resultate mit den Ergebnissen einer ausgedehnten Arbeit, welche Hr. Beetz in neuester Zeit über die relativen Wärmeleitungsfähigkeiten der Flüssigkeiten ausgeführt hat*). Hr. Beetz ermittelte mit Hülfe eines Apparates, der im Princip mit

---

*) „Ueber das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten." Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der k. b. Academie der Wissenschaften, 1879, Heft 1, p. 86—115 und Wiedemanns Annalen Bd. 8 (1879), p. 435—460.

dem von Hrn. Winkelmann benutzten identisch ist, die relativen Werthe der Wärmeleitungsvermögen einer grossen Anzahl von Flüssigkeiten für die beiden Temperaturintervalle 8° bis 14° und 28° bis 36° C. Für das erstere Temperaturintervall fand er für folgende (auch von Hrn. Winkelmann bei derselben Temperatur untersuchte) Flüssigkeiten folgende Werthe des relativen Wärmeleitungsvermögens:

	Beetz	Winkelmann
Wasser	100	100
Kochsalzlösung	105	174
Glycerin	82	48
Alkohol	87	98
Schwefelkohlenstoff	124	130

Die Arbeit des Hrn. Winkelmann giebt dagegen denselben Flüssigkeiten bei derselben Temperatur als relative Werthe des Wärmeleitungsvermögens Zahlenwerthe, welche die letzte Spalte der vorstehenden Tabelle enthält. Eine Vergleichung der Zahlen beider Spalten lässt sofort erkennen, wie weit die Ergebnisse dieser beiden Untersuchungen aus einander laufen. Während z. B. Hr. Beetz dem Glycerin ein doppelt so grosses Wärmeleitungsvermögen gibt als Hr. Winkelmann, ertheilt der letztere Beobachter der Kochsalzlösung fast den zweifachen Werth des Leitungsvermögens, welches Hr. Beetz derselben zukommen lässt.

Diese Angaben werden genügen, die Richtigkeit der eingangs gemachten Bemerkung über die grosse Divergenz der bisher über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten festgestellten Resultate zu belegen und hinreichend zur Evidenz zu bringen, dass im Gebiete der Wärmeleitung der Flüssigkeiten trotz der angeführten Untersuchungen wohl noch alles fraglich ist.

Diese Sachlage deutet an, dass entweder ein Theil oder die Gesammtheit der bisher zur Untersuchung der Wärmeleitung benutzten Methoden fehlerhaft ist, oder dass die durch richtige Methoden gewonnenen Beobachtungen falsch ausgelegt wurden.

Um Klarheit in diesen Widerstreit der Angaben zu bringen, ist nothwendig, eine von den bisher benutzten Untersuchungsmethoden verschiedene und möglichst fehlerfreie neue Untersuchungsmethode in Anwendung zu bringen und die durch die neue Beobachtungsmethode gelieferten Daten einer vollkommen strengen, auf die Principien der Theorie der Wärmeleitung basirten Berechnung zu unterwerfen. Die meinen Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion zu Grunde liegende Methode führte mich auf den Gedanken, eine ganz analoge Untersuchungsform auf den Vorgang der Wärmeleitung in Flüssigkeiten anzuwenden. Schon die ersten Probeversuche liessen erkennen, dass man mit Hülfe dieser Methode den Verlauf der Wärmeleitung in Flüssigkeitslamellen mit derselben Schärfe, derselben Sicherheit und demselben minimalen Zeitaufwande messend verfolgen kann, mit der ich früher den Verlauf der Hydrodiffusion untersuchen konnte. Und bei der definitiven Durchführung dieser Untersuchungsmethode stellte sich heraus, dass dieselbe eine erheblich feinere Messung der sehr kleinen Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten gestattet als die bisher zur Bestimmung der viele hundertmal grösseren Wärmeleitungsfähigkeiten der Metalle benutzten Methoden zu geben vermögen.

In der folgenden Abhandlung gebe ich

1) eine eingehende Beschreibung und eine möglichst vollständig entwickelte Theorie dieser benutzten Versuchsmethode;

ich theile sodann 2) die Resultate mit, welche ich bei Anwendung dieser Methode auf die Wärmeleitung in 14 verschiedenen nichtmetallischen Flüssigkeiten erhalten habe;

ich leite 3) aus diesen Resultaten ein allgemeines Gesetz ab, welches die Grösse des Wärmeleitungsvermögens nichtmetallischer Flüssigkeiten in einen einfachen Zusammenhang mit der specifischen Wärme der Volumseinheit bringt;

4) löse ich die Widersprüche auf, welche einerseits zwischen meinen Resultaten und denen der HH. Lundquist, Winkelmann und Beetz und welche anderseits zwischen den Resultaten dieser Beobachter bestehen

und füge 5) eine Reihe von Messungen über die Wärmeleitungsfähigkeit einer metallischen Flüssigkeit, des Quecksilbers, bei, um den fundamentalen Unterschied zwischen den Vorgängen der Wärmeleitung in metallischen und nichtmetallischen Flüssigkeiten vor Augen zu führen.

I. Beschreibung und Theorie der Untersuchungsmethode.

1.

Auf eine circa 0.5 Cm. dicke, planparallele cylindrische Kupferplatte von etwa 200 Qcm. Basisfläche werden drei genau gleich dicke, und zwar nur einige Mm. dicke, planparallele Stückchen — von je 0.1 Qcm. Fläche — einer sehr schlecht wärmeleitenden festen Substanz (Glas, Hartgummi, etc.) gelegt; auf diese wird hierauf eine in ihrer unteren Fläche genau eben geschliffene cylindrische Kupferplatte von circa 1 bis 1.5 Cm. Dicke und einem Radius genau gleich dem Radius der unteren Platte gesetzt. Nachdem dieses Plattensystem genau horizontal gestellt worden ist, wird der dünne Zwischenraum zwischen den beiden Kupferplatten mit der auf die Wärmeleitung zu untersuchenden Flüssigkeit so weit ausgefüllt, dass die Flüssigkeit mit leicht gekrümmtem capillaren Bauche rings an den Plattenrändern hervortritt.

Das so vorgerichtete Plattensystem wird einer mässig hohen constanten Temperatur, etwa der Zimmertemperatur, so lange ausgesetzt, bis es dieselbe durch seine ganze Masse hindurch angenommen hat. Darauf wird das Plattensystem in irgend einem Zeitmomente, den wir als Moment Null bezeichnen wollen, bei genau horizontaler Stellung vorsichtig auf eine planparallel geschliffene, 3 bis 8 Cm. dicke und exact horizontal gestellte Eisplatte von 0° herabgelassen, rasch mit einer auf 0° abgekühlten Hülle von Kupferblech überdeckt und der Abkühlung überlassen. Nach Ablauf einer sehr kurzen Zeit ist die untere Kupferplatte auf Null Grad abgekühlt und bleibt von da an genau auf dieser Temperatur, da das bedeutende Gewicht des Plattensystems das sich unter der unteren Fläche der unteren Platte bildende Schmelzwasser unmittelbar nach seiner Bildung herauspresst und die untere Fläche der letztgenannten Platte so kräftig an die Eisfläche andrückt, dass es Mühe macht diese Verbindung zu lösen. Es entsteht nun eine stetige Wärmeströmung aus der oberen, wärmeren Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitslamelle hindurch nach der unteren Kupferplatte hin. Dadurch sinkt die Temperatur der oberen Kupferplatte und jeder horizontalen Schicht der Flüssigkeitslamelle im Laufe der Zeit nach einem leicht zu ermittelnden Gesetz und es lässt sich aus dem gemessenen zeitlichen Verlaufe der Temperatur irgend einer Flüssigkeitsschicht die Grösse des Wärmeleitungsvermögens der Flüssigkeit berechnen.

Als Flüssigkeitsschicht, deren zeitlichen Temperaturverlauf wir messend verfolgen, wählen wir die obere Grenzschicht der Lamelle, weil sich für diese der Temperaturverlauf in einfachster und schärfster Weise ermitteln lässt. Die Temperatur dieser oberen Grenzfläche ist nämlich in jedem Zeitmomente gleich der Temperatur der unteren Grenzfläche der oberen Kupferplatte; von der letzteren Temperatur aber lässt sich leicht einsehen, dass sie in jedem beliebigen Zeitmomente gleich der gleichzeitigen Temperatur irgend eines beliebigen Massenelementes der oberen Kupferplatte ist. Misst man also den zeitlichen Verlauf der Temperatur einer beliebigen Stelle der oberen Kupferplatte, so erhält man damit zugleich den zeitlichen Verlauf der Temperatur der oberen Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle.

Bei dieser Versuchsanordnung sind die dichtesten Flüssigkeitsschichten immer am tiefsten gelegen; diese Versuchsanordnung lässt also den hauptsächlichsten Fehler, der die Vorgänge der Wärmeleitung in Flüssigkeiten leicht trüben kann und der in der That die Resultate mehrerer der bisher ausgeführten Untersuchungen in der erheblichsten Weise gefälscht hat — die Wärmefortführung auf dem Wege der Flüssigkeitsströmungen — principiell fortfallen. Ein weiterer Vortheil dieser Versuchsmethode besteht darin, dass die eine Voraussetzung in der zu entwickelnden Theorie der Methode — die untere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle habe permanent die Temperatur 0° — immer erfüllt ist; die Schwere des Apparats sorgt selbst dafür, dass alles Schmelzwasser durch Verdrängung beseitigt wird, und keine allmälige Temperatursteigerung der unteren Grenzfläche der Lamelle durch Stagnation des Schmelzwassers eintritt.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Anwesenheit der drei kleinen planparallelen Stückchen eines festen schlechten Wärmeleiters den Vorgang der Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle kaum modificirt. Diese Substanzen haben ein Wärmeleitungsvermögen, das nahezu von gleicher Grössenordnung ist wie das der Flüssigkeiten und die Summe der diesen drei Stückchen zukommenden Flächen macht noch nicht den fünfhundertsten Theil der Fläche aus, durch welche die Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle vor sich geht.

2.

Die Annahme, dass in jedem beliebigen Zeitmomente die Temperatur aller Massenpunkte der oberen Kupferplatte dieselbe ist, bildet eine der Grundlagen der benutzten Methode. Da man vielleicht wegen der ganz beträchtlichen Dicke der benutzten Platte geneigt sein dürfte, diese Annahme nur als grobe Annäherung gelten zu lassen, halte ich es für angemessen, die volle Richtigkeit dieser Annahme jedem Zweifel zu entrücken.

Sämmtliche Volumelemente der beiden Kupferplatten und der eingeschalteten Flüssigkeitslamelle mögen die anfängliche Temperatur U haben. In dem Zeitmomente $t = 0$ werde das ganze Plattensystem in horizontaler Stellung auf eine ebene Eisplatte gestellt und gleichzeitig einer Umgebung von 0° ausgesetzt. Die untere Kupferplatte (und damit auch die untere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle) wird in sehr kurzer Zeit auf Null Grad abgekühlt und es entwickelt sich ein continuirlicher Wärmestrom von abnehmender Stärke aus der oberen Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitslamelle hindurch gegen die untere Kupferplatte hin. Gleichzeitig giebt die obere Kupferplatte von ihrer oberen Basisfläche und ihrer Mantelfläche Wärme auf dem Wege der äusseren Wärmeleitung an die kühlere Umgebung ab. Es soll die Temperaturvertheilung bestimmt werden, die in Folge dieser Vorgänge der Wärmeleitung in irgend einem Zeitmomente in der oberen Kupferplatte stattfindet.

Es möge ein cylindrisches Coordinatensystem (x,r,φ) der Betrachtung zu Grunde gelegt werden, dessen Axe mit der Axe der cylindrischen Platte coincidirt und dessen Nullpunkt in der unteren Basisfläche der Kupferplatte liegt. Die Dicke der Platte sei Δ_1, ihr Radius sei R; die Dichte, die specifische Wärme und die innere Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers sollen mit ϱ_1, c_1, k_1 bezeichnet sein. Da bei den soeben geschilderten Vorgängen der Wärmeleitung die Wärmeströmung von der Richtung φ unabhängig ist, so hat die Temperatur u in jedem Zeitmomente t und in jedem Massenelemente im Innern der Platte folgende partielle Differentialgleichung zu erfüllen:

$$\varrho_1\, c_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\} \tag{1}$$

Dieser linearen partiellen Differentialgleichung liegt natürlich die Annahme zu Grunde, dass die 3 Elemente: Dichte, specifische Wärme und Wärmeleitungsvermögen des Kupfers von der Temperatur unabhängig sind. Die bisherigen Erfahrungen lehren, dass diese Annahme für keines dieser 3 Elemente genau zutrifft, dass vielmehr die Dichte und das Wärmeleitungsvermögen ausserordentlich langsam mit steigender Temperatur abnehmen, während die specifische Wärme in messbarer Weise mit wachsender Temperatur ansteigt. Die Folgerungen aus der oben gemachten Annahme können also nur Annäherungen an den wirklichen Sachverhalt sein; sie werden aber sehr grosse

Annäherungen sein, da das Intervall, innerhalb dessen sich die Temperatur der Kupferplatte in unseren Versuchen bewegt, nur wenige Grade umfasst.

Ausserdem hat die Temperatur u vier Grenzgleichungen Genüge zu leisten. Für die an Luft grenzenden Elemente der oberen Basisfläche muss in jedem Momente die Gleichung erfüllt sein:

$$k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\Delta_1} + h_1 u_{x=\Delta_1} = 0 \tag{2}$$

wo h_1 die Grösse des äusseren Wärmeleitungsvermögens von Kupfer in Luft bedeutet.

Für alle Elemente der Mantelfläche gilt die analoge Gleichung:

$$k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} + h_1 u_{r=R} = 0 \tag{3}$$

Die auf die untere Basisfläche der Platte bezügliche Grenzgleichung enthält die Thatsache, dass der Wärmegewinn jedes Elementes dieser Grenzfläche in jedem Zeitelement gleich Null ist, dass also jedem Elemente dieser Grenzfläche in jedem Zeitelemente soviel Wärme durch die Flüssigkeitsleitung in der Lamelle entzogen wird als es durch die metallische Leitung aus der Kupfermasse heraus zugeführt bekommt. Nennen wir die Temperatur in dieser unteren Basisfläche $u_{x=0}$ und bezeichnen wir die Dicke und das innere Wärmeleitungsvermögen der äusserst dünnen Flüssigkeitslamelle mit Δ und k, so ist der Inhalt dieser Grenzgleichung:

$$k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} - \frac{k}{\Delta} \cdot u_{x=0} = 0 \tag{4}$$

Die letzte Grenzgleichung bildet die Anfangsbedingung:

$$u = U \left\{\begin{matrix}\text{für } t = 0 \\ \text{und für alle } x \text{ u. } r\end{matrix}\right\} \tag{5}$$

Eine einfache Lösung, welche der Differentialgleichung (1) genügt, ist:

$$u = \Big[A \cos qx + B \sin qx\Big]\, I^0_{mr}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}(q^2+m^2)t}$$

wo I^0_{mr} die Bessel'sche Function erster Gattung mit dem Index 0 und dem Argument mr bezeichnet und wo die A, B, q und m 4 Constante bedeuten, deren Werthe aus den obigen vier Grenzgleichungen heraus zu bestimmen sind.

Die Grenzgleichung (4) liefert zunächst die Beziehung:

$$B = \frac{k}{k_1}\,\frac{1}{\varDelta q}\cdot A$$

wodurch die angegebene einfache Lösung die Form annimmt:

$$u = A\left(\cos qx + \frac{k}{k_1}\,\frac{1}{\varDelta q}\sin qx\right) I^0_{mr}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}(q^2+m^2)t}$$

Zur Bestimmung der Grösse q dient die Grenzgleichung (2). Soll die vorliegende einfache Lösung der Grenzgleichung (2) genügen, so müssen für q diejenigen Werthe gewählt werden, welche sich aus der Gleichung ergeben:

$$-k_1 q \sin q\varDelta_1 + \frac{k}{\varDelta}\cos q\varDelta_1 + h_1 \cos q\varDelta_1 + h_1 \frac{k}{k_1}\,\frac{1}{\varDelta q}\sin q\varDelta_1 = 0$$

oder:

$$-q\varDelta_1\left[1 - \frac{h_1}{k_1}\cdot\frac{k}{k_1}\,\frac{\varDelta_1^2}{\varDelta}\,\frac{1}{(q\varDelta_1)^2}\right]\sin q\varDelta_1 + \frac{k}{k_1}\,\frac{\varDelta_1}{\varDelta}\left[1 + \frac{h_1}{k}\varDelta\right]\cos q\varDelta_1 = 0$$

In unseren Versuchen war $\varDelta_1$ in runder Zahl gleich 1 Cm.; die Dicke $\varDelta$ der Flüssigkeitslamelle betrug circa 0.2 Cm. Aus den weiter unten angeführten Beobachtungsreihen ergiebt sich für h_1 0.006 und für k im Mittel für alle Flüssigkeiten etwa 0.050, falls für die Auswerthung dieser beiden Wärmeleitungsvermögen die Einheiten: Gramm, Centimeter, Minute und 1° C. benutzt werden. Der Werth von k_1 liegt, in denselben Einheiten ausgedrückt, nach meinen und anderer Messungen für die verschiedenen Kupfersorten zwischen 45 und 66. Unter diesen Umständen darf man, ohne einen erheblichen Fehler in die Rechnung einzuführen, die vorstehende Gleichung durch die folgende einfachere ersetzen:

$$q\Delta_1 \sin q\Delta_1 = \frac{k}{k_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot \cos q\Delta_1 = 0.004 \cos q\Delta_1$$

in welcher für k_1 der Mittelwerth 55 eingeführt ist.

Der erste Wurzelwerth dieser transcendenten Gleichung ist angenähert $q\Delta_1 = \frac{1}{16}$; die zweite Wurzel ist ein wenig grösser als π, die dritte etwas grösser als 2π u. s. w.

Ertheilen wir also der Grösse q der obigen einfachen Lösung die (nur angenähert berechneten) Werthe $\frac{1}{16}\frac{1}{\Delta_1}$, $\frac{\pi}{\Delta_1}$, $\frac{2\pi}{\Delta_1}$, ... [diese Wurzelwerthe sollen Kürze halber von jetzt an mit $q_1, q_2, q_3, \ldots$ bezeichnet werden], so erhalten wir eine einfache Lösung der Differentialgleichung, welche zugleich auch die Bedingungsgleichung (2) erfüllt. Eine allgemeinere Lösung ist dann:

$$u = \left\{ A_1 \left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q_1} \sin q_1 x\right) e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} q_1^2 t} + \right.$$

$$\left. + A_2 \left(\cos q_2 x + \frac{k}{k_1} \frac{1}{\Delta q_2} \sin q_2 x\right) e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} q_2^2 t} + \ldots \right\} I^0_{mr} e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} m^2 t}$$

Diese allgemeinere Lösung hat nun weiter der Grenzgleichung (3) zu entsprechen. Sie entspricht dieser Gleichung, sobald die in ihr vorkommende Grösse m aus der transcendenten Gleichung bestimmt wird:

$$mR \frac{I^1_{mr}}{I^0_{mr}} = \frac{h_1}{k_1} R$$

Die verschiedenen Wurzelwerthe (mR) dieser Gleichung können aus den von Hansen berechneten Tafeln der Bessel'schen Functionen $\overset{0}{I}_{mr}$ und $\overset{1}{I}_{mr}$ entnommen werden. Da $\frac{h_1}{k_1}$ nach den oben gemachten Angaben den Werth von etwa $\frac{1}{9000}$ besitzt und der Radius R der Kupferplatte 8 Cm. beträgt, so hat die rechte Seite der letzten Gleichung den abgerundeten Werth $\frac{1}{1100}$. Die unendlich vielen reellen Wurzelwerthe dieser Gleichung sind:

$$mR = 0.043,\ 3.84,\ 7.02,\ 10.7,\ \ldots$$

und daraus ergeben sich die folgenden unendlich vielen reellen Werthe von m, welche die Bedingungsgleichung (3) befriedigen

$$m_1 = \frac{0.043}{R},\ m_2 = \frac{3.84}{R},\ m_3 = \frac{7.02}{R},\ m_4 = \frac{10.17}{R},\ \ldots$$

Die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (1), welche sämmtliche Grenzgleichungen (2) bis (4) erfüllt, ist demnach:

$$\begin{aligned} u = \Bigg\{ & A_1 \left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_1}\sin q_1 x\right) e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} q_1^2 t} + \\ & + A_2 \left(\cos q_2 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_2}\sin q_2 x\right) e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} q_2^2 t} + \ldots \Bigg\} \times \\ \Bigg\{ & B_1 \overset{0}{I}_{m_1 r}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} m_1^2 t} + B_2 \overset{0}{I}_{m_2 r}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} . m_2^2 . t} + \\ & + B_3 \overset{0}{I}_{m_3 r}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} m_3^2 t} + \ldots \Bigg\} \ldots . (6). \end{aligned}$$

Es bleibt jetzt noch übrig die letzte Aufgabe zu lösen:

die Constanten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ so zu bestimmen, dass der Anfangsbedingung (5):

$$u = U \text{ für } t = o \text{ und für alle } x \text{ und } r$$

Rechnung getragen wird. Die gegebene allgemeine Lösung wird dieser Anfangsbedingung genügen, sobald die Constanten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ so gewählt werden, dass

$$U = A_1\left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_1}\sin q_1 x\right) + A_2\left(\cos q_2 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_2}\sin q_2 x\right) + \ldots \ldots (7)$$

und

$$1 = B_1 I^0_{m_1 r} + B_2 I^0_{m_2 r} + B_3 I^0_{m_3 r} + \ldots\ldots (8)$$

ist. Die strenge Bestimmung der Constanten A in der Gleichung (7) führt auf verwickelte Rechnungen; hier möge nur eine sehr angenäherte Lösung der Aufgabe gegeben werden. Die Grössen

$$\frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_1}\sin q_1 x, \quad \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_2}\sin q_2 x, \quad \frac{k}{k_1}\frac{1}{\Delta q_3}\sin q_3 x, \ldots$$

sind sehr klein gegenüber den Grössen

$$\cos q_1 x, \quad \cos q_2 x, \quad \cos q_3 x, \ldots\ldots,$$

indem sie höchstens die Werthe $\frac{1}{200}, \frac{1}{690}, \frac{1}{1380}, \ldots$ erreichen. Mit sehr grosser Annäherung wird daher die Gleichung (7) durch die folgende ersetzt werden dürfen:

$$U = A_1 \cos q_1 x + A_2 \cos q_2 x + A_3 \cos q_3 x + \ldots \quad \ldots (7a)$$

Für diese Gleichung lässt sich die Constantenbestimmung leicht ausführen. Wie Fourier zuerst gezeigt hat, gelten die Relationen:

$$\int_0^{\Delta_1} \cos q_n x \,.\, \cos q_m x \, dx = 0 \quad \text{für } n \text{ verschieden von } m$$

und

$$\int_0^{\varDelta_1} \cos q_n x \, . \, \cos q_n x \, . \, dx = \frac{1}{2} \left(\varDelta_1 + \frac{\sin 2 q_n \varDelta_1}{2 q_n} \right)$$

Demnach ist

$$\int_0^{\varDelta_1} U \cos q_n x \, dx = U \, \frac{\sin q_n \varDelta_1}{q_n} = A_n \, . \, \frac{1}{2} \left(\varDelta_1 + \frac{\sin 2 q_n \varDelta_1}{2 q_n} \right)$$

oder

$$A_n = 2 \, U \, \frac{\sin q_n \varDelta_1}{q_n \varDelta_1} \, \frac{1}{\left(1 + \frac{\sin 2 q_n \varDelta_1}{2 q_n \varDelta_1} \right)}$$

Zur Bestimmung der Constanten B_n der Gleichung

$$1 = B_1 \, I^0_{m_1 r} + B_2 \, I^0_{m_2 r} + B_3 \, I^0_{m_3 r} + \cdots$$

in welcher die $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die successiven Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$mR \, \frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{h_1}{k_1} \, . \, R$$

bedeuten, dienen die aus der Theorie der Bessel'schen Functionen bekannten Beziehungen:

$$\int_0^R r \, . \, I^0_{m_n r} \, . \, I^0_{m_i r} \, . \, dr = 0 \text{ für } n \text{ verschieden von } i$$

und

$$\int_0^R r \, . \, I^0_{m_n r} \, . \, I^0_{m_n r} \, . \, dr = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_1^2}{k_1^2} \, \frac{1}{m_n^2} \right) R^2 . \left(I^0_{m_n R} \right)^2 .$$

Durch Anwendung dieser Relationen auf die Gleichung (8) erhalten wir:

$$\frac{R}{m_n} I^1_{m_n R} = B_n \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_1^2}{k_1^2}\frac{1}{m_n{}^2}\right) R^2 \left(I^0_{m_n R}\right)^2$$

und daraus:

$$B_n = \frac{2\, I^1_{m_n R}}{\left(I^0_{m_n R}\right)^2} \cdot \frac{1}{m_n R\left(1 + \frac{h_1^2}{k_1^2 m_n^2}\right)}$$

Zieht man die oben gegebenen Wurzelwerthe $q_1 \varDelta_1$, $q_2 \varDelta_1$, $q_3 \varDelta_1$, ... in Betracht, so erkennt man leicht, dass der Coefficient A_1 fast genau gleich U, die Coefficienten A_2, A_3, A_4, ... aber von Null nur sehr wenig verschieden sind.

Aehnliches gilt von den Coefficienten $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Durch Einführung der oben gegebenen Wurzelwerthe $m_1 R$, $m_2 R$, $m_3 R$, ... in den für B_n angegebenen Werth ersieht man, dass B_1 nahezu gleich 1 ist und B_2, B_3, B_4 ... nahezu den Nullwerth haben.

Daraus folgt, dass in der oben gegebenen allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (1)

$$\begin{aligned} u = \Big\{ & A_1 \left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\varDelta q_1} \sin q_1 x\right) e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} q_1{}^2 t} + \\ & + A_2 \left(\cos q_2 x + \frac{k}{k_1}\frac{1}{\varDelta q_2} \sin q_2 x\right) e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} q_2{}^2 t} + \ldots \Big\} \times \\ \Big\{ & B_1 I^0_{m_1 r}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} m_1{}^2 t} + B_2 I^0_{m_2 r}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} m_2{}^2 t} + \\ & + B_3 I^0_{m_3 r}\, e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1} m_3{}^2 t} + \ldots \Big\} \end{aligned}$$

alle auf das erste Glied folgenden Glieder in beiden Klammern sehr klein sind gegenüber dem ersten Gliede.

Da aber die Wurzelwerthe $q_1, q_2, q_3, \ldots$ nahezu in dem Verhältniss $1 : 20 : 40 \ldots$ und die Wurzelwerthe $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ungefähr in dem Verhältniss $1 : 90 : 175$ zunehmen, so sind diese auf das erste Glied folgenden Glieder in jeder der beiden Klammern sogar nach äusserst kurzen Zeitlängen völlig bedeutungslos gegenüber dem ersten Gliede jeder Klammer.

Die gesuchte Temperaturvertheilung in der cylindrischen Kupferplatte ist daher in jedem beliebigen Zeitmomente t (mit Ausschluss der allerersten Zeitmomente nach Beginn des Processes der Wärmeleitung) durch die folgende Form gegeben:

$$u = U\left(\cos q_1 x + \frac{k}{k_1}\,\frac{1}{\varDelta q_1}\sin q_1 x\right) I^0_{m_1 r}\; e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}(q_1^{\,2} + m_1^{\,2})\,t}$$

oder, wenn die Werthe $q_1 = \frac{1}{16}\,\frac{1}{\varDelta_1}$ und $m_1 = \frac{0.043}{R}$ und $\frac{k}{k_1}\,\frac{\varDelta_1}{\varDelta} = \frac{1}{220}$ eingesetzt werden:

$$u = U\left[\cos\left(\frac{1}{16}\,\frac{x}{\varDelta_1}\right) + \frac{1}{220}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{16}\,\frac{x}{\varDelta_1}\right)}{\left(\frac{1}{16}\,\frac{x}{\varDelta_1}\right)}\right] I^0_{\frac{0.043}{R}\cdot r}\; e^{-\frac{k_1}{\varrho_1 c_1}\left[\left(\frac{1}{16\varDelta_1}\right)^2 + \left(\frac{0.043}{R}\right)^2\right]t}$$

Diese Form des Schlussresultats lässt aber sofort erkennen, dass sich die Temperatur keines Massenpunktes der cylindrischen Kupferplatte in irgend einem Zeitmoment von dem Mittelwerthe der Temperatur der Platte um mehr als höchstens $\frac{1}{500}$ Grad entfernt. Der von der Kupferplatte erfüllte Raum ist also in jedem Zeitmomente ein isothermischer; die untere Begrenzungsfläche der Kupferplatte und mithin auch die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle ist in jedem Augenblicke eine isotherme Fläche. Messen wir in irgend einem Zeitmomente die Temperatur irgend eines Massenpunktes der Kupferplatte, so erhalten wir in dieser Temperatur die in diesem Momente vorhandene Temperatur der oberen Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle.

3.

Nachdem der Nachweis gegeben worden ist, dass in jedem Augenblicke die obere Kupferplatte ein isothermer Raum und die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle eine isotherme Fläche von demselben Temperaturwerthe ist, soll jetzt die Temperaturvertheilung näher betrachtet werden, die sich in einem beliebigen Zeitmomente während des Processes der Leitung der Wärme aus der oberen Kupferplatte heraus durch die Flüssigkeitslamelle hindurch in der letzteren herstellt. Zur Aufstellung der Differentialgleichung und der verschiedenen Grenzgleichungen, aus denen heraus diese Temperaturvertheilung ermittelt werden kann, legen wir, wie oben, ein cylindrisches Coordinatensystem zu Grunde (x, r, φ), dessen Axe mit der Axe der Flüssigkeitslamelle zusammenfällt und dessen Nullpunkt in der unteren Grenzfläche der Lamelle liegt. Nach unserer Versuchsanordnung ist auch in der Wärmeleitung innerhalb der Flüssigkeitslamelle die Wärmeströmung unabhängig von der Richtung der φ und es hat daher die partielle Differentialgleichung, welche die Temperaturbewegung innerhalb der Lamelle ausdrückt, die Form:

$$\varrho . c . \frac{\partial u}{\partial t} = k \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wenn ϱ und c Dichte und specifische Wärme und k die Grösse der inneren Wärmeleitungsfähigkeit der betrachteten Flüssigkeit bedeuten. Von diesen drei Grössen nehmen wir zunächst an, dass sie unabhängig von der Temperatur u sind.

Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung hat fünf Grenzgleichungen zu genügen:

Für $x = 0$ ist $u = 0$ für alle t ....(2)

Für $x = \Delta$ ist u unabhängig von r für alle t ......(3)

Eine weitere für $x = \Delta$ gültige Grenzgleichung hat die Thatsache auszudrücken, dass sich der Wärmevorrath der oberen Kupferplatte auf zweifache Weise vermindert: durch innere Wärmeleitung innerhalb der Flüssigkeitslamelle gegen die untere, auf 0^0 abgekühlte Kupferplatte hin und durch äussere Wärmeleitung von der an Luft grenzenden oberen Basis- und der Mantelfläche aus in die auf $0°$ abgekühlte Umgebung hinein. Die Wärmemenge, welche die Platte auf dem ersten Wege in der Zeiteinheit verliert, ist gleich $F \,.\, k \,.\, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\Delta}$, wenn F die Grösse der Basisfläche der Platte bedeutet; machen wir die Annahme, dass die äussere Wärmeleitungsgrösse h_1 unabhängig von der Temperatur ist und bezeichnen wir die Summe von oberer Basisfläche und Mantelfläche der oberen Kupferplatte mit F_1, so ist die Wärmemenge, welche die obere Platte durch die äussere Wärmeleitung in derselben Zeit verliert, gleich $h_1 F_1 \,.\, u_{x=\Delta}$ zu setzen. Die Summe dieser beiden in der Zeiteinheit erfolgenden Wärmeverluste ist gleich der gesammten, während dieser Zeit erfolgenden Wärmeabnahme der oberen Platte, d. h. gleich $-M_1 c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=\Delta}$, wo M_1 die Masse und c_1, wie oben, die specifische Wärme der Kupferplatte bezeichnet. Als weitere Grenzgleichung gilt also:

für $x = \Delta$ ist $\quad -M_1 c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=\Delta} = k\, F \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\Delta} + h_1 F_1 u_{x=\Delta}$ ....(4)

Für alle Orte der Mantelfläche der cylindrischen Flüssigkeitslamelle hat die Lösung der obigen Differentialgleichung die Bedingung zu erfüllen:

$$\text{für } r = R:\ k\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} + hu_{r=R} = 0 \quad \ldots\ldots (5)$$

Endlich muss die gesuchte Lösung der Differentialgleichung auch die anfängliche, die zur Zeit $t = 0$, bestehende Temperaturvertheilung enthalten. Es möge zu Anfang durch das ganze Plattensystem dieselbe constante Temperatur U geherrscht haben. Dann lautet die letzte zu erfüllende Grenzgleichung:

$$\text{für } t = 0:\quad u = U = \text{unabhängig von } x \text{ und } r \quad \ldots\ldots (6)$$

Eine einfache Lösung der Differentialgleichung (1) ist:

$$u = A\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t} \sin qx + B e^{-\frac{k}{\varrho c}(p^2 + m^2)t} \sin px\, I^0_{mr} \ \ldots . (7)$$

Diese Lösung genügt der Grenzgleichung (2); damit sie zugleich auch die Bedingungsgleichung (3) erfülle, muss die Constante p als Wurzel der Gleichung $\sin(p\varDelta) = 0$ gewählt werden, muss die Constante p also den Werth $\frac{n\pi}{\varDelta}$ haben, wo n der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... bezeichnet. Der Bedingungsgleichung (5) ist genügt, sobald die Constante m als Wurzel der transcendenten Gleichung

$$m R \frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{h}{k} R$$

gewählt wird. Belegen wir die unendlich vielen reellen Werthe von m, welche dieser Gleichung entsprechen, der Reihe nach mit den Zeichen $m_1, m_2, m_3, \ldots$, so können wir als allgemeinere Lösung der obigen Differentialgleichung, welche dreien der obigen fünf Grenzgleichungen genügt, die folgende Form nehmen:

$$u = A\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t} \sin q x +$$

$$\left\{ B_1 \sin\left(\frac{\pi}{\Delta} x\right) c^{-\frac{k}{\varrho c}\frac{\pi^2}{\Delta^2} t} + B_2 \sin\left(\frac{2\pi}{\Delta} x\right) e^{-\frac{k}{\varrho c}\frac{4\pi^2}{\Delta^2} t} + \right.$$

$$\left. + B_3 \sin\left(\frac{3\pi}{\Delta} x\right) e^{-\frac{k}{\varrho c}\frac{9\pi^2}{\Delta^2} t} + \dots \right\} \times$$

$$\left\{ C_1 I^0_{m_1 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1^2 t} + C_2 I^0_{m_2 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m_2^2 t} + C_3 I^0_{m_3 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m_3^2 t} + \dots \right\} \dots (8)$$

In diesem Ausdrucke wären nun noch die Constanten A und q, die B_n und die C_n so zu bestimmen, dass den beiden Grenzgleichungen (4) und (6) Genüge geleistet wird. Diese Bestimmung mit aller Strenge durchzuführen ist mir nicht gelungen. Ich habe aber diese Schwierigkeit in folgender Weise, unbeschadet der Genauigkeit der Berechnung der auszuführenden Versuche, zu umgehen vermocht. Die zuletzt angegebene Lösung für u lässt ersehen, dass durch passende Wahl der Dicke Δ der Flüssigkeitslamelle die Grösse $\frac{k}{\varrho c}\frac{n^2}{\Delta^2}\pi^2$ so gross gemacht werden kann, dass schon nach Ablauf einiger Secunden seit Anfang des Processes der Wärmeleitung jedes Glied innerhalb der ersten Klammer einen verschwindend kleinen Werth annimmt. In den weiter unten mitgetheilten Versuchen war Δ von der Ordnung $\frac{1}{5}$ Cm.; die Grösse $\frac{k}{\varrho c}$ ergab sich für alle untersuchten Flüssigkeiten als nahezu constant und zwar nahezu gleich 0.070 (unter Zugrundelegung der oben genannten Einheiten der Länge und der Zeit). Es war also für alle untersuchten Flüssigkeiten $\frac{k}{\varrho c}\frac{\pi^2}{\Delta^2} n^2 = 17.5\, n^2$.

Unter diesen Umständen hatte jedes der innerhalb der ersten der obigen beiden Klammern stehenden Glieder schon nach Ablauf weniger Secunden einen ausserordentlich geringen Werth. Von dieser Zeit an ist die Temperaturvertheilung in der Lamelle unabhängig von r; die isothermen Flächen laufen dann den ebenen Grenzflächen der Lamelle parallel und der Ausdruck der Temperaturvertheilung reducirt sich auf das erste Glied der zuletzt angegebenen Lösung:

$$u = A\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t} \sin q x$$

Zur Bestimmung der Constante q dient nun die Grenzgleichung (4):

$$-M_1\, c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=\varDelta} = k\, F \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\varDelta} + h_1\, F_1\, u_{x=\varDelta}$$

Der vorstehende Ausdruck für u erfüllt diese Grenzgleichung, falls für die Constante q eine der Wurzeln der Gleichung

$$M_1 c_1 \cdot \frac{k}{\varrho c} \cdot q^2 \cdot \sin(q\varDelta) = k F q \cos(q\varDelta) + h_1 F_1 \sin(q\varDelta)$$

d. h. der Gleichung

$$q\varDelta\ tg\ q\varDelta = \frac{F \varDelta \varrho c}{M_1 c_1 \left(1 - \frac{h_1 F_1 \varrho c \varDelta^2}{k M_1 c_1} \cdot \frac{1}{(q\varDelta)^2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

setzt. Auf die Berechnung der unendlich vielen Wurzeln q dieser Gleichung, sie mögen mit $q_1, q_2, q_3, \ldots$ bezeichnet werden, soll hier nicht näher eingegangen werden; wir werden weiter unten darauf zurückkommen. Einstweilen brauchen wir nur zu wissen, dass q_1 im ersten, q_2 im dritten, q_3 im fünften Quadranten u. s. w. liegt. Wird irgend eine dieser Wurzeln für q in die Form

$$A \sin q x\ e^{-\frac{k}{\varrho c} q^2 t}$$

eingesetzt, so resultirt eine singuläre Lösung unserer Aufgabe. Die allgemeine Lösung hat also die Form:

$$(9)\ldots\ldots\; u = A_1 \sin q_1 x\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t} + A_2 \sin q_2 x\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_2^2 t} + \\ + A_3 \sin q_3 x\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_3^2 t} + \ldots\ldots$$

In dieser allgemeinen Lösung wären nun noch die Constanten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ so zu bestimmen, dass der Anfangsbedingung

$$u = U \text{ für } t = 0 \text{ und für alle } x$$

Rechnung getragen wird. Es wären also die Werthe für $A_1, A_2, A_3, \ldots$ zu ermitteln, welche die Gleichung

$$u_0 = A_1 \sin q_1 x + A_2 \sin q_2 x + A_3 \sin q_3 x + \ldots\ldots$$

richtig machen. Die Berechnung dieser Constanten mag indess hier unausgeführt bleiben, da für die auszuführenden Versuche die numerischen Werthe dieser Constanten gar nicht bekannt zu sein brauchen.

Die Quadrate der Wurzelwerthe $q_1, q_2, q_3, \ldots$ nehmen mit wachsender Indexzahl rasch an Grösse zu; in den später zu besprechenden Versuchen über die Wärmeleitung des Wassers war z. B.

$$q_1^2 = 4.778,\; q_2^2 = 194.88,\; q_3^2 = 751.31$$

Die Werthe der einzelnen singulären Lösungen in dem allgemeinen Ausdrücke (9) nehmen demnach mit grösser werdender Indexzahl ausserordentlich rasch ab, und um so rascher, je länger der Zeitraum t ist, der seit Beginn des Processes der Wärmeleitung abgelaufen ist. Nach Ablauf einer gewissen Zeit kann also schon das zweite Glied des Ausdruckes (9) neben dem ersten vernachlässigt werden. Diese Zeitlänge war wegen der sehr klein gewählten Dicke Δ der Flüssigkeitslamelle in allen ausgeführten Beobachtungsreihen eine ausserordentlich kurze. In der Untersuchung der Wärmeleitung des Wassers war z. B. schon nach Ablauf von 30 Secunden seit Beginn der Wärmeleitung der Werth des Exponentialfactors des zweiten Gliedes des obigen Ausdrucks auf die kleine Grösse $\frac{1}{1050}$ herabgesunken. Und selbst für die schlechtesten der untersuchten flüssigen Wärmeleiter trat das nämliche schon nach Verfluss von circa 60 Secunden ein.

Es ergiebt sich also: Wird von dem Vorgange der Wärmeleitung in der Flüssigkeitslamelle während der ersten 60 Secunden abgesehen — diese Zeitlänge möge mit T bezeichnet werden — und wird nur der Verlauf der Temperaturbewegung in den auf die ersten 60 Secunden folgenden Zeitmomenten in Betracht gezogen, so ist der exacte Ausdruck derjenigen Temperaturvertheilung, die in irgend einem Zeitmomente, der um t Zeiteinheiten später als der Endpunkt von T eintritt, in der Flüssigkeitslamelle stattfindet, der folgende:

$$u = A_1 e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 T} \sin q_1 x \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t} = U_1 . \sin q_1 x \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t}$$

Die benutzte Beobachtungsmethode gestattet nur die Messung der Temperatur der obersten Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle (die Messung der Temperatur der oberen Kupferplatte); der zeitliche Verlauf dieser Temperatur ist durch den Ausdruck gegeben:

$$u_{x=\varDelta} = u' = U_1 \sin q_1 \varDelta \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t} = U'_1 \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 . t}$$

Aus dem gemessenen zeitlichen Verlaufe dieser Temperatur kann sodann das Wärmeleitungsvermögen k ermittelt werden, sobald die Grössen ϱ und c, sowie die Constante q_1 bekannt sind. Sind für eine Reihe von (etwa gleichweit von einander abstehenden) Zeitmomenten $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ die Temperaturen der oberen Kupferplatte gleich $u'_0, u'_1, u'_2, u'_3, \ldots$ gefunden worden, so ist das Wärmeleitungsvermögen k aus diesem System beobachteter Grössen durch folgende Formel ableitbar:

$$k = \frac{1}{t_{i+n} - t_i} \cdot \frac{1}{q_1^2} \cdot \varrho c \cdot lg\left(\frac{u'_i}{u'_{i+n}}\right).$$

4.

Die kleine Dicke Δ der benutzten Flüssigkeitslamellen hat zur Folge, dass trotz der verhältnissmässig geringen Wärmeleitungsfähigkeit aller Flüssigkeiten die Temperatur der oberen Kupferplatte so rasch abfällt, dass sie schon in einigen Minuten von ihrem anfänglichen Werthe (Zimmertemperatur) auf nahezu Null Grad herabsinkt. Zur Messung des zeitlichen Verlaufes dieser Temperatur muss daher ein Verfahren benutzt werden, das im Stande ist, richtige Momentanwerthe dieser Temperatur liefern zu können. Dieses leistet eine thermoelectrische Bestimmung der Temperatur der oberen Kupferplatte.

In der Gegend der Mitte der oberen Basisfläche dieser Kupferplatte wurden zwei sehr dünne Drähte zweier verschiedener Metalle eingelöthet. Die andere Löthstelle dieser Drähte wurde dauernd in Eis auf 0° erhalten. Diese Thermoelemente waren aus solchen Metallen gebildet, dass innerhalb der nur um wenige Grade von einander abstehenden Temperaturen der beiden Löthstellen die erregten thermoelectromotorischen Kräfte den wirkenden Temperaturdifferenzen der Löthstellen bis auf verschwindend kleine Abweichungen proportional waren. In dem Zeitmomente, den wir oben als Moment T bezeichnet haben, wurde das

Thermoelement in den Kreis eines aperiodisch gestellten Galvanometers eingeschaltet und nach Verlauf von weiteren 20 Secunden wurde der Stand des Galvanometermagnets mit Hülfe von Fernrohr, Spiegel und Skala bei gut wärmeleitenden Flüssigkeiten von 10 zu 10 Secunden, bei schlechter leitenden von 15 zu 15 Secunden abgelesen. Es lässt sich leicht einsehen, dass die in den einzelnen Zeitmomenten abgelesenen Abweichungen des Galvanometermagnets von seiner Ruhelage ein genaues relatives Maass der Temperaturen geben, welche die obere Kupferplatte, mithin auch die obere Grenzfläche der Flüssigkeitslamelle, in diesen Zeitmomenten besitzt.

Der Galvanometermagnet möge sich zu Anfang im Ruhezustande befunden haben. Im Zeitmomente T werde das Galvanometer plötzlich in den thermoelectrischen Kreis eingeschaltet und dauernd darin gelassen. Um den Ausschlag zu erhalten, welchen der Galvanometermagnet nach Verlauf der Zeitlänge t seit dem Momente der Schliessung zeigt, gehen wir von der allgemeinen Gleichung aus, welche die Bewegung des durch den thermoelectrischen Strom abgelenkten Magnets bestimmt. Zur Zeit t ist die Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen des Thermoelements

$$u' = U'_1 \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t};$$

die in diesem Zeitmomente wirksame thermoelectromotorische Kraft ist dann nach der oben gemachten Bemerkung:

$$E = \alpha . U' . e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 . t}$$

Nennen wir W die Summe aller Widerstände des thermoelectrischen Kreises, so ist die Intensität des zur Zeit t erzeugten thermoelectrischen Stromes

$$i = \alpha \frac{U'}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 \cdot t};$$

das Drehungsmoment, welches dieser Strom auf den Galvanometermagnet ausübt ist [sobald die Ablenkung einige Grade nicht übersteigt]

$$M \cdot G \cdot \frac{\alpha U^1}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t};$$

wo M das Moment des Magnets und G die Constante des Galvanometers bezeichnet. Wird das Trägheitsmoment des Magnets Q, die Grösse des Dämpfungsmomentes für die Einheit der Winkelgeschwindigkeit D, die horizontale Componente der wirksamen magnetischen Richtkraft H und die Grösse des zur Zeit t vorhandenen Ausschlages des Magnets x genannt, so ist die allgemeine Bewegungsgleichung des Galvanometermagnets:

$$Q \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + MHx - MG \cdot \frac{\alpha U'}{W} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t} = 0$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + Bx - C e^{-gt} = 0$$

wenn zur Abkürzung

$$A = \frac{D}{Q} \quad \Big| \quad B = \frac{MH}{Q} \quad \Big| \quad C = \frac{MG\alpha U'}{Q \cdot W} \quad \Big| \quad g = \frac{k}{\varrho c} q_1^2$$

gesetzt wird. Das allgemeine Integral dieser Bewegungsgleichung hat die Form:

$$x = P_1 e^{-\lambda_1 t} + P_2 e^{-\lambda_2 t} + N e^{-gt}$$

wo λ_1 und λ_2 die (reellen) Grössen

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}\\ \lambda_2 &= \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}\end{aligned}\right\}$$ bezeichnen, N den Werth $\frac{C}{g^2 - Ag + B}$

darstellt und wo P_1 und P_2 Constante sind, welche durch den Anfangszustand des Magnets bestimmt werden müssen. Zur Zeit $t = 0$ war der Ausschlag des Magnets Null, seine Winkelgeschwindigkeit hatte aber einen von Null verschiedenen Werth, etwa den Werth γ_0. Die beiden Constanten P_1 und P_2 sind also durch die Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} 0 &= P_1 + P_2 + N \\ -\gamma_0 &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + gN \end{aligned}$$

und der Ausschlag des Galvanometers zur Zeit t ist:

$$x = \left(-\frac{\gamma_0}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{N(g-\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) e^{-\lambda_1 t} + \\ + \left(\frac{\gamma_0}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{N(g-\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) e^{-\lambda_2 t} + N e^{-gt}$$

Die Werthe λ_1 und λ_2 wurden in bekannter Weise möglichst gross gegenüber g gemacht; in allen den ausgeführten Versuchsreihen waren λ_1 und λ_2 gegen 160 bis 290 mal so gross als g. In Folge davon waren schon wenige Secunden nach der Schliessung des thermoelectrischen Stromes die beiden ersten Glieder des vorstehenden Ausdruckes völlig bedeutungslos gegenüber dem letzten Gliede; der Ausschlag des Galvanometermagnets war also (abgesehen von den ersten Secunden nach der Schliessung) in jedem Zeitmomente t durch die Form gegeben:

$$x = N e^{-gt} = \frac{MG.\alpha.U_1'}{Q \cdot W} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{\varrho c} q_1^2\right)^2 - A \frac{k}{\varrho c} q_1^2 + B} \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t}$$

Die Ablenkung des Galvanometermagnets ist also unter diesen Umständen in jedem Zeitmomente der Temperatur proportional, die in diesem Zeitmomente in der oberen Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle vorhanden ist. Aus den Galvanometerausschlägen x_0, x_1, x_2, ..., die in den Zeitmomenten t_0, t_1, t_2, ... auftreten, lässt sich daher die Wärmeleitung der untersuchten Flüssigkeit nach der Formel berechnen:

$$k = \frac{\varrho . c}{q_1^2} \frac{1}{t_{n+i} - t_i} \, lg \left(\frac{x_i}{x_{n+i}} \right).$$

Die Grösse q_1 der rechten Seite dieser Gleichung ist die kleinste Wurzel der transcendenten Gleichung

$$q\varDelta \, tg \, q\varDelta = \frac{F\varDelta \varrho c}{M_1 c_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{h_1 F_1 \varrho c \varDelta^2}{k M_1 c_1} \frac{1}{(q\varDelta)^2}\right)},$$

deren rechte Seite durch die Ersetzung der Masse M_1 durch das Product $\varDelta_1 F_1 \varrho_1$ in die mehr symmetrische Form gebracht werden kann:

$$q\varDelta \, tg \, q\varDelta = \frac{\varDelta \varrho c}{\varDelta_1 \varrho_1 c_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{h_1 F_1 \varrho c \varDelta^2}{k F \varrho_1 c_1 \varDelta_1} \frac{1}{(q\varDelta)^2}\right)}$$

Da das, nur mit Hülfe der bekannten Wurzelwerthe q_n ermittelbare, Wärmeleitungsvermögen k in diese Gleichung eingeht, ist eine exacte, ganz allgemeine Bestimmung dieser Wurzelwerthe unmöglich. Indess lässt sich sofort übersehen, dass sich diese Wurzeln q_n bei passender Gestaltung der Versuchsmethode durch ein Annäherungsverfahren mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen lassen. Da die Grösse h_1 durch ein sogleich zu besprechendes Verfahren gleich 0.0057 und der Werth von k für die untersuchten Flüssigkeiten gleich 0.02 bis 0.08 gefunden wurde, da ferner die Lamellendicke $\varDelta$ nur den kleinen Werth von 0.23 Cm., $\varDelta_1$ dagegen die beträchtliche Grösse 1.02 Cm. besass und die Flächengrössen F und F_1 wegen der Plattengestalt nur wenig von einander verschieden sind, war in den ausgeführten Versuchen der Factor $\frac{h_1 F_1 c \Delta^2}{k F \varrho_1 c_1 \Delta_1}$ nur eine sehr kleine Grösse; in den Versuchen über die Wärmeleitung des Wassers betrug er z. B. nur 0.0063. Der erhebliche Grössenwerth des Factors $\frac{\Delta \varrho c}{\Delta_1 \varrho_1 c_1}$ lässt die kleinste Wurzel $q\Delta$ nie sehr klein ausfallen; für Wasser war z. B. der kleinste Wurzelwerth $(q\Delta)_1$ gleich 0.5. Zur Bestimmung des kleinsten Wurzelwerthes $(q\Delta)_1$ der obigen transcendenten Gleichung kann man also in erster, ziemlich grosser, Annäherung von dem Gliede $\frac{h_1 F_1 \varrho c \Delta^2}{k F \varrho_1 c_1 \Delta_1} \cdot \frac{1}{(q\Delta)^2}$ absehen. Man berechnet die erste Wurzel der Gleichung

$$q\Delta \; tg \; q\Delta = \frac{\Delta \varrho c}{\Delta_1 \varrho_1 c_1},$$

ermittelt daraus die Grösse $q_1{}^2$, sucht mit Hülfe derselben aus den gemachten Temperaturbeobachtungen den (bis auf einige Procente angenähert richtigen) Grössenwerth des Wärmeleitungsvermögens k, setzt diesen angenäherten Werth von k in die unverkürzte transcendente Gleichung ein und leitet jetzt den exacteren Werth von q_1 und daraus den richtigen Werth von k ab.

5.

Zur genauen Berechnung des Wärmeleitungsvermögens k aus den angestellten Beobachtungen ist zunächst die Kenntniss der Grösse des äusseren Wärmeleitungsvermögens h_1 der oberen Kupferplatte erforderlich. Diese Grösse wurde wiederholt durch besondere Versuchsreihen ermittelt. Die Kupferplatte mit dem eingelötheten Thermoelemente wurde an zwei dünnen Fäden in derselben auf 0° abgekühlten in Hülle aufgehangen, in welcher die Wärmeleitung der Flüssigkeiten vor sich ging. Ist die Temperatur der Kupfermasse M_1 in dem Momente t gleich u und besitzt die Kupferplatte die gesammte Oberfläche O, so besteht in dem Zeitmomente t folgender Differentialzusammenhang zwischen u und t:

$$- M_1 c_1 du = h_1 O.u.dt$$

woraus sich der folgende Integralzusammenhang ergiebt:

$$lg\left(\frac{u_0}{u}\right) = \frac{h_1 O}{M_1 c_1} \cdot t,$$

sobald mit u_0 die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Temperatur bezeichnet und gleichzeitig die (sehr angenähert richtige) Annahme getroffen wird, dass die Grösse h_1 innerhalb des engen Temperaturintervalles der Abkühlung constant ist. Zur Bestimmung des Temperaturquotienten $\frac{u_0}{u}$ wurde die andere Löthstelle des Thermoelements dauernd auf 0° abgekühlt und das Thermoelement dauernd in den Kreis eines aperiodisch gestellten Galvanometers eingeschaltet. Da nach der oben geführten Rechnung die Temperaturen u_0 und u den in denselben Zeitmomenten stattfindenden Ausschlägen x_0, x der Galvanometernadel proportional sind, so lässt sich an die Stelle der letzten Gleichung auch die folgende setzen:

$$lg\left(\frac{x_0}{x}\right) = \frac{h_1 . O}{M_1 c_1} \cdot t$$

In den ausgeführten Versuchsreihen überliess man die Kupferplatte der Abkühlung von Zimmertemperatur an circa 60–80 Minuten hindurch und notirte von zwölfter Minute zu zwölfter Minute die vorhandene Ablenkung der Galvanometernadel. Um etwa eintretende Aenderungen der Ruhelage eliminiren zu können, wurde von fünfzehn zu fünfzehn Minuten diese Ruhelage von neuem bestimmt.

Die folgende Tabelle giebt die Resultate der ersten zur Bestimmung von h_1 ausgeführten Versuchsreihe. In der ersten Spalte stehen die Zeitmomente der Ablesungen; die zweite Spalte giebt die auf Bögen reducirten Ablenkungen des Galvanometermagnets in Einheiten der benutzten Millimeterscala; die dritte Spalte enthält die den Ablenkungen entsprechenden Temperaturen der Kupferplatte; die vierte Spalte liefert die gewöhnlichen Logarithmen der Ablenkungen und die letzte Spalte giebt die Differenzen dieser auf einander folgenden Logarithmen.

		mm	°		
3^h	6′	392.5	23.03	2.59384	
					0.08009
	18′	326.4	19.20	2.51375	
					0.07966
	30′	271.7	15.99	2.43409	
					0.07787
	42′	227.1	13.36	2.35622	
					0.07747
	54′	190.0	11.18	2.27875	
					0.07927
	66′	158.3	9.31	2.19948	
					0.07661
	78′	132.7	7.80	2.12287	

Hieraus ergiebt sich im Mittel für die Differenz der natürlichen Logarithmen je zweier um 1 Minute auseinander liegender Temperaturen:

$$\frac{h_1 O}{M_1 c_1} = 0.01504$$

Zwei andere, später ausgeführte Versuchsreihen ergaben für dieselbe Grösse die Mittelwerthe 0.01518 und 0.01515. Aus dem allgemeinen Mittelwerthe 0.01512 und den weiteren Daten: $O = 456.43$ Qcm., $M_1 = 1851.2$ Grm. und $c_1 = 0.0932$ resultirt für das äussere Wärmeleitungsvermögen der Kupferplatte der Werth

$$h_1 = 0.00570,$$

welchem Werthe Gramm, Centimeter, Minute und 1° C. als Einheiten zu Grunde liegen.

II. Resultate der benützten Versuchsmethode.

1.

Nachdem der Werth dieser Hülfsgrösse h_1 ermittelt worden war, konnte zur Bestimmung des innern Wärmeleitungsvermögens der verschiedenen Flüssigkeiten geschritten werden. Die Herstellung der Flüssigkeitslamelle, deren Wärmeleitung untersucht werden sollte, geschah in folgender Weise. Auf die genau horizontal gestellte, gut plan abgeschliffene untere Kupferplatte von 16.03 Cm. Durchmesser und ca. 0,5 Cm. Dicke wurden 3 genau gleich dicke — 0.231 Cm. dicke — Glasstückchen von 2 Mm. Breite und 3 Mm. Länge gelegt; auf diese 3 Glasstückchen wurde die obere, auf ihrer untern Fläche möglichst plan geschliffene Kupferplatte von genau demselben Durchmesser, 16.03 Cm., aufgesetzt. In der Mitte der oberen Kupferplatte war eine etwa 1 Mm. weite, nach oben etwas erweiterte Durchbohrung angebracht, durch welche mittelst einer eng ausgezogenen Glasröhre die zu untersuchende Flüssigkeit zwischen die Platten gefüllt wurde. Während des Füllens wurde dafür Sorge getragen, dass alle Luft aus dem Zwischenraum beider Platten durch die Flüssigkeit verdrängt wurde und die Zufuhr an Flüssigkeit wurde unterbrochen, sowie sich die Flüssigkeit rings an den Plattenrändern mit einem circa 1 Mm. dicken, regelmässig gekrümmten Bauche herausdrängte. Die zäheren Flüssigkeiten, wie Wasser, Salzlösungen, Oele, Glycerin, wurden durch die Capillarkräfte so fest an den Plattenrändern gehalten, dass dieselbe Füllung beliebig viele Male zu Versuchen benutzt werden konnte. Gewöhnlich wurde die Füllung nach je drei Versuchen wieder erneuert.

Die durch die Wärmeleitung allmälig erfolgende Abnahme der Temperatur der Flüssigkeitslamelle hatte natürlich eine geringe Contraction derselben zur Folge. Durch diese Contraction zog sich die Ausbauchung der Flüssigkeitslamelle allmälig zurück und gieng gegen das Ende des Versuches in eine geringe Einbauchung an den Plattenrändern über. Beim Einfüllen der Flüssigkeit wurde die Weite der Ausbauchung so gross gewählt, dass die nach erfolgter Abkühlung stattfindende Einbauchung von nahezu gleicher Grösse war. Die Existenz dieser geringen Aus- resp. Einbauchung der Flüssigkeitslamelle ändert natürlich an den Resultaten der Rechnung, die darauf keine Rücksicht nahm, nur äusserst wenig, da ja die Flächengrösse F, durch welche die Wärmeleitung vor sich geht, mehr als 200 Qcm. umfasst.

Zur Untersuchung der sehr leichtflüssigen und rasch verdampfenden Flüssigkeiten, wie Aether, Schwefelkohlenstoff, Benzin u. s. w. wurde die Herrichtung der Lamelle in etwas anderer Weise vorgenommen. Auf dieselbe untere Kupferplatte wurde ein sehr dünner, nur 0.75 Mm. dicker, circa 2 Cm. hoher Glasring von genau demselben Durchmesser 16.03 Cm. mit Gummi aufgekittet. Der Durchmesser der obern Kupferplatte war soweit verkleinert worden (bis auf 15.90 Cm.), dass dieselbe bequem in diesen Ring eingesetzt, resp. herausgenommen werden konnte. Nachdem die 3 oben erwähnten Glasstückchen auf die untere Kupferplatte gelegt worden waren, wurde die obere Kupferplatte vorsichtig in den Glasring eingesetzt und sodann die zu untersuchende Flüssigkeit in langsamer Strömung so lange in den Zwischenraum zwischen beiden Platten eingefüllt, bis alle Luft verdrängt war. Hierauf wurde noch soviel Flüssigkeit nachgefüllt, dass der sehr enge Zwischenraum zwischen der Mantelfläche der oberen Kupferplatte und der innern Fläche des dünnen Glascylinders bis zum vierten Theile seiner Höhe gefüllt wurde, damit trotz der geringen Contraction, die durch die allmälige Abkühlung der Flüssigkeitslamelle während des Versuches in letzterer eintreten musste, der Zwischenraum zwischen beiden Platten stets vollständig mit Flüssigkeit erfüllt blieb.

Nach der Füllung überliess man das Plattensystem eine Zeit lang der Zimmertemperatur und beobachtete während dieser Zeit die Ruhelage des Galvanometermagnets 10 Minuten hindurch von Minute zu Minute. Es wurde nur dann zur Ausführung einer Beobachtungsreihe geschritten, wenn die Aenderungen der magnetischen Declination in gleichen Zeitlängen nahezu gleich gross waren. Grössere Aenderungen der Ruhelage des Galvanometermagnets während einer Minute als 1.2 Skalentheil kamen im Laufe aller Versuchsreihen nicht vor. War die Ruhelage des Galvanometermagnets und ihre Aenderung pro Minute hinreichend sicher festgelegt, so wurde das Plattensystem an einer über Rollen laufenden Schnur vorsichtig auf eine rasch untergeschobene planparellel geschliffene und horizontal gestellte Eisplatte herabgelassen und sofort mit einer dauernd auf 0° abgekühlten hohlen cylindrischen Kappe aus Kupferblech überdeckt. Zwei Minuten später wurde das Thermoelement, dessen eine Löthstelle wie schon oben erwähnt wurde permanent in Eis gehalten wurde, in den Galvanometerkreis eingeschaltet und nach Ablauf weiterer 20 Secunden begannen die Ablesungen der Ablenkungen des Galvanometermagnets. Für die besseren Wärmeleiter wie Wasser, Salzlösungen u. s. w. wurden diese Ablesungen mit dem Schlage jeder zehnten Secunde, für die schlechteren Wärmeleiter, wie Alkohol, Benzin u. s. w. mit dem Schlage jeder fünfzehnten oder zwanzigsten Secunde vorgenommen. War die

Ablenkung des Galvanometermagnets auf circa 100 Skalentheile herabgesunken, was nach 4 bis 8 Minuten eintrat, so wurde die Versuchsreihe abgebrochen, der Galvanometerkreis geöffnet, die neue Ruhelage des Magnets bestimmt und die minutliche Aenderung dieser Ruhelage während weiterer zehn Minuten beobachtet. Mit Hülfe der Annahme, dass die während der Versuchsreihe stattgefundene minutliche Aenderung der Ruhelage gleich dem Mittel aus der vor und aus der nach der Versuchsreihe constatirten minutlichen Aenderung war (eine Annahme, die in Anbetracht des kurzen zwischen den Beobachtungen der Ruhelagen liegenden Zeitintervalls von 6 bis 10 Minuten ganz unbedenklich ist), liess sich für jeden Zeitmoment der Ablesungen der Magnetablenkungen die zugehörige Ruhelage herausrechnen.

Zur Veranschaulichung der Leistungsfähigkeit der benutzten Methode mögen jetzt die vollständigen Protocolle von 3 Versuchsreihen folgen. Die erste Versuchsreihe ist die erste, die ich an dem besten nichtmetallischen flüssigen Wärmeleiter, an Wasser, ausgeführt habe; die zweite ist die erste Versuchsreihe, die an Glycerin, einer Flüssigkeit von mittlerem Wärmeleitungsvermögen ausgeführt wurde; die letzte Tabelle enthält die letzte Versuchsreihe, die ich mit dem schlechtesten nichtmetallischen flüssigen Wärmeleiter, mit Benzin, unternommen habe.

Die erste Spalte in jeder dieser 3 Tabellen enthält die Beobachtungszeit. Die zweite Spalte giebt die Ablenkung x des Galvanometermagnets (in Mm. ausgedrückt und bereits auf Bogen reducirt), die dritte Spalte liefert die der Ablenkung x entsprechende Temperatur u der obern Grenzschicht der Flüssigkeitslamelle, die vierte Spalte enthält die gewöhnlichen Logarithmen der Ablenkungen und die fünfte Spalte giebt die Differenzen der Logarithmen je zweier Ablenkungen, die um die Zeiteinheit, die Minute, von einander abstehen.

Wärmeleitung des Wassers.

Zeit	x	u	$\log x$	$\Delta \log x$
$3^h\ 2'\ 0''$	266.5	15.59	2.42570	0.16611
$10''$	251.3	14.69	2.40019	0.16567
$20''$	235.4	13.76	2.37181	0.16579
$30''$	219.9	12.86	2.34223	0.16354
$40''$	207.3	12.12	2.31660	0.16248
$50''$	193.6	11.32	2.28691	0.16208
$3'\ 0''$	181.8	10.63	2.25959	0.16197
$10''$	171.6	10.04	2.23452	0.16337
$20''$	160.7	9.41	2.20602	0.16031
$30''$	150.9	8.76	2.17869	0.15916
$40''$	142.6	8.34	2.15412	0.16024
$50''$	133.3	7.80	2.12483	0.15822
$4'\ 0''$	125.2	7.33	2.09760	0.15609
$10''$	117.8	6.89	2.07115	0.15628
$20''$	111.1	6.49	2.04571	0.15529
$30''$	104.6	6.12	2.01953	0.15265
$40''$	98.6	5.76	1.99388	0.15502
$50''$	92.6	5.41	1.96661	0.15571
$5'\ 0''$	87.4	5.14	1.94151	0.15618
$10''$	82.2	4.78	1.91487	
$20''$	77.7	4.54	1.89042	
$30''$	73.6	4.30	1.86688	
$40''$	69.0	4.04	1.83886	
$50''$	64.7	3.80	1.81090	
$6'\ 0''$	61.0	3.56	1.78533	

Wäre der Werth des Quotienten $\frac{k}{\varrho c}$ beim Wasser eine von der Temperatur unabhängige Grösse, so müssten die in der letzten Spalte stehenden Differenzen durch die ganze Beobachtungsreihe constant bleiben. Dieses ist durch-aus nicht der Fall; die Werthe dieser Differenzen sinken stetig mit abnehmender Temperatur. Die Mittelwerthe dieser Differenzen während der beiden ersten, der beiden mittleren und der beiden letzten Temperaturen sind z. B.

0.16428, 0.16054 und 0.15524

Diese Aenderungen des Quotienten $\frac{k}{\varrho c}$ sind so beträchtlich und haben eine solche Richtung, dass sie aus einer Variation des Werthes ϱc, d. h. der specifischen Wärme der Volumseinheit nicht erklärt werden können; denn diese letztere Grösse wächst mit steigender Temperatur und der Coefficient der Zunahme für 1° C. ist für das benützte Temperaturintervall höchstens von der Ordnung 0.0005. Schon diese erste Beobachtungsreihe legt also die Thatsache auf das evidenteste dar, dass die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers mit steigender Temperatur zunimmt und zwar ganz erheblich zunimmt.

Diese erste für Wasser ausgeführte Versuchsreihe ist die unregelmässigste von allen, die ich ausgeführt habe. In allen später ausgeführten änderten sich die Differenzen der letzten Spalte bei Weitem regelmässiger. Die in dieser ersten Versuchsreihe vorhandenen Sprünge in den Differenzen der letzten Spalte rühren unzweifelhaft von kleinen unregelmässigen Schwankungen der Ruhelage des Galvanometermagnets her, die nicht controllirt werden konnten. Die der Physik im eidgenössischen Polytechnikum zugewiesenen Räume sind leider so gelegen und von solcher Beschaffenheit, dass kleine unregelmässige Schwankungen der Ruhelage eines fein gestellten Galvanometermagnets nicht verhindert werden können. In anderen, speciell für physikalische Zwecke eingerichteten Instituten wird man die benutzte Methode viel besser auswerthen können, als mir es in unseren, auch den bescheidensten physikalischen Forderungen kaum genügenden Räumlichkeiten möglich war.

Auch aus den folgenden Versuchsreihen über die Wärmeleitung im Glycerin und Benzin lassen sich dieselben Folgerungen ziehen, die soeben für die Wärmeleitung im Wasser aus der zuerst angeführten Versuchsreihe gezogen worden sind.

Wärmeleitung des Glycerins.

Zeit	x	u	$\log x$	$\Delta \log x$
4^h 16′ 0″	325.5	19.49°	2.51255	0.08832
10″	315.2	18.87	2.49859	0.09001
20″	304.0	18.20	2.48287	0.08982
30″	294.2	17.62	2.46864	0.08933
40″	284.2	17.02	2.45362	0.08982
50″	275.0	16.47	2.43933	0.09025
17′ 0″	265.6	15.90	2.42423	0.08938
10″	256.2	15.34	2.40858	0.08843
20″	247.2	14.80	2.39305	0.08770
30″	239.5	14.34	2.37931	0.08839
40″	231.1	13.84	2.36380	0.08826
50″	223.4	13.38	2.34908	0.08710
18′ 0″	216.2	12.94	2.33485	0.08762
10″	209.0	12.51	2.32015	0.08715
20″	202.0	12.09	2.30535	0.08708
30″	195.4	11.70	2.29092	0.08707
40″	188.6	11.29	2.27554	0.08633
50″	182.8	10.95	2.26198	0.08676
19′ 0″	176.7	10.58	2.24723	0.08676
10″	171.0	10.24	2.23300	
20″	165.3	9.90	2.21827	
30″	159.9	9.57	2.20385	
40″	154.6	9.26	2.18921	
50″	149.7	8.97	2.17522	
20′ 0″	144.7	8.66	2.16047	

Die Mittelwerthe der Differenzen der letzten Spalte für die beiden ersten, die beiden mittleren und die beiden letzten Minuten sind:

0.08959, 0.08821 und 0.08697

Wärmeleitung des Benzins.

Zeit	x	u	$\log x$	$\Delta \log x$
7h 3′ 0″	223.4	14.41°	2.34908	0.05023
20″	215.0	13.87	2.33244	0.05027
40″	206.8	13.34	2.31555	0.05002
4′ 0″	199.0	12.26	2.29885	0.04965
20″	191.5	12.35	2.28217	0·04917
40″	184.3	11.89	2.26553	0.04857
5′ 0″	177.5	11.45	2 24920	0.04808
20″	171.0	11.03	2.23300	0.04774
40″	164.8	10.63	2.21696	0.04729
6′ 0″	158.9	10.25	2.20112	0.04700
20″	153.2	9.88	2.18526	0.04696
40″	147.8	9.54	2.16967	0.04713
7′ 0″	142.6	9.20	2.15412	0.04759
20″	137.5	8.87	2.13830	0.04698
40″	132.6	8.56	2.12254	0.04626
8′ 0″	127.8	8.24	2.10653	0.04508
20″	123.4	7.96	2.09132	
40″	119.2	7.69	2.07628	
9′ 0″	115.2	7.43	2.06145	

Die Mittelwerthe der Differenzen der letzten Spalte für das erste, das zweite und das letzte Drittel der Beobachtungsreihe sind:

0.04987, 0.04773 und 0.04667.

Eine ähnlich grosse Abnahme der Differenz der Logarithmen je zweier um eine Zeitminute abstehender Ausschläge des Galvanometermagnets zeigte sich im Verlaufe jeder Beobachtungsreihe und bei allen untersuchten Flüssigkeiten. Die Wärmeleitungsfähigkeit der 14 untersuchten Flüssigkeiten nimmt daher mit steigender Temperatur so erheblich zu, dass dieses Factum schon aus einer Versuchsreihe, die sich nur über ein Temperaturintervall von circa 10° hinerstreckt, in der ausgeprägtesten Weise hervortritt.

Die Annahme, die wir oben zur Entwickelung der Theorie der Versuche gemacht haben, die Wärmeleitungsfähigkeit k der Flüssigkeiten ist eine Constante, bestätigt sich also nicht. Es wäre daher jetzt nothwendig, die Theorie der ausgeführten Versuche auf Grund der Annahme zu entwickeln, dass die innere Wärmeleitungsfähigkeit k der Flüssigkeiten ebenso wie die Dichte und die specifische Wärme eine Function der Temperatur, etwa in erster Annäherung eine lineare Function der Temperatur ist. Ich habe versucht, die Theorie auf Grund dieser Annahme in möglichster Strenge zu entwickeln, bin aber bei der Ausführung der Rechnung auf Schwierigkeiten gestossen, die ich bis jetzt nicht vollkommen zu meiner Zufriedenheit heben konnte.

Ich begnüge mich daher vorläufig mit einer ersten Annäherung: ich berechne das Wärmeleitungsvermögen aus den Mittelwerthen der Differenzen der Logarithmen der um die Zeiteinheit von einander abstehenden Galvanometerausschläge und sehe in diesem Werthe einen sehr angenähert richtigen Mittelwerth des Wärmeleitungsvermögens, welcher einer Temperatur entspricht, die gleichkommt der mittleren Temperatur der Flüssigkeitslamelle.

Die folgenden Tabellen enthalten die Resultate von 89 Versuchsreihen, die ich an 14 verschiedenen nichtmetallischen Flüssigkeiten und für nahezu dieselbe mittlere Temperatur ausgeführt habe. Die Reihenfolge der untersuchten Flüssigkeiten ist nach der Intensität des Wärmeleitungsvermögens geordnet und zwar beginnt die Reihe mit dem besten flüssigen nichtmetallischen Wärmeleiter, dem Wasser. Unter dem Namen der untersuchten Flüssigkeit befinden sich diejenigen Werthe, welche die Dichte ϱ und die specifische Wärme c derselben für die benutzte mittlere Versuchstemperatur besitzen. Darauf folgen die Mittelwerthe der Differenzen der gewöhnlichen Logarithmen der um eine Zeitminute von einander abstehenden Galvanometerausschläge und die zugehörige Mitteltemperatur der Flüssigkeitslamelle. Daran reiht sich der allgemeine Mittelwerth dieser Differenz und der dazu gehörige allgemeine Mittelwerth der Lamellentemperatur und daran schliesst sich endlich der aus diesem allgemeinen Mittelwerthe berechnete Mittelwerth des Wärmeleitungsvermögens der Flüssigkeit an. Diese letztere Grösse wurde nach der früher besprochenen Weise mittelst der Daten berechnet:

$\Delta = 0.231$ Cm.	$\varrho_1 = 8.865$	$h_1 = 0.0057$
$\Delta_1 = 1.023$ Cm.	$c_1 = 0.0932$	$\frac{F_1}{F} = 1.252$

W a s s e r.

$\varrho = 1.000$

$c = 1.000$

0.15786	4°.1
0.15428	4 .2
0.15537	4 .1
0.15415	4 .2
0.15738	4 .3
0.15736	4 .0
0.15521	4 .1
0.15810	4 .2
0.15677	4 .0
0.15521	4 .1
0.15619	4°.1

$k = 0.0745$

K u p f e r v i t r i o l l ö s u n g.

$\varrho = 1.160$

$c = 0.848$

0.14931	4°.5
0.14762	4 .2
0.15030	4 .3
0.14961	4 .7
0.14884	4 .4
0.14743	4 .2
0.14780	4 .6
0.14870	4°.4

$k = 0.0710$

In dem Falle der Wärmeleitung des Wassers ist allerdings das Auftreten von Flüssigkeitsströmungen in Folge von Dichtigkeitsunterschieden nicht vollständig durch die Versuchsanordnung ausgeschlossen. Die anomale Variation der Dichte des Wassers zwischen 0° und 8° lässt in den unteren Partieen der Wasserlamelle während der ganzen Versuchsdauer und in der ganzen Dicke der Wasserlamelle während der letzten Stadien des Versuchs dichtere Schichten über weniger dichten entstehen. Es lässt sich indess sofort begreifen, dass wegen der sehr geringen Differenz der Wasserdichten zwischen 0° und 8° — dieser Unterschied beträgt nur 0.0001 des Mittelwerths der Dichte dieses Temperaturintervalls —, wegen der sehr grossen Zähigkeit des Wassers in diesen niederen Temperaturen und wegen der sehr geringen Dicke der benutzten Wasserlamelle eine irgend erhebliche Flüssigkeitsströmung nicht zu Stande kommen und mithin auch die durch Strömungen bewirkte Modification des Vorganges der Wärmeleitung nur eine ganz geringe sein kann. Dass dieses in der That der Fall ist, liess sich mit aller Schärfe experimentell darlegen. Ganz verdünnte wässerige Salzlösungen, wie äusserst schwach concentrirte Lösungen von Kochsalz und Zinkvitriol, welche keine anomale Variation der Dichte zwischen 0° und 8° besitzen, zeigten Werthe für das Wärmeleitungsvermögen, die so gut wie vollständig genau mit dem gefundenen Wärmeleitungsvermögen des Wassers übereinstimmten.

Zinkvitriollösung.

$\varrho = 1.134$

$c = 0.861$

0.15198	4°.6
0.15172	4 .7
0.14827	4 .5
0.14707	4 .4
0.14974	4 .5
0.14797	4 .5
0.14946	4°.5

$k = 0.0711$

Zinkvitriollösung.

$\varrho = 1.272$

$c = 0.765$

0.14551	4°.7
0.14749	4 .5
0.14665	4 .3
0.14716	4 .4
0.14570	4 .5
0.14690	4 .4
0.14650	4°.5

$k = 0.0698$

Zinkvitriollösung.

$\varrho = 1.362$

$c = 0.706$

0.14764	4°.7
0.14533	4 .5
0.14377	4 .6
0.14544	4 .5
0.14511	4 .4
0.14442	4 .5
0.14529	4°.5

$k = 0.0691$

Kochsalzlösung.

$\varrho = 1.178$

$c = 0.800$

0.14671	4°.3
0.14822	4 .4
0.14783	4 .5
0.14837	4 .4
0.14671	4 .2
0.14638	4 .5
0.14737	4°.4

$k = 0.0692$

Glycerin.

$\varrho = 1.220$

$c = 0.605$

0.08802	6°.7
0.08828	6 .4
0.08718	6 .2
0.08793	6 .2
0.08884	6 .5
0.08744	6 .4
0.08795	6°.4

$k = 0.0402$

Alkohol.

$\varrho = 0.795$

$c = 0.566$

0.06592	5°.1
0.06651	4 .9
0.06607	5 .2
0.06631	5 .3
0.06670	5 .4
0.06542	5 .3
0.06615	5°.2

$k = 0.0292$

Schwefelkohlenstoff.

$\varrho = 1.271$

$c = 0.254$

0.05988	5°.5
0.05924	5 .4
0.05842	5 .2
0.05849	5 .3
0.05931	5 .6
0.05910	5 .5
0.05907	5°.4

$k = 0.0250$

Aether.

$\varrho = 0.728$

$c = 0.520$

0.05667	5°.4
0.05701	5 .5
0.05535	5 .2
0.05625	5 .3
0.05582	5 .3
0.05679	5 .5
0.05631	5°.4

$k = 0.0243$

Olivenöl.

$\varrho = 0.911$
$c = 0.471$

0.05412	6°.8
0.05505	6 .7
0.05390	6 .8
0.05401	6 .5
0.05435	6 .5
0.05471	6 .6
0.05436	6°.6

$k = 0.0235$

Chloroform.

$\varrho = 1.485$
$c = 0.233$

0.05194	6°.5
0.05116	6 .2
0.05148	6 .3
0,05165	6 .6
0.05098	6 .4
0.05142	6 .3
0.05127	6°.4

$k = 0.0220$

Citronenöl.

$\varrho = 0.818$
$c = 0.438$

0.05057	5°.4
0.05060	5 .6
0.04939	5 .4
0.04996	5 .3
0.05113	5 .7
0.04917	5 .1
0.05001	5°.4

$k = 0.0210$

Benzin.

$\varrho = 0.701$
$c = 0.381$

0.04794	5°.2
0.04821	5 .0
0.04722	5 .3
0.04780	4 .9
0.04753	5 .2
0,04792	5 .1
0.04777	5°.1

$k = 0.0200$

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)