Das innere Wärmeleitungsvermögen von Blei, Wismuth und Wood's Metall

von

Hans Kronauer

in Zürich.

Einleitung.

Seitdem Fourier in seinen klassischen Untersuchungen die (mathematischen) Principien der Wärmeleitung festgestellt, sind mancherlei Methoden ausgebildet worden, um das sog. innere Wärmeleitungsvermögen k fester Körper zu bestimmen, sei es in relativem, sei es in absolutem, auf gewisse Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse bezogenem Maasse. Dieselben stützen sich auf die Beobachtung entweder der stationären oder der mit der Zeit veränderlichen Temperaturvertheilung, welche eintritt, wenn die Körper in bestimmter Weise erwärmt werden; oder auch auf die Messung der Wärmemenge, welche in einer gewissen Zeit von einem Orte höherer Temperatur durch die Substanz zu einem Orte niederer Temperatur übergeleitet wird.

Auf dem zuletzt erwähnten Princip beruhen die Versuche, mittelst deren Péclet [1]) die ersten absoluten Bestimmungen des innern Wärmeleitungsvermögens von Metallen ausgeführt hat. Eine ebene Platte von 15—20 mm. Dicke berührte mit ihrer untern Fläche ein auf constanter Temperatur (24°) erhaltenes Wasserbad, ihre obere Fläche stand in Berührung mit einer andern Wassermasse von bestimmter Anfangstemperatur (15°), die beständig um-

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 55 (1842).

gerührt wurde. In Folge der Temperaturdifferenz stellte sich eine von unten nach oben gehende Wärmeströmung in der Platte ein, welche eine Erhöhung der Temperatur der obern Wassermasse bewirkte. Aus dem zeitlichen Verlauf dieser letztern wurde dann ein Rückschluss auf die Wärmeleitungsfähigkeit der Substanz gemacht.

In ähnlicher Weise suchten Calvert und Johnson [1]) die relativen Werthe von k für eine grosse Reihe von Metallen, Legirungen und Amalgamen zu bestimmen. Nur gaben sie dem angewandten Material nicht die Form von Platten, sondern von kurzen prismatischen Stäben.

Bei diesen beiden Methoden scheinen aber manche Umstände übersehen worden zu sein, welche Einfluss auf die zu bestimmende Grösse haben, insbesondere der Wärmeverlust nach Aussen, so dass der Zusammenhang zwischen k und den sich aus der Beobachtung ergebenden Daten in Wirklichkeit nicht so einfach ist, wie er in der Berechnung von k angegeben wurde.

Die Benutzung der stationären Temperaturvertheilung für die Bestimmung von k wurde hauptsächlich durchgeführt von Despretz [2]), Langberg [3]), Wiedemann und Franz [4]) und Forbes [5]). Die drei ersten dieser Beobachter gingen bei ihren Versuchen darauf aus, das Wärmeleitungsvermögen vorzugsweise der Metalle in relativem Maasse darzustellen. Zu diesem Zwecke wurden nach dem Vorgange Biot's, lange, dünne, prismatische Metallstäbe angewandt, die an ihrer Oberfläche sämmtlich mit demselben Ueberzug ver-

---

[1]) Philos. transactions of London royal society (1858).

[2]) Pogg. Ann. Bd. 12 (1828).

[3]) Pogg. Ann. Bd. 66 (1846).

[4]) Pogg. Ann. Bd. 89 (1853).

[5]) Philos. transactions of Edinburgh royal society 23 u. 24.

sehen waren, und deren eines Ende durch eine Wärmequelle während des ganzen Versuches auf derselben Temperatur erhalten wurde. Aus der Beobachtung der Temperaturvertheilung im Stabe bei dem sich schliesslich einstellenden stationären Zustand konnte dann die Grösse k berechnet werden. Bedeuten nämlich u_1, u_2, u_3 die Ueberschüsse der Temperaturen in Punkten dreier äquidistanten Querschnitte des Stabes über die, überall als constant vorausgesetzte, Temperatur der Umgebung, so gilt nach Fourier für den stationären Zustand in einem Stabe, bei dem die Temperatur nur von einer Coordinate abhängt [1]), die Gleichung:

$$\frac{u_1 + u_3}{u_2} = \text{Const.} = e^{+l\sqrt{\frac{p\,h}{q\,k}}} + e^{-l\sqrt{\frac{p\,h}{q\,k}}}$$

wenn l die Distanz zweier aufeinanderfolgenden Querschnitte, p den Umfang, q die Fläche eines Querschnittes des Stabes bezeichnet, und wenn man annimmt, dass k sowohl, als h, durch welch letztere Grösse die Wärmeabgabe des Stabes nach Aussen gemessen wird, von der Temperatur des Querschnittes unabhängige Constanten sind. Ist dann h in Folge des gleichen Ueberzuges für alle Stäbe als gleich gross anzunehmen, so lässt sich vermittelst der obigen Gleichung das Verhältniss zweier Werthe k aus den Beobachtungen ermitteln.

Die erwähnten Untersuchungen schienen bei gut leitenden Substanzen jene Gleichung für jede Stelle des Stabes zu bestätigen und damit auch die Prämissen, auf welche sie gegründet ist; jedoch schon für das weniger gut leitende Blei und noch mehr bei schlechtern Leitern

---

1) Diese Voraussetzung ist, wie eine genaue Rechnung zeigt, bei Metallstäben für einen ziemlich grossen Querschnitt noch zulässig.

zeigten sich bedeutende Verschiedenheiten in dem Werthe $\frac{u_1 + u_3}{u_2}$ je nach der Entfernung der beobachteten Querschnitte von der Heizstelle. Langberg, sowie Wiedemann und Franz schlossen daraus auf eine Veränderlichkeit der beiden Wärmeleitungsvermögen h und k mit der Temperatur. Schon Poisson hatte übrigens auf eine solche hingewiesen, die Differentialgleichung für die Wärmeleitung in dünnen Stäben aufgestellt unter der Voraussetzung, es seien h und k lineare Funktionen der Temperatur:

$$h = h_0 (1 + \gamma u) \qquad k = k_0 (1 - nu)$$

und eine angenäherte Lösung derselben gegeben [1]. Langberg berechnete darnach aus seinen Versuchen die Grösse $\gamma + 2n$, allein eine weitere Ausführung wurde weder von ihm noch von Wiedemann und Franz diesem Gegenstande gegeben.

Forbes suchte die Grösse k in absolutem Maasse zu bestimmen, indem er den stationären Zustand eines prismatischen Stabes, der am einen Ende auf constanter Temperatur erhalten wurde, combinirte mit der sog. Erkaltungsgeschwindigkeit des betreffenden Metalles. Er berücksichtigte auf diese Weise die Variabilität von h und fand durch seine Methode, dass bei Schmiedeisen k beträchtlich mit der Temperatur variire.

Die neuern Methoden gehen alle von der Beobachtung der variabeln Temperaturvertheilung aus und suchen die Schwierigkeit, die darin liegt, dass k, sowie die dichte ϱ und die specifische Wärme c aller Substanzen in ausgesprochener Weise von der Temperatur abhängen, dadurch zu umgehen, dass nur ein kleines an irgend einer Stelle der Temperaturscala herausgegriffenes Intervall der Unter-

---

[1]) Poisson, théorie mécanique de la chaleur. § 125. p. 255.

suchung zu Grunde gelegt wird, so dass für den Bereich desselben jene Grössen ϱ, c und k als constant betrachtet werden dürfen. Da ferner das äussere Wärmeleitungsvermögen h ebenfalls, und zwar sehr stark von der Temperatur, vielleicht auch von der Gestalt und sonstigen Beschaffenheit der Oberfläche der zu untersuchenden Körper, sowie von dem umgebenden Medium abhängig ist, so geht das Bestreben dahin, die Methoden so einzurichten, dass der Einfluss von h auf die zu bestimmende Grösse k möglichst klein ausfalle.

Ångström [1]) bestimmte das innere Wärmeleitungsvermögen von Eisen und Kupfer, sowie dessen Abhängigkeit von der Temperatur unabhängig von h, indem er das eine Ende eines langen prismatischen Stabes nach gleichen Zeitintervallen abwechselnd auf zwei verschiedene, je innerhalb des folgenden Intervalls constant bleibende Temperaturen brachte und in zwei, in genau gemessenen Abständen von der Heizstelle befindlichen Querschnitten den Temperaturverlauf verfolgte, der sich einstellte, nachdem die periodischen Fluctuationen im ganzen Stabe stationär geworden waren.

Neumann hat die Ångström'sche Methode modificirt, indem er den Stab abwechselnd an beiden Enden periodischen Erwärmungen und Abkühlungen unterwarf und H. Weber hat auf diese Weise die Wärmeleitung des Eisens und Neusilbers bestimmt. [2])

Andere der von Neumann angegebenen Methoden [3]) beruhen darauf, dass die betreffende Substanz, in Form eines langen Stabes, oder eines kreisförmigen Ringes oder

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 114 (1861), Bd. 118 (1863).
[2]) Pogg. Ann. Bd. 146 (1872).
[3]) Ann. de chim. et de physique. T. 66 (1863).

einer Kugel, so lange erwärmt wird, bis sich die stationäre Temperaturvertheilung eingestellt hat. Wird dann in einem gewissen Moment die Wärmequelle entzogen und der Körper der Abkühlung überlassen, so kann aus der Beobachtung des zeitlichen Temperaturverlaufes in zwei bestimmten Punkten, sowohl das innere, wie das äussere Wärmeleitungsvermögen für ein gewisses Temperaturintervall berechnet werden.

In neuester Zeit haben Kirchhoff und Hansemann[1]) eine Methode gefunden und zur Bestimmung des innern Wärmeleitungsvermögens des Eisens angewandt, die mehr als alle bisherigen den Einfluss der Grösse h herabzudrücken sucht. Das betreffende Material wird in der Form eines Würfels der Untersuchung unterzogen, in der Weise, dass, nachdem der Würfel längere Zeit sich selbst überlassen gewesen, in einem bestimmten Zeitmoment die eine Seitenfläche desselben plötzlich auf eine andere Temperatur gebracht und von da an auf dieser erhalten wird. In Folge dessen tritt in dem Körper, dessen sämmtliche Elemente im Anfang dieselbe Temperatur besassen, eine Wärmeströmung ein, und die Temperatur eines jeden Punktes ändert sich nach einem gewissen Gesetze, nach welchem man dann den Quotienten $\frac{k}{\varrho c}$ berechnen kann.

Auf dasselbe Prinzip ist endlich die Methode gegründet, welche Herr Prof. Dr. H. F. Weber, mein hochverehrter Lehrer, bei seinen ausgedehnten «Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten» [2]) angewandt hat und welche in ähnlicher Form auch bei festen Körpern benutzt werden kann. Im Folgenden soll die

---

[1]) Wiedemann Ann. Neue Folge. Band IX, 1 (1880).

[2]) Wiedemann Ann. Neue Folge. Band X, 1 (1880).

Theorie dieser Methode mit Bezug auf feste Körper entwickelt und dann die Resultate der Versuche mitgetheilt werden, welche ich an den schlechten Wärmeleitern Blei, Wismuth und Wood's Metall nach derselben vorgenommen. Das Temperaturintervall, welches den Beobachtungen zu Grunde lag, war 1° bis 9° Celsius. Das in absolutem Maasse dargestellte innere Wärmeleitungsvermögen k bezieht sich auf die Einheiten: Centimeter, Gramm, Minute und 1 Grad Celsius.

Theorie der Methode.

Das zu untersuchende Metall wird in die für die Rechnung bequeme Form eines Cylinders gebracht, dessen Durchmesser aus später zu erörternden Gründen im Vergleich zur Höhe gross genommen ist, und der zum Zweck der genauen Auswerthung seiner Dimensionen planparallel abgedreht sein soll. Man nimmt an, dass bis zu einem Zeitmoment, der als Anfangsmoment Null des Versuches festgesetzt ist, der Cylinder durch seine ganze Masse dieselbe Temperatur U besitze. Zur Zeit $t = 0$ wird er dann plötzlich in eine Umgebung von Null Grad gebracht und seine untere Basisfläche von da an dauernd auf Null Grad erhalten [1]. In Folge dessen tritt ein, hauptsächlich von oben nach unten gehender Wärmefluss ein, und die Temperatur eines jeden Punktes sinkt, da dem Cylinder als Ganzem beständig Wärme entzogen, nicht aber welche zugeführt wird. Das Gesetz der Temperaturerniedrigung als Funktion der Zeit und des Ortes lässt sich aufstellen und daraus rückwärts durch passende Beobachtungen die

[1] Das Verfahren wird im experimentellen Theil genauer beschrieben.

Grösse des innern Wärmeleitungsvermögens des betreffenden Metalles bestimmen.

Zur Ableitung des mathematischen Gesetzes wählen wir als das Nächstliegende Cylindercoordinaten: die Cylinderaxe werde als Axe, der Mittelpunkt der untern Basisfläche als Anfangspunkt des Coordinatensystems festgesetzt. Es ist dann irgend ein Punkt des Cylinders bestimmt durch seinen Abstand r von der Axe, seine Entfernung x von der Basisfläche und den Winkel φ, den die zwei von der Axe aus nach ihm und einem festen Punkt gehenden Ebenen mit einander bilden. Der Radius des Cylinders sei mit R, seine Höhe mit $\varDelta$, specifisches Gewicht, specifische Wärme und inneres Wärmeleitungsvermögen der Substanz beziehungsweise mit ϱ, c und k bezeichnet. Setzt man diese Grössen innerhalb des kleinen Temperaturintervalls 1° bis 9° als constant voraus, so wird die Temperatur u eines Massenelementes von den Coordinaten x, r, φ im Innern des Cylinders zu jeder Zeit t der partiellen Differentialgleichung genügen müssen:

$$1) \qquad \varrho\, c\, \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)$$

Man erhält die letztere direkt, indem man den Wärmegewinn, den ein Volumenelement $r\,dr\,d\varphi\,dx$ im Zeitelement dt erfährt, auf zweierlei Weise ausdrückt, — einerseits mit Anwendung des von Fourier aufgestellten Elementargesetzes der Wärmeleitung, andrerseits mit Einführung der spezifischen Wärme der Substanz, — und die beiden so erhaltenen Werthe einander gleich setzt. Als u wird dabei die zur Zeit t im Mittelpunkte des Massenelementes vorhandene Temperatur angenommen, und dieselbe als stetige Funktion der vier Variablen x, r, φ und t betrachtet.

Im vorliegenden Fall vereinfacht sich die Differentialgleichung etwas, indem bei der gemachten Versuchsanordnung u von φ unabhängig ist, so dass $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ wird. Man hat also:

$$2) \qquad \varrho c \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Eine Lösung der Differentialgleichung 1) mit Bezug auf einen begrenzten Cylinder ist zuerst von Poisson gefunden worden. [1]) Dieselbe ist aber sehr complicirt und auch für andere Grenzbedingungen aufgestellt, als hier in Frage kommen. — Für die Gleichung 2) hat Herr Prof. H. F. Weber in seinen schon erwähnten «Untersuchungen über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten» folgendes particuläre Integral angegeben:

$$u = (A \sin qx + B \cos qx) I^0_{mr}\, e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2 + q^2)t}$$

welches in nachstehender Weise erhalten werden kann. Man setze:

$$u = f(x) \,.\, \varphi(t) \,.\, \psi(r)$$

wobei $f(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(r)$ Funktionen von jeweilen der einzigen Variablen x, t und r sein sollen. Bestimmt man nun die zwei ersten dieser Funktionen so, dass:

$$3) \qquad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \alpha f(x) \qquad\qquad 4) \qquad \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \beta \varphi(t)$$

wo α und β gewisse Constanten bedeuten, so wird die

[1]) Journal de l'école polytechnique Cah. XIX.

partielle Differentialgleichung 2) auf die gewöhnliche, nur noch r enthaltende zurückgeführt:

$$5)\qquad \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \left(\alpha - \frac{\beta \varrho c}{k}\right)\psi(r) = 0$$

aus der sich dann $\psi(r)$ und damit u ergibt.

Die allgemeine Lösung von Gleichung 3) ist:

entweder: $f(x) = A\,e^{x\sqrt{\alpha}} + B\,e^{-x\sqrt{\alpha}}$ wenn $\alpha > 0$

oder: $f(x) = A \sin x\sqrt{-\alpha} + B \cos x\sqrt{-\alpha}$ wenn $\alpha < 0$.

Wegen der später zu erörternden Grenzbedingungen ist nur die zweite Lösung brauchbar. Wir haben also α negativ, z. B. gleich $-q^2$ zu nehmen.

Eine (particuläre) Lösung von Gleichung 4) ist:

$$\varphi(t) = e^{\beta t}$$

wobei aber β, da die Temperatur mit der Zeit abnimmt, eine negative Zahl sein muss. Setzt man der Abkürzung wegen den in der Differentialgleichung 5) auftretenden Coëfficienten $\alpha - \frac{\beta\varrho c}{k} = m^2$, so erhält man, da $\alpha = -q^2$, für β den Werth: $\beta = -\frac{k}{\varrho c}(m^2 + q^2)$.

Die Gleichung 5) endlich besitzt als particuläres Integral die Bessel'sche Funktion erster Gattung vom Index Null und dem Argument $mr = r\sqrt{\alpha - \frac{\beta\varrho c}{k}}$. Nur diese eine Lösung ist hier brauchbar, da das zweite particuläre Integral derselben für $r = 0$ unendlich gross wird[1]). Man hat also:

---

[1]) S. Lommel, Studien über die Bessel'schen Funktionen. S. 106 und S. 86.

$$\psi(r) = 1 - \frac{(mr)^2}{2^2} + \frac{(mr)^4}{2^2 . 4^2} - \frac{(mr)^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \dots = I^0_{mr} \;^{1})$$

Verbindet man die für $f(x)$, $\varphi(t)$ und $\psi(r)$ gefundenen Werthe, so bekommt man schliesslich das oben angeführte Integral:

$$\text{I.} \qquad u = (A \sin q x + B \cos q x) I^0_{mr} e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2 + q^2) t}$$

Die hierin auftretenden unbestimmten vier Constanten A, B, m und q müssen nun so bestimmt werden, dass der Ausdruck für u nicht nur der Differentialgleichung, sondern auch allen übrigen die Aufgabe charakterisirenden Bedingungen genügt. Dies geschieht mit Hülfe der sog. Grenzgleichungen.

1) Da während der ganzen Dauer des Versuches die untere Basisfläche des Cylinders auf der constanten Temperatur Null Grad erhalten wird, so muss für alle in Betracht kommenden Zeitmomente u den Werth Null haben, wenn in dem dasselbe darstellenden Ausdruck $x = 0$ gesetzt wird. Dieser Bedingung kann aber nicht anders genügt werden, als indem man der Constanten B den Werth Null beilegt.

Untersucht man den Wärmegewinn, den ein an der Oberfläche des Cylinders liegendes Massenelement in der Zeit dt erfährt, indem man das Newton'sche Abkühlungsgesetz zu Grunde legt, so erhält man eine weitere Differentialgleichung, welche aber, da sie nicht homogen ist, in zwei zerfällt, nämlich in:

---

[1]) Diese Lösung ist, wenn auch nicht unter dem Namen der Bessel'schen Funktion, schon von Fourier bei Betrachtung der Wärmeleitung in einem unendlich langen homogenen Cylinder angegeben worden. S. Freeman: Analytical theory of heat by J. Fourier. p. 291 ff.

$$\text{a)} \qquad \varrho\, c\, \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$\text{b)} \qquad k\,\frac{\partial u}{\partial n} + h\,(u - U_0) = 0.$$

Die zweite derselben heisst die eigentliche Oberflächengleichung. In ihr bedeutet u die mittlere Temperatur; n die nach aussen als positiv angenommene Richtung der Normalen auf die an die Luft grenzende Oberfläche des betrachteten Volumenelementes, U_0 die constante Temperatur der Umgebung und h das hier ebenfalls als constant angenommene äussere Wärmeleitungsvermögen der Substanz gegen Luft.

Da im vorliegenden Fall $U_0 = 0$, so haben wir als zweite Grenzbedingung folgende Gleichung, die für die Elemente der obern Begrenzungsfläche des Cylinders zu jeder Zeit bestehen muss:

$$2) \qquad k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x = \varDelta} + h\, u_{x = \varDelta} = 0.$$

Diese Gleichung geht durch Einsetzen des Werthes von u über in:

$$k\, q \cos q\,\varDelta + h \sin q\,\varDelta = 0 \quad \text{oder:} \quad q\,\varDelta \cot q\,\varDelta = -\frac{h}{k}\,\varDelta.$$

Soll also das Integral (I) der Aufgabe genügen, so hat man für q irgend einen der unendlich vielen Werthe zu nehmen, die sich dafür aus der obigen transscendenten Gleichung ergeben. Bezeichnen wir die Wurzeln derselben, wie sie aufeinanderfolgen, mit $q_1\varDelta$, $q_2\varDelta$, $q_3\varDelta$, ... $q_i\varDelta$, so erhalten wir als verallgemeinerte Lösung:

$$\text{I}^{a}. \qquad u = A\, I^{0}_{mr}\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m^2 t} \,.\, {}_i\sum_1^{\infty} C_i \sin q_i x \,.\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_i^2 t}$$

in welcher A und m noch unbestimmt, die C_i dagegen bestimmte, später zu ermittelnde Grössen sind.

3) Als dritte Grenzbedingung haben wir eine der vorigen entsprechende, jedoch mit Beziehung auf die Mantelfläche des Cylinders genommen:

$$k\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} + h\, u_{r=R} = 0$$

welche Gleichung, ausgeführt, in die folgende übergeht:

$$m\, R \frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{h}{k} R$$

indem man berücksichtigt, dass:

$$\frac{\partial\, I^0_k}{\partial\, k} = -\, I^1_k \quad [1]$$

und in ihren (unendlich vielen) Wurzeln Werthe von m liefert, welche der Aufgabe genügen [2]. Bezeichnen wir diese letztern der Reihe nach mit $m_1 R$, $m_2 R$, $m_3 R \ldots .$ $m_l R$, so erhalten wir als allgemeinste Lösung der Differentialgleichung, welche zugleich den Grenzbedingungen 1) bis 3) genügt:

$$\text{II.} \qquad u = l\sum_1^{\infty} A_l\, I^0_{m_l r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m_l^2 t} \;.\; i\sum_1^{\infty} C_i\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_i^2 t} \sin q_i\, x$$

In dieser sind die Constanten A_l und C_i noch unbekannt. Es bleibt aber auch noch eine Grenzbedingung zu erfüllen übrig, nämlich:

4) diejenige des Anfangszustandes, welche bestimmt, dass bei Beginn des Versuches zur Zeit $t = 0$ die Tem-

---

[1] Lommel, Studien über Bessel'sche Funktionen S. 8.

[2] Schon Fourier hat gezeigt, dass die obige Gleichung unendlich viele reelle positive Wurzeln besitzt. S. Freeman S. 296.

peratur des Cylinders unabhängig von r und x, gleich einer constanten Grösse U sein soll. Diese Bedingung reicht aus, um sowohl die A_l als die C_i in vollkommen genügender Weise zu berechnen.

Setzt man in dem Ausdruck (II) $t = 0$, so nimmt derselbe die Form an:

$$U = {}_l\sum_1^\infty A_l\, I^0_{m_l r} \cdot {}_i\sum_1^\infty C_i \sin q_i x$$

und es steht Nichts im Wege festzusetzen, es sei:

$${}_l\sum_1^\infty A_l\, I^0_{m_l R} = 1 \qquad {}_i\sum_1^\infty C_i \sin q_i x = U.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Coëfficienten A_l und C_i berechnen, indem man jeweilen beide Seiten mit einer solchen Hülfsfunktion Q_n multiplicirt, dass links sämmtliche Glieder mit Ausnahme eines einzigen verschwinden, wenn der so erhaltene Ausdruck beiderseits zwischen gewissen Grenzen integrirt wird.

a) Für die Constanten A_l wird dieser Zweck erreicht, wenn man als Hülfsfunktion Q_n wählt:

$$Q_n = r\, I^0_{m_n R}$$

wo m_n eine Wurzel der transscendenten Gleichung:

$$m R \frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{h}{k} R$$

ist; denn mit Benutzung der Beziehungen:

$$\frac{\partial\, I^0_{m_l r}}{\partial r} = -\, m_l I^1_{m_l r} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \left(r I^1_{m_l r}\right)}{\partial r} = m_l r .\, I^0_{m_l r}$$

findet man:

$$\int_0^R r\, I^0_{m_l r}\, I^0_{m_n r}\, dr = \frac{1}{m_n^{\,2} - m_l^{\,2}} \left(m_n R\, I^0_{m_l R}\, I^1_{m_n R} - m_l R\, I^1_{m_l R}\, I^0_{m_n R} \right)$$

Sind nun m_l und m_n verschiedene Wurzeln der obigen Gleichung, so verschwindet der letzte Integral-Ausdruck, und nur für den Fall, dass $n = l$ gesetzt wird, nimmt er einen von Null verschiedenen Werth an. Man hat also zur Bestimmung von A_l die Gleichung:

$$\int_0^R \left[r \, I^0_{m_n r} \; l \sum_1^\infty A_l \, I^0_{m_l r} \right] dr = A_l \int_0^R \left(I^0_{m_l r} \right)^2 . \, r dr =$$

$$= A_l \lim_{n=l} \frac{m_n R \, I^0_{m_n R} \, I^1_{m_l R} - m_l R \, I^1_{m_n R} \, I^0_{m_l R}}{m_n^2 - m_l^2} = \int_0^R I^0_{m_l r} \, . \, r dr$$

Mit Berücksichtung, dass:

$$\frac{\partial}{\partial m_n} \left(m_n \, I^1_{m_n R} \right) = m_n R \, I^0_{m_n R} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial m_n} \, I^0_{m_n R} = - R \, I^1_{m_n R}$$

erhält man daraus

$$\frac{A_l R^2}{2} \left[\left(I^0_{m_l R} \right)^2 + \left(I^1_{m_l R} \right)^2 \right] = \frac{R}{m_l} I^1_{m_l R}$$

und da:

$$I^1_{m_l R} = \frac{h}{k} \, \frac{I^0_{m_l R}}{m_l}$$

so kann man schliesslich für A_l den Ausdruck aufstellen:

$$A_l = \frac{2 \, \frac{h}{k} R \, I^0_{m_l R}}{(m_l R)^2 \left(I^0_{m_l R} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{h}{k m_l} \right)^2 \right]} = \frac{2 \, \frac{h}{k} \, \frac{1}{R}}{I^0_{m_l R} \left[m_l^2 + \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right]}$$

Betrachten wir nun die Grössenverhältnisse der aufeinanderfolgenden Constanten A_l etwas genauer an dem Beispiele des Wismuth, das wegen seiner geringen Leitungsfähigkeit unter den drei Metallen den ungünstigsten Fall repräsentirte. Die Vorversuche mit einem Cylinder von ca. 8 cm.

Radius, der übrigens auch späterhin benutzt wurde, ergaben k von der Ordnung 0,7. Nimmt man hiezu für h den für Metalle angenähert gültigen Werth $h = 0{,}01$, so werden die Wurzeln der transscendenten Gleichung:

$$mR \frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{h}{k} R = 0{,}1143$$

nach den von Hansen [1]) berechneten Tafeln:

$m_1 R = 0{,}46 \qquad m_2 R = 3{,}86 \qquad m_3 R = 7{,}17 \qquad m_4 R = 10{,}28$

woraus:

$$\begin{array}{llll} m_1 = 0{,}057 & m_2 = 0{,}483 & m_3 = 0{,}896 & m_4 = 1{,}285 \\ A_1 = 0{,}570 & A_2 = -0{,}01917 & A_3 = 0{,}00749 & A_4 = -0{,}00436 \end{array}$$

Es verhält sich also:

$$m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = 1 : 8{,}4 : 15{,}6 : 22{,}35$$
$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = 1 : 0{,}0334 : 0{,}0131 : 0{,}00766$$

Substituirt man die Werthe von m und A in die Summe:

$$A_1 I^0_{m_1 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m_1{}^2 t} + A_2 I^0_{m_2 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m_2{}^2 t} + A_3 I^0_{m_3 r}\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m_3{}^2 t} + \ldots$$

so ergibt sich, dass die aufeinanderfolgenden Glieder schon für $t = 1$ in rascher Weise abnehmen, indem sie sich z. B. für $r = 0$ (Cylinderaxe) verhalten, wie:

$$1 : 0{,}02 : 0{,}0002$$

Für ein grösseres t und bei besser leitenden Substanzen gestalten sich diese Verhältnisse noch weit günstiger. Man wird desswegen berechtigt sein, wenigstens bei Metallen schon nach 1—2 Minuten seit Beginn des Abkühlungsprozesses sich auf das erste Glied der obigen Reihe zu beschränken.

---

[1]) Lommel, Bessel'sche Funktionen S. 127 ff.

b) Die Constanten C_i lassen sich nach Fourier bestimmen, indem man bildet:

$$U\int_0^{\varDelta} \sin q_n x\, d\,x = \int_0^{\varDelta} \left[\sin q_n x \quad i\sum_1^{\infty} C_i \sin q_i x \right] dx$$

Denn es ist;

$$\int_0^{\varDelta} \sin q_n x \,.\, \sin q_i x\, dx = \frac{1}{q_n^2 - q_i^2}\,(q_i \sin q_n \varDelta \cos q_i \varDelta - q_n \sin q_i \varDelta \cos q_n \varDelta)$$

Sind nun $q_i \varDelta$ und $q_n \varDelta$ zwei Wurzeln derselben transcendenten Gleichung:

$$q\,\varDelta \cot q\,\varDelta = -\frac{h}{k}\,\varDelta$$

so verschwindet jener Ausdruck, wenn i und n verschieden, und nimmt die Form $\frac{0}{0}$ an, wenn $n = i$. Für den letztern Fall erhält man aber direkt:

$$\int_0^{\varDelta} \sin^2 q_i x\, dx = \frac{\varDelta}{2} - \frac{\sin 2\, q_i \varDelta}{4\, q_i}$$

Man hat also:

$$U\int_0^{\varDelta} \sin q_i x\, dx = \frac{1 - \cos q_i \varDelta}{q_i}\, U = C_i \left(\frac{\varDelta}{2} - \frac{\sin 2\, q_i \varDelta}{4\, q_i} \right)$$

$$C_i = 2\, U\, \frac{1 - \cos q_i \varDelta}{q_i \varDelta} \,.\, \frac{1}{1 - \frac{\sin 2\, q_i \varDelta}{2\, q_i \varDelta}}$$

Der Verlauf dieser Constanten, wenn man i successive gleich 1, 2, 3 . . . . . n setzt, soll wiederum für Wismuth etwas genauer betrachtet werden.

Die positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$q \varDelta \cot q \varDelta = -\frac{h}{k} \varDelta$$

kann man in der Form darstellen:

$$q_1 \varDelta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \qquad q_2 \varDelta = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon_2 \qquad q_3 \varDelta = \frac{5\pi}{2} + \varepsilon_3 \ldots.$$

wobei $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \ldots.$ und durch Reduktion von $\varDelta$ beliebig klein gemacht werden können. Ist nun $\frac{h\varDelta}{k}$ eine kleine Grösse — bei Wismuth war $\frac{h}{k}\varDelta$ von der Ordnung 0,036 — so darf man setzen:

$$\sin q_i \varDelta = (-1)^{i+1}\left(1 - \frac{\varepsilon_i^2}{2}\right) \qquad \cos q_i \varDelta = (-1)^{i} . \varepsilon_i$$

und $$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{h}{k}\varDelta} = 1 - \frac{1}{2}\frac{h}{k}\varDelta$$ woraus:

$$\varepsilon_1 = \frac{\frac{h}{k}\varDelta}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad \varepsilon_2 = \frac{\frac{h}{k}\varDelta}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \quad \varepsilon_3 = \frac{\frac{h}{k}\varDelta}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)} \quad \varepsilon_i = \frac{\frac{h}{k}\varDelta}{\frac{2i-1}{2}\pi}$$

Darnach wird mit gleicher Annäherung:

$$C_i = 2\,U\,\frac{1-(-1)^i \varepsilon_i}{\frac{2i-1}{2}\pi + \varepsilon_i}$$

Für den Wismuthcylinder ergab sich so:

$\varepsilon_1 = 0{,}02292$	$\varepsilon_2 = 0{,}007639$	$\varepsilon_3 = 0{,}004584$
$q_1 \varDelta = 1{,}5937$	$q_2 \varDelta = 4{,}7200$	$q_3 \varDelta = 7{,}8585$
$q_1 = 0{,}637$	$q_2 = 1{,}888$	$q_3 = 3{,}143$
$C_1 = 1{,}2655$	$C_2 = -0{,}4198$	$C_3 = 0{,}2556$

$$q_1 : q_2 : q_3 = 1 : 2{,}965 : 4{,}935$$
$$C_1 : C_2 : C_3 = 1 : 0{,}3318 : 0{,}2020$$

Setzt man diese Werthe in die Summe:

$$C_1\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_1^2 t} \sin q_1 x + C_2\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_2^2 t} \sin q_2 x + \ldots\ldots$$

so erhält man z. B. für $t = 1$ und $x = \varDelta$ folgendes Verhältniss der 3 ersten Glieder:

$$1 : 3{,}06.10^{-4} : 1{,}597.10^{-10} : \cdot\cdot\cdot$$

Man wird sich daher für diese Summe schon nach sehr kurzer Zeit vom Beginne der Abkühlung auf das erste Glied beschränken dürfen und man kann somit allgemein sagen:

Nach einer Minute vom Beginn des Versuches wird in einem Metallcylinder der betrachteten Art die Temperaturvertheilung für alle folgenden Zeitmomente durch den Ausdruck dargestellt:

$$\text{III.} \qquad u = A \cdot I^0_{mr} \sin qx \cdot e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2+q^2)t}$$

worin bedeutet:

m ein Werth, der sich aus der ersten Wurzel der Gleichung $m R \frac{I^1_{mR}}{I^0_{mR}} = \frac{h}{k} R$ ergibt,

q der Faktor von $\varDelta$ in der ersten Wurzel der Gleichung:

$$q \varDelta \cot q \varDelta = -\frac{h}{k} \varDelta$$

endlich A ein Produkt aus 2 Constanten, dessen Werth

$$A = \frac{8\, U \frac{h}{k} (1 - \cos q \varDelta)}{R\, I^0_{mR} \left[m^2 + \left(\frac{h}{k}\right)^2 \right] (2\, q \varDelta - \sin 2\, q \varDelta)}$$

übrigens nicht in Betracht kommt.

Auf die Gleichung (III) gründet sich die Methode, die innere Wärmeleitungsfähigkeit k eines Metalles für ein gewisses Temperaturintervall zu finden. Beobachtet man nämlich den zeitlichen Temperaturverlauf in einem bestimmten Punkte, dessen Coordinaten x_1 und r_1 sein mögen, und bildet darauf die Quotienten aus den gewissen Zeitmomenten entsprechenden Temperaturen, so hat man darin beliebig viele Mittel, die Grösse k zu berechnen.

Es seien t_1 und t_2 zwei bestimmte Zeitmomente, u_1 und u_2 die ihnen zugehörigen Temperaturen in dem betrachteten Punkte des Cylinders, so findet die einfache Beziehung statt:

$$\frac{u_1}{u_2} = e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2 + q^2)(t_2 - t_1)}$$

woraus folgt:

$$\text{IV.} \qquad k = \varrho c \frac{\log \text{nat} \left(\frac{u_1}{u_2}\right)}{(m^2 + q^2)(t_2 - t_1)}$$

Dies ist nun allerdings keine explicite Gleichung für k, indem zur Bestimmung der Grössen m und q, k eigentlich schon bekannt sein müsste. Man kann aber die hierin liegende Schwierigkeit in folgender Weise umgehen.

Wir haben schon oben gesehen, dass, weil $\frac{h}{k}$ immer eine sehr kleine Zahl ist, man setzen darf:

$$q\varDelta = \frac{\pi}{2} + \frac{\frac{h}{k}\varDelta}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \qquad \text{woraus} \qquad q^2 = \left(\frac{\pi}{2\varDelta}\right)^2 + 2\,\frac{h}{k}\,\frac{1}{\varDelta}$$

Ein ähnlich kurzer, und doch sehr angenäherter Ausdruck lässt sich auch für m^2 aufstellen. Die Funktionen I_k^0 und I_k^1 sind gegeben durch die Reihen:

$$I_k^0 = 1 - \frac{k^2}{2^2} + \frac{k^4}{2^2.4^2} - \frac{k^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots$$

$$I_k^1 = \frac{k}{2} - \frac{k^3}{2^2.4} + \frac{k^5}{2^2.4^2.6} - \frac{k^7}{2^2.4^2.6^2.8} + \cdots$$

Ist nun $k = m R$ eine kleine Grösse, so kann man mit genügender Annäherung setzen: $\frac{I_k^1}{I_k^0} = \frac{k}{2}$, wodurch die Gleichung für m übergeht in:

$$m R \frac{I_{mR}^1}{I_{mR}^0} = \frac{(m R)^2}{2} = \frac{h}{k} R$$

Daraus folgt dann:

$$m^2 = \frac{2}{R} \cdot \frac{h}{k}$$

Beachtet man ferner, dass die Oberfläche des Cylinders:

$$O = 2 R \pi (R + \varDelta)$$

das Volumen des Cylinders:

$$V = R^2 \pi \cdot \varDelta ,$$

dass also das Verhältniss:

$$\frac{O}{V} = 2 \left(\frac{1}{\varDelta} + \frac{1}{R}\right)$$

so kann man die Summe $m^2 + q^2$ durch den einfachen Ausdrück darstellen:

$$m^2 + q^2 = \left(\frac{\pi}{2 \varDelta}\right)^2 + \frac{hO}{kV}$$

Dieser Werth in Gleichung (IV) eingesetzt, gibt schliesslich:

$$\text{V.} \qquad \frac{\log \text{nat} \left(\frac{u_1}{u_2}\right)}{t_2 - t_1} = \frac{\pi^2}{4 \varDelta^2 \cdot \varrho \cdot c} k + \frac{O}{Mc} \cdot h$$

worin M die Masse des Cylinders bedeutet.

Aus dieser Gleichung (V) ist nun k zu berechnen, sobald man ausser den Dimensionen, der Dichte und der specifischen Wärme des Cylinders noch die Grösse h kennt. Der Einfluss dieser letztern kann jedoch bedeutend reducirt werden, indem man die Dimensionen des Cylinders so wählt, dass das zweite Glied gegenüber dem ersten möglichst klein ausfällt. Das Verhältniss der beiden Glieder ist:

$$\frac{4\Delta^2 \varrho c O h}{M c \pi^2 . k} = \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{\Delta}{R}\right) . \frac{h}{k}$$

also einerseits abhängig von der gegebenen Natur der Substanz, andrerseits aber von der geometrischen Grösse $\frac{\Delta}{R}$, die man willkürlich in der Hand hat. Da nun bei allen Metallen $\frac{h}{k}$ einen kleinen Werth besitzt, so wird man auch bei denjenigen unter ihnen, welche am schlechtesten leiten, immer ein praktisch ausführbares Verhältniss $\frac{\Delta}{R}$ finden können, so dass:

$$\frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{\Delta}{R}\right) \frac{h}{k} \leqq 0{,}02$$

Man erreicht dadurch den Vortheil, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, die schon innerhalb eines kleinen Temperaturintervalls fühlbare Variabilität von h vernachlässigen, ja für h einen ziemlich rohen, für alle Metalle gültigen Mittelwerth setzen zu dürfen und auf diese Weise die innerhalb enger Temperaturgrenzen constant zu setzende Grösse k fast unabhängig von h bestimmen zu können. — Für sehr schlecht leitende Substanzen fällt dieser Vortheil weg, indem bei diesen die Grösse $\frac{h}{k}$ mit der Einheit vergleichbar ist. Man hätte in einem solchen Fall h auf irgend eine Weise für das Temperaturintervall besonders zu bestimmen und darauf mit Hülfe eines angenäherten Werthes von k die Grössen m und q zu berechnen, aus denen sich dann ein genauerer Werth von k ergibt.

Experimenteller Theil.

Es erschien wünschbar, die Anfangstemperatur U des ganzen Cylinders höher als Zimmertemperatur zu nehmen, damit in dem Zeitpunkt, wo die Gleichung (III) gültig wird, trotz der raschen Abkühlung u immer noch den Werth von circa 9 Grad besitze. Zu diesem Zwecke, und auch um die Versuche rasch wiederholen zu können, wurden die Metallcylinder eine gewisse Zeit hindurch auf eine ebene heisse Messingplatte aufgesetzt und nachher so lange an der Luft stehen gelassen, bis man an den verschiedenen Stellen der Oberfläche dem Gefühle nach keinen Temperaturunterschied mehr wahrnahm. Wenn dann auch noch kleinere Ungleichheiten in der Vertheilung der Temperatur zurückblieben, wodurch die Gültigkeit der Gleichung hätte in Frage gestellt werden können, so wurden diese wohl dadurch compensirt, dass die Zeit vom Beginn des Versuches bis zur ersten Ablesung in der Mehrzahl der Fälle mindestens zwei Minuten betrug, während deren sich ein regelmässiger Wärmefluss im Cylinder einstellen konnte.

Nachdem der Cylinder in dieser Weise erwärmt, wurde er im Zeitmomente $t = 0$ auf eine ungefähr gleich grosse, planparallel geschliffene und möglichst horizontal gestellte Eisplatte von mindestens 3 cm. Dicke gesetzt, rasch mit einer Kappe überdeckt, bestehend aus zwei concentrischen

Cylindern aus Kupferblech, deren Zwischenraum mit Schnee gefüllt war, und darauf der Abkühlung überlassen. Es war anzunehmen, dass schon nach sehr kurzer Zeit die Bodenfläche des Cylinders, sowie die Umgebung desselben dieselbe Temperatur, nämlich Null Grad besassen und dass sämmtliche von dem Cylinder durch äussere Wärmeleitung und Strahlung abgegebene Wärme sogleich durch die umgebende dünne Luftschicht an den Schnee der Kappe überging. Andrerseits blieb auch die Temperatur der Bodenfläche constant auf Null Grad erhalten, da das Gewicht von Metallcylindern von beiläufig 16 Centimeter Durchmesser und mindestens 2,5 Centimeter Höhe genügend ist, das sich bildende Schmelzwasser continuirlich über die Seiten der Eisplatte hinunterfliessen zu machen.

Theoretisch ist es ganz gleichgültig, welchen Punkt man zur Temperaturbeobachtung wählt; aus praktischen Gründen wird man aber am besten den Mittelpunkt der obern Basisfläche dazu benützen, da dieser während der ganzen Versuchsdauer die höchste Temperatur besitzt.

Zur Messung des Temperaturverlaufes wurde ein Thermoelement angewandt, gebildet aus einem Neusilberdrath und zwei Kupferdräthen, die so dünn waren, dass die dem Körper durch sie mittelst Leitung entzogene Wärme gänzlich vernachlässigt werden konnte. Das eine Ende des Neusilberdrathes und des einen Kupferdrathes wurden im Mittelpunkt der obern Basisfläche des Cylinders eingelöthet und das mit dem zweiten Kupferdrath zusammengelöthete Ende des Neusilberdrathes dauernd in Schnee auf 0° erhalten. Indem man dann die freien Enden der beiden Kupferdräthe in den Stromkreis eines Wiedemann'schen Spiegelgalvanometers einschaltete, das für den vorliegenden Zweck aperiodisch gemacht war, erhielt man in den, jedem

Zeitmoment entsprechenden, auf Bögen reducirten Scalenausschlägen ein relatives Maass für die Temperatur der einen Löthstelle, wie das aus folgender Betrachtung hervorgehen wird.

Eine constante elektromotorische Kraft E kann für kleine Ausschlagswinkel φ des Galvanometermagneten immer proportional gesetzt werden dem auf Bögen reducirten Scalenausschlage x nach der Gleichung:

$$E = Iw = Cw \operatorname{tang} \varphi = Cw \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\varphi} - 1}{\operatorname{tang} 2\varphi} =$$

$$= \frac{Cw}{2}\left[\operatorname{tang} 2\varphi - \frac{1}{4}\operatorname{tang}^3 2\varphi + \ldots\right] = \frac{Cw}{2}\left[\frac{s}{D} - \frac{1}{4}\left(\frac{s}{D}\right)^3 + \frac{5}{64}\left(\frac{s}{D}\right)^5 - \ldots\right] \backsim$$

$$\backsim \frac{Cw}{2}\left[\frac{s}{D} - \frac{1}{3}\left(\frac{s}{D}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{s}{D}\right)^5 - \ldots\right] \backsim \frac{Cw}{2} x$$

worin I die durch E hervorgerufene Stromstärke, w den Widerstand im Stromkreis, s den abgelesenen, x den reducirten Scalenausschlag, D die Distanz von Spiegel und Scala und C eine vom Instrument abhängige Constante bedeuten.

Ferner lässt sich die in Folge der Temperaturdifferenz $u_1 - u_2$ der beiden Löthstellen eines Thermoelementes erregte elektromotorische Kraft für ein nicht zu grosses Temperaturintervall darstellen durch eine Gleichung von der Form:

$$E = A(u_1 - u_2) - B(u_1 - u_2)^2$$

woraus folgt, wenn $u_2 = 0$ und E durch x gemessen wird:

$$x = \alpha u - \beta u^2$$

Die Constanten α und β sind abhängig von dem benützten Galvanometer und den Substanzen, aus denen das Thermoelement zusammengesetzt ist. Für einen bestimmten Fall werden sie experimentell erhalten, indem man die eine Löthstelle in Eis, die andere successiv in Wasser von verschiedenen Temperaturen einsetzt und die zugehörigen Galvanometerausschläge abliest. Bei den hier angewandten Drathsorten stellte sich β im Vergleich zu α so klein heraus (ungefähr wie 0,0001: 1), dass innerhalb des in Frage kommenden Temperaturintervalls das zweite Glied gegenüber dem ersten vernachlässigt werden durfte und dies um so eher, als nicht die absoluten Werthe u, sondern nur die Verhältnisse der zu verschiedenen Zeiten auftretenden Temperaturen zu kennen nöthig sind.

Für constante elektromotorische Kräfte E_1 und E_2, resp. constante Temperaturdifferenzen u_{t_1} und u_{t_2} würde man also bei der gemachten Anordnung unbedingt setzen dürfen:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{u_{t1}}{u_{t2}} = \frac{x_1}{x_2}$$

und es frägt sich jetzt nur noch, ob, da die Temperatur der einen Löthstelle sich stetig ändert, die Bewegung des Galvanometermagneten dieser Aenderung eben so stetig folgt, so dass der Ausschlag x in jedem Moment wirklich der vorhandenen Temperatur proportional gesetzt werden darf. Die Bedingungen, unter welchen diese Annahme zulässig, können in folgender Weise festgestellt werden.

Der Galvanometermagnet befinde sich bis zur Zeit $t = T$, wo T vorläufig eine beliebige, jedoch von Null verschiedene Grösse sein mag, im Zustande der Ruhe. In diesem Moment werde das Galvanometer plötzlich in den thermoelektrischen Kreis eingeschaltet und dauernd darin gelassen. Es geht dann der Magnet aus seiner Gleichgewichtslage und bewegt sich fürderhin nach einem Gesetze, das abhängig ist von der Einrichtung des Galvanometers und von der Variation des thermoelektrischen Stromes. Zur Zeit t nach der Schliessung des Stromkreises ist die Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen ausgedrückt durch:

$$u = l\sum_1^\infty A_l\, e^{-\frac{k}{\varrho c} m_l^2 (T+t)} \cdot i\sum_1^\infty C_i\, e^{-\frac{k}{\varrho c} q_i^2 (T+t)} \sin q_i \varDelta$$

also durch eine nach Potenzen von e fortschreitende Reihe von der Form:

$$u = a_1\, e^{-b_1 (T+t)} + a_2\, e^{-b_2 (T+t)} + a_3\, e^{-b_3 (T+t)} + \cdots$$

worin $b_1 < b_2 < b_3 \ldots$ und die a eine im Allgemeinen abnehmende Reihe bilden. Beispielsweise ist bei der Wood'schen Legirung:

$$b_1 = \frac{k}{\varrho c}(m_1^2 + q_1^2) = 2{,}463 \qquad a_1 = A_1\, C_1 \sin q_1 \varDelta = 1{,}2360\; U$$

$$b_2 = \frac{k}{\varrho c}(m_2^2 + q_1^2) = 3{,}553 \qquad a_2 = A_2\, C_1 \sin q_1 \varDelta = 0{,}0184\; U$$

$$b_3 = \frac{k}{\varrho c}(m_3^2 + q_1^2) = 6{,}161 \qquad a_3 = A_3\, C_1 \sin q_1 \varDelta = 0{,}0074\; U$$

Dieser Temperaturdifferenz entspricht eine elektromotorische Kraft:

$$E = \alpha \cdot u$$

und eine Intensität des thermoelektrischen Stromes:

$$I = \frac{E}{W} = \frac{\alpha}{W} \cdot u$$

wenn W den Gesammtwiderstand im Stromkreis bedeutet. Bezeichnet man nun mit M das (magnetische) Moment des Galvanometermagneten und mit G die Empfindlichkeitsconstante des Galvanometers, so ist das vom Strome I zur Zeit t auf den Magneten ausgeübte Drehmoment:

$$M\,G \cdot \frac{\alpha \cdot u}{W}$$

unter der Voraussetzung, dass der Ablenkungswinkel φ des Magneten zur Zeit t so klein ist, dass der Cosinus desselben gleich 1 und somit, was für das Folgende nothwendig, der Sinus desselben: $\sin\varphi = \varphi$ gesetzt werden darf. — Ist endlich Q das Trägheitsmoment des Magneten, D die Grösse des auf die Einheit der Winkelgeschwindigkeit bezogenen Momentes der Dämpfung, herrührend von der den Magnet umgebenden Kupferhülse und dem Luftwiderstand — die Eigendämpfung des Galvanometers kommt wegen ihrer Kleinheit nicht in Betracht —, H die Horizontalcomponente der wirkenden Richtkraft (Erdmagnetismus und Hülfsmagnet), und S die Elasticitätsconstante des Aufhängefadens, so ist die Bewegung des Galvanometermagneten dargestellt durch die Differentialgleichung:

$$Q\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + D\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (M\,H + S)\,\varphi - \frac{M \cdot G \cdot \alpha}{W} \cdot u = 0\ ^{1)} \qquad \text{oder:}$$

$$1)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + A\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + B\,\varphi - C\,[a_1\,e^{-b_1(T+t)} + a_2\,e^{-b_2(T+t)} + \ldots\ldots] = 0$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$A = \frac{D}{Q}\,, \qquad B = \frac{M\,H + S}{Q}\,,\ C = \frac{M \cdot G \cdot \alpha}{Q \cdot W}$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung wird folgendermaassen erhalten.

Die Gleichung:

$$2)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + A\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + B\,\varphi = 0$$

---

[1]) Die elastische Nachwirkung des Aufhängfadens (Coconfadens) ist zu vernachlässigen.

wird befriedigt durch $e^{-\lambda t}$, wenn λ der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

genügt. Sind also:

$$\lambda_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}$$

die Wurzeln dieser letztern, so ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung 2):

$$\varphi = M_1 e^{-\lambda_1 t} + M_2 e^{-\lambda_2 t} = \varphi_1$$

worin M_1 und M_2 zwei vorläufig unbestimmte Constanten sind. Aus φ_1 ergibt sich das allgemeine Integral der Differentialgleichung 1):

$$\varphi = \varphi_1 + \int_0^t z\, d\alpha$$

indem man $z = f(t, \alpha)$ so bestimmt, dass für $\alpha = t$:

$$z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = u_t = C\left[a_1 e^{-b_1(T+t)} + a_2 e^{-b_2(T+t)} + \ldots\right]$$

Diese Bedingungen sind erfüllt, indem man setzt:

$$z = C_1 e^{-\lambda_1(t-\alpha)} + C_2 e^{-\lambda_2(t-\alpha)}$$

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \text{und} \quad C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = -u_{t=\alpha} \quad \text{also:}$$

$$z = \frac{u_{t=\alpha}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1(t-\alpha)} - e^{-\lambda_2(t-\alpha)}\right)$$

Darnach ist:

$$\int_0^t z\,d\alpha = \frac{C}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^t \left(e^{-\lambda_1(T+t)} - e^{-\lambda_2(T+t)}\right)\left(a_1 e^{-b_1(T+\alpha)} + a_2 e^{-b_2(T+\alpha)} + \ldots\ldots\right) d\alpha =$$

$$= \frac{Ca_1}{(\lambda_1-b_1)(\lambda_2-b_1)} e^{-b_1(T+t)} + \frac{Ca_2}{(\lambda_1-b_2)(\lambda_2-b_2)} e^{-b_2(T+t)} + \frac{Ca_3}{(\lambda_1-b_3)(\lambda_2-b_3)} e^{-b_3(T+t)} + \ldots$$

$$- e^{-\lambda_1 t}\left\{\frac{Ca_1 e^{-b_1 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-b_1)} + \frac{Ca_2 e^{-b_2 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-b_2)} + \frac{Ca_3 e^{-b_3 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-b_3)} + \ldots\right\}$$

$$+ e^{-\lambda_2 t}\left\{\frac{Ca_1 e^{-b_1 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-b_1)} + \frac{Ca_2 e^{-b_2 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-b_2)} + \frac{Ca_3 e^{-b_3 T}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-b_3)} + \ldots\right\}$$

Die Coefficienten von $e^{-\lambda_1 t}$ und $e^{-\lambda_2 t}$ sind constante, und (wenn λ_2 und λ_1 verschieden sind) endliche Grössen. Man kann also diese Glieder mit den schon in φ_1 enthaltenen zusammenziehen und schreiben:

$$\varphi = P_1 e^{-\lambda_1 t} + P_2 e^{-\lambda_2 t} + N_1 e^{-b_1(T+t)} + N_2 e^{-b_2(T+t)} + \ldots\ldots$$

wo N_1, N_2, N_3 ... die Werthe haben:

$$N_1 = \frac{Ca_1}{(\lambda_1-b_1)(\lambda_2-b_1)} = \frac{Ca_1}{B-b_1 A+b_1^2},\ N_2 = \frac{Ca_2}{B-b_2 A+b_2^2},\ N_3 = \frac{Ca_3}{B-b_3 A+b_3^2}$$

und P_1 und P_2 sich daraus ergeben, dass der Ausschlag des Magneten zur Zeit $t = 0$ gleich Null, seine Winkelgeschwindigkeit in diesem Moment z. B. gleich γ_0 ist. Diese Bedingungen werden durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$0 = P_1 + P_2 + N_1 e^{-b_1 T} + N_2 e^{-b_2 T} + N_3 e^{-b_3 T} + \cdots$$

$$\gamma_0 = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 + N_1 b_1 e^{-b_1 T} + N_2 b_2 e^{-b_2 T} + N_3 b_3 e^{-b_3 T} + \ldots$$

Aus ihnen folgt:

$$P_1 = -\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\gamma_0 + N_1(\lambda_2-b_1) e^{-b_1 T} + N_2(\lambda_2-b_2) e^{-b_2 T} + \ldots\ldots\right]$$

$$P_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\gamma_0 + N_1(\lambda_1-b_1) e^{-b_1 T} + N_2(\lambda_1-b_2) e^{-b_2 T} + \ldots\ldots\right]$$

Damit nun das Galvanometer den gewünschten Zweck erfülle, d. h. dass sein Ausschlag in jedem Zeitmoment der vorhandenen Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen proportional sei, muss Folgendes stattfinden:

1) Es soll das Galvanometer so eingerichtet sein, dass λ_1 und λ_2 reell und Beide gross sind im Verhältniss zu allen in Betracht kommenden bT, damit schon für einen kleinen Werth von t die beiden ersten Glieder: $P_1 e^{-\lambda_1 t}$ und $P_2 e^{-\lambda_2 t}$ gegenüber den folgenden nicht in Betracht kommen. Man erreicht dies, indem man einen Magneten von kleinem Trägheitsmoment und mit starker Dämpfung anwendet und den Hülfsmagneten so einstellt, dass das Galvanometer angenähert aperiodisch schwingt.

2) Es ist die Zeit des Anfanges der Beobachtungen $T + t_1$ so gross zu nehmen, dass sämmtliche auf das Glied $N_1 e^{-b_1 (T + t_1)}$ folgenden Glieder gegen dieses zu vernachlässigen sind.

Diesen Bedingungen war in allen Versuchen Genüge geleistet. Um die erste derselben zu prüfen, wurde folgendes Verfahren benutzt:

Der Galvanometermagnet wurde durch eine constante elektromotorische Kraft um einen (kleinen) Winkel φ_0 aus seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage abgelenkt, dann, im Zeitmomente $t = 0$, durch Oeffnen des Stromkreises plötzlich losgelassen. Er bewegte sich dann gegen die Ruhelage hin nach dem Gesetz:

$$Q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + D \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (M \cdot H + S)\, \varphi = 0 \qquad \text{oder:}$$

$$\varphi = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$$

Für $t = 0$ ist $\varphi = \varphi_0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ sei $= \gamma_0$. Dies gibt die zwei Gleichungen:

$$\varphi_0 = C_1 + C_2 \quad \text{und} \quad -\gamma_0 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \quad \text{woraus:}$$

$$C_1 = \frac{\lambda_2\varphi_0 + \gamma_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{und} \quad C_2 = -\frac{\lambda_1\varphi_0 + \gamma_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\right) + \frac{\gamma_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

Bezeichnen nun φ_1, φ_2 die den zwei Zeiten t_1 und t_2 entsprechenden Ablenkungen des Magneten aus seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage, x_1 und x_2 die zugehörigen (auf Bögen reducirten) Scalenablesungen, so hat man:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{(\varphi_0\lambda_2 + \gamma_0)\, e^{-\lambda_1 t_1} - (\varphi_0\lambda_1 + \gamma_0)\, e^{-\lambda_2 t_1}}{(\varphi_0\lambda_2 + \gamma_0)\, e^{-\lambda_1 t_2} - (\varphi_0\lambda_1 + \gamma_0)\, e^{-\lambda_2 t_2}}$$

Liest man in gleichen Zeitintervallen ab, so dass $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$, $t_3 = 3\Delta t$, ... und bezeichnet man zur Abkürzung die Grösse $e^{-\lambda_1 \Delta t}$ mit m, die Grösse $e^{-\lambda_2 \Delta t}$ mit n, so ist:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\varphi_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{m(\lambda_2\varphi_0 + \gamma_0) - n(\lambda_1\varphi_0 + \gamma_0)} = a$$

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{\varphi_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{m^2(\lambda_2\varphi_0 + \gamma_0) - n^2(\lambda_1\varphi_0 + \gamma_0)} = b$$

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_3} = \frac{\varphi_0(\lambda_2 - \lambda_1)}{m^3(\lambda_2\varphi_0 + \gamma_0) - n^3(\lambda_1\varphi_0 + \gamma_0)} = c$$

. . . .

Aus den drei ersten Quotienten berechnet sich dann:

$$m\,n = \frac{a(ac - b^2)}{bc(b - a^2)} = A \qquad m + n = \frac{a(c - ab)}{c(b - a^2)} = B$$

$$m = \tfrac{1}{2}\left(B + \sqrt{B^2 - 4A}\right) \qquad n = \tfrac{1}{2}\left(B - \sqrt{B^2 - 4A}\right)$$

und daraus:

$$\lambda_1 = -\frac{\log \text{nat}\, m}{\varDelta t} \qquad \lambda_2 = -\frac{\log \text{nat}\, n}{\varDelta t}$$

Diese Formeln sind praktisch verwerthbar, wenn λ_1 und λ_2 nicht sehr verschieden sind. Im andern Fall dagegen wird n im Verhältniss zu B eine sehr kleine Grösse, die schwer genau zu bestimmen ist. Man kann dann aber, bei hinreichend grossem t_1 und t_2 den Werth von m direkt berechnen, indem man setzen darf:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = e^{-\lambda_2(t_1-t_2)} \cdot \frac{\frac{\varphi_0\lambda_2+\gamma_0}{\varphi_0\lambda_1+\gamma_0} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t_1} - 1}{\frac{\varphi_0\lambda_2+\gamma_0}{\varphi_0\lambda_1+\gamma_0} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t_2} - 1} = e^{\lambda_1(t_2-t_1)}$$

woraus folgt, wenn $t_2 - t_1 = \varDelta t$:

$$m = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \text{ und } n = B - m.$$

Auf diese Weise wurde bei einem Zeitintervall $\varDelta t = \frac{1}{20} =$ 3 Sekunden gefunden:

$$m = 0{,}5931 \qquad B = 0{,}6002 \qquad n = 0{,}0071$$

$$\lambda_1 = 10{,}45 \qquad \lambda_2 = 99$$

Setzt man diese Werthe in die für den Hauptversuch gültige Bewegungsgleichung des Galvanometermagneten ein:

$$\varphi = P_1 e^{-\lambda_1 t} + P_2 e^{-\lambda_2 t} + N_1 e^{-b_1(T+t)} + N_2 e^{-b_2(T+t)} + \ldots .$$

so sieht man, dass das Glied $P_2\, e^{-\lambda_2 t}$ schon nach sehr kurzer Zeit völlig bedeutungslos wird. Berechnet man die übrigen Glieder für den Anfangsmoment $T + t_1$ der Beobachtungen, so erhält man z. B. bei der Wood'schen Legirung, wo die Umstände am ungünstigsten waren, indem T nur wenig kleiner, t_1 wenig grösser als $\frac{1}{2}$ genommen werden konnten, folgende Verhältnisse (für $T + t_1 = 1$):

$$P_1 e^{-\frac{\lambda_1}{2}} : N_1 e^{-b_1} : N_2 e^{-b_2} : N_3 e^{-b_3} = 0{,}02 : 1 : 0{,}0058 : 0{,}00028$$

Es durften also in dem Ausdruck für φ alle auf $N_1 e^{-b_1(T+t)}$ folgenden Glieder ohne Weiteres vernachlässigt werden; und nur der Ausdruck $P_1 e^{-\lambda_1 t}$ mochte bei den Versuchen mit dem Wood'schen Metall auf die erste Ablesung einen geringen Einfluss ausgeübt haben. Bei den beiden andern der Untersuchung unterzogenen Metallen, wo mit dem Beginn der Ablesungen bedeutend länger zugewartet werden konnte, fiel dagegen das letzterwähnte Glied ganz ausser Berücksichtigung.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist erwiesen, dass die Bewegung des Galvanometermagneten jedenfalls von dem Zeitpunkt an, wo die Scalenablesungen begonnen wurden, durch die Gleichung dargestellt war:

$$\varphi = N_1 e^{-b_1(T+t)}$$

oder wenn man statt des Ablenkungswinkels φ den Scalenausschlag $x = \mu\varphi$ einführt und für N_1 und b_1 ihre Werthe einsetzt:

$$x = \frac{M.G.\mu\alpha}{Q \cdot W} \cdot \frac{a_1 e^{-\frac{k}{\varrho c}(m_1{}^2 + q_1{}^2)(T+t)}}{\left[\frac{k}{\varrho c}(m_1{}^2 + q_1{}^2)\right]^2 - \frac{k}{\varrho c}(m_1{}^2 + q_1{}^2) A + B} = \text{Const.} u_{T+t}$$

Man war also vollständig berechtigt, die von der Ruhelage aus gemessenen Scalenausschläge als Maass der Temperatur zu benutzen. Unter dieser Voraussetzung kann man dann die Formel (V) auch schreiben:

$$\text{V}^{\text{a}}. \qquad \log \text{nat} \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = (t_2 - t_1) \left\{ \frac{\pi^2 k}{4 \varrho c \varDelta^2} + \frac{O \cdot h}{M \cdot c} \right\} = \text{Const.}$$

Es geht daraus hervor, dass das logarithmische Decrement der Scalenablesungen für gleiche Zeiteu eine constante Grösse ist, ein Resultat, das sich bei den gut verlaufenden Versuchsreiheu bestätigt hat.

Die Ausführung der Versuche geschah iu der Regel iu folgeuder Weise.

Fünf Minuteu vor dem als $t = 0$ bezeichneten Zeitmomeute wurde die Stellung der Ruhelage des Magueteu vou Miuute zu Miuute vorgemerkt, dauu bei $t = 0$ der Metallcylinder auf die Eisplatte aufgesetzt und rasch mit der abgekühlteu Kupferhülle überdeckt, bei $t = 1$ (Minute) die Ruhelage uoch eiumal abgeleseu uud zugleich der Stromkreis geschlossen und bei $t = 2$ endlich der erste Scalenausschlag markirt. Vou diesem Zeitpunkte an wurde je uach Umständen alle 10 oder alle 15 Sekunden der Theilstrich abgelesen, der das Fadenkreuz des Fernrohrs passirte, jedoch war es in alleu Fällen während höchstens zwei Miuuten möglich, noch brauchbare, d. h. wegeu ihrer Kleiuheit nicht zu unzuverlässige Ablesuugen zu machen. Nach Oeffnung des Stromkreises wurde noch eiue Minute gewartet, um die Ruhelage noch einmal zu bestimmen und danu die Variation der letztern während der Dauer des Versuches auf alle eiuzeluen Beobachtungeu vertheilt. Schliesslich wurden je zwei der Zeit nach um eine Minute auseinander liegende Beobachtungeu combiuirt und aus deu so erhalteneu Resultateu das Mittel gezogeu.

Zur schliesslicheu Bestimuuug von k siud ausser deu Dimensionen uud dem Gewichte des Körpers noch die

Dichte, die specifische Wärme und die Grösse h zu kennen nöthig, und zwar streng genommen für das Temperaturintervall von 1° bis 9°. Nun variirt aber die Dichte der Metalle sehr langsam mit der Temperatur. Es genügte daher für den vorliegenden Zweck, dieselbe für Zimmertemperatur zu bestimmen.

Etwas stärker, als die Dichte, ist die specifische Wärme c der Metalle von der Temperatur abhängig. Es erschien desswegen wünschbar, c für eine mittlere Temperatur zu bestimmen, welche wenig verschieden war von der bei den Hauptversuchen auftretenden. Zu diesem Zwecke wurde das Wassercalorimeter angewandt und die einzuwerfende Substanz in einem dünnwandigen, wohlverschlossenen Glasrohr etwa 3/4 Stunden lang in eine Kältemischung aus zerstossenem Eis und Kochsalz eingesetzt, und dadurch auf circa — 20° abgekühlt. Die zur Berechnung dienende Gleichung war:

$$Mc\,(U-u) = (W + m\gamma)\,(u - u_0) + \text{Correctionsgrösse},$$

in welcher bedeutet:

M, c, U Masse, specifische Wärme und Anfangstemperatur des zu untersuchenden Körpers, W das Gewicht des Wassers im Calorimeter, $m\gamma$ den Wasserwerth des Calorimetergefässes sammt Rührer, u_0 die Anfangstemperatur von Wasser und Gefäss, u die Minimaltemperatur der Mischung. Die Correktionsgrösse, welche die Wärmemittheilung von und nach Aussen berücksichtigt, konnte weggelassen werden, da bei der kleinen specifischen Wärme der drei Metalle Wismuth, Blei und Wood'sche Legirung die Minimaltemperatur sehr schnell (schon nach einer Viertelminute) erreicht und überdiess nicht sehr verschieden (im Maximum 2 Grad) von u_0, sowie der Temperatur der Umgebung war.

Bei den ausgeführten Versuchen betrug:

$$m\gamma = 4{,}51 \qquad W + m\gamma = 210 - 230 \qquad M = 200 - 250 \text{ Grm.}$$
$$U = -19^\circ{,}5 \text{ bis } -20^\circ{,}7 \qquad u_0 = 17^\circ \text{ bis } 18^\circ$$

und es wurde gefunden als Mittel für:

Blei $c = 0{,}0296$ Wismuth $c = 0{,}0294$ Wood's Metall $c = 0{,}0362$

Was endlich das äussere Wärmeleitungsvermögen h anbetrifft, so wurde bei allen drei Metallen diese Grösse gleich 0,01 gesetzt, da dieselbe auf die Bestimmung von k von geringem Einfluss ist, nur als Correktionsgrösse fungirt und desshalb durchaus nicht genau bestimmt zu werden braucht. Um jedoch einen Anhaltspunkt zu gewinnen, wurden einige Abkühlungsversuche mit einem Bleicylinder vorgenommen, vom Durchmesser 2,25 cm. und der Länge 5,7 cm., dessen Dimensionen also so klein waren, dass man annehmen konnte, seine sämmtlichen Bestandtheile haben in jedem Zeitmomente dieselbe Temperatur. Derselbe wurde, nachdem er die Temperatur des Zimmers angenommen, an zwei Fäden im Innern einer kupfernen Hülle frei aufgehängt, die aussen von einer grossen Menge Schnee umgeben war und dann der Abkühlung überlassen. Der Temperaturverlauf wurde durch ein Thermoelement von der oben beschriebenen Art gemessen, dessen eine Löthstelle in die Oberfläche des Bleicylinders eingelöthet, die andere in Schnee gesetzt war, und dessen freie Enden in den Stromkreis des für den Hauptversuch benutzten Galvanometers eingeschaltet wurden. Bedeutet u_0 die Anfangstemperatur, u die der Zeit t entsprechende Temperatur des Cylinders, x_0 und x die zugehörigen Scalenausschläge, ferner O die Oberfläche, M die Masse und c die specifische Wärme des Körpers, so wird die Grösse h durch die Gleichung bestimmt:

$$\log \text{nat} \frac{u_0}{u} = \log \text{nat} \frac{x_0}{x} = \frac{h\,O}{M\,c} . t$$

aus der die Versuche ergaben:

$$h = 0{,}0091.$$

Resultate der Beobachtungen.

1) Das erste der untersuchten Metalle war Blei, in Form eines Cylinders, dessen Radius $R = 8{,}03$ cm., Höhe $\varDelta = 6{,}00$ cm., Oberfläche $O = 707{,}8\ \square$ cm., Masse $M = 13790$ gr. Das specifische Gewicht wurde gefunden zu $\varrho = 11{,}352$, die specifische Wärme $c = 0{,}0296$ für das Temperaturintervall von -20° bis $+17^\circ$.

Das Blei war nicht chemisch rein.

Nachdem der Cylinder aufgesetzt, wurde in der Regel zwei Minuten gewartet, dann die Ruhelage noch einmal abgelesen und der Stromkreis geschlossen und nach einer weitern Minute die erste Scalenablesung gemacht, denen die weitern in Intervallen von 15 zu 15 Sekunden folgten. Nach Verfluss von zwei Minuten wurde der Stromkreis geöffnet und am Ende der dritten Minute die Ruhelage des Magneten abermals markirt.

Bedeutet also x die der Zeit t entsprechende, auf Bogen reducirte Ablenkung in Millimetern, $\log x$ den gewöhnlichen Logarithmus dieser Zahl, $\varDelta_1 \log x$ die Differenz der gewöhnlichen Logarithmen von zwei der Zeit nach um 15 Sekunden, $\varDelta_2 \log x$ die Differenz der gewöhnlichen Logarithmen von zwei um eine Minute auseinander liegenden Ablenkungen, so hat man z. B.:

Zeit	x	$\log x$	$\Delta_1 \log x$	$\Delta_2 \log x$
3h 49′	412,9	2,61584		
			0,09838	0,39888
49′15″	329,2	2,51746		
			0,10015	0,40118
49′30″	261,4	2,41731		
			0,09946	0,40532
49′45″	207,9	2,31785		
			0,10089	0,40351
50′	164,8	2,21696		
			0,10068	0,40606
50′15″	130,7	2,11628		
			0,10429	
50′30″	102,8	2,01199		
			0,09765	
50′45″	82,1	1,91434		
			0,10344	
51′	64,7	1,81090		

Die Ruhelage wanderte dabei in 4 Minuten um 3 Skalentheile.

Das Mittel aus den vier ersten Zahlen der letzten Columne ist:

$$0{,}40222$$

und entspricht einer gewissen mittleren Temperatur, die unter der Voraussetzung, dass ϱ, c, k, h constante Grössen sind, durch den Ausdruck dargestellt wird:

$$u_m = \frac{A}{mR\,(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\Delta}\int_0^{R} I^0_{mr} \sin qx \; e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2+q^2)t} \cdot dr\, dx\, dt =$$

$$= A\,\frac{1-\cos q\Delta}{q\Delta}\;\frac{e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2+q^2)t_1} - e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2+q^2)t_2}}{\frac{k}{\varrho c}(m^2+q^2)(t_2-t_1)} \cdot \frac{1}{R}\int_0^R I^0_{mr}\, dr$$

wenn t_1 den Zeitmoment der ersten, t_2 den Zeitmoment der letzten in Betracht gezogenen Ablesung bedeutet. Entsprechen diesen Zeitmomenten die Temperaturen u_1 und u_2 (im Mittelpunkt der obern Basisfläche des Cylinders), so hat man:

$$A \left\{ e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2+q^2)t_1} - e^{-\frac{k}{\varrho c}(m^2+q^2)t_2} \right\} = \frac{u_1 - u_2}{\sin q \varDelta}$$

$$\frac{k}{\varrho c}(m^2 + q^2)(t_2 - t_1) = \log \operatorname{nat} u_1 - \log \operatorname{nat} u_2$$ ferner ist:

$$\frac{1}{R}\int_0^R I^0_{mr}\, dr = 1 - \frac{(mR)^2}{2^2 \cdot 3} + \frac{(mR)^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 5} - \ldots\ldots$$

wofür man in der vorliegenden Frage füglich 1 setzen kann. Endlich darf man annehmen:

$$\frac{1 - \cos q \varDelta}{q \varDelta \sin q \varDelta} = \frac{1 + \dfrac{\frac{h}{k}\varDelta}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\left[\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\frac{h}{k}\varDelta}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]\left[1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\frac{h}{k}\varDelta}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^2\right]} = \frac{2}{\pi}$$

Setzt man alle diese Werthe in den Ausdruck für u_m ein, so geht der letztere über in:

$$u_m = \frac{2}{\pi} \frac{u_1 - u_2}{\log \operatorname{nat}\left(\frac{u_1}{u_2}\right)}$$

Das benutzte Thermoelement zeigte nun einen solchen Zusammenhang zwischen der Temperaturdifferenz u der beiden Löthstellen, deren eine immer auf 0 Grad abgekühlt war, und den Ausschlägen des Galvanometermagneten, dass in der denselben darstellenden Gleichung:

$$u = \alpha \cdot x$$

die Constante α den Werth $\alpha = 0{,}0211$ besass.

Darnach wird für den oben beschriebenen Versuch mit dem Bleicylinder:

$$u_1 = 8^\circ{,}712 \qquad u_2 = 1^\circ{,}732 \qquad u_m = 2^\circ{,}751$$

Würde man die Mitteltemperatur u_m einfach auffassen als halbes arithmetisches Mittel (da die Basisfläche 0 °) aus den, den verschiedenen Zeitmomenten entsprechenden Temperaturen des Mittelpunktes der obern Fläche, so erhielte man:

$$u_m = \frac{1691{,}8 \cdot 0{,}0211}{16} = 2^0{,}231$$

In der folgenden Tabelle sind die Resultate einer Reihe von Versuchen zusammengestellt, die in der Weise, wie der soeben beschriebene, vorgenommen wurden. Die Zahlen bedeuten die Briggs'schen Logarithmen der Verhältnisse $\frac{u_1}{u_2}$ pro 1 Minute, wie sie sich als Mittelwerthe aus je vier bis fünf Logarithmendifferenzen eines Versuches ergaben. Die mittlere Temperatur des Bleicylinders, berechnet nach der obigen Formel, variirte zwischen 2°,40 und 2°,75:

$$\text{Log brigg } \frac{u_1}{u_2} =$$

0,39809	0,40124	0,40496	0,39763
0,40370	0,39901	0,39967	0,40427
0,40120	0,40222	0,40362	

Der Mittelwerth aller dieser Logarithmen ist:

0,40142

dies in die Formel V[a] eingesetzt, gibt:

$$0{,}92432 = 0{,}204 \cdot k + 1{,}734 \cdot h$$

Setzt man nun $h = 0{,}01$, so wird das Verhältniss der beiden Glieder rechts: 1 : 0,019 und man findet für k:

$$k = 4{,}446 \begin{cases} \text{cent.} \\ \text{min.} \\ 1^0\,\text{C.} \end{cases}$$

Dieser Werth bezieht sich also auf eine mittlere Temperatur von beiläufig 2°,6.

Aus den drei Grössen ϱ, c, k leitet sich ein Coefficient ab, der in der Wärmelehre eine nicht unwichtige Rolle spielt, nämlich der sog. Temperaturleitungscoefficient η, welcher gleich ist dem Quotienten aus der Wärmeleitungsfähigkeit und der specifischen Wärme der Volumeneinheit.

$$\eta = \frac{k}{\varrho c}$$

Da die Methode in Folge ihrer Eigenthümlichkeit nicht unmittelbar diese Grösse selbst ergibt, so soll sie hier aus den drei einzeln beobachteten Stücken ϱ, c, k berechnet werden:

Für das untersuchte Blei ergibt sich so, dass innerhalb des betrachteten Temperaturintervalls η den Werth besitzt:

$$\eta = \frac{k}{\varrho c} = 13{,}23$$

2) Als zweite Substanz, die der Untersuchung unterzogen wurde, war chemisch reines Wismuth gewählt worden. Die dabei auftretenden Constanten waren:

$R = 8{,}275$ cm.	$O = 494{,}51$ □ cm.	$\varrho = 9{,}843$
$\varDelta = 2{,}47$ „	$M = 5232$ gr.	$c = 0{,}0294$

Der Stromkreis wurde eine Minute nach dem Aufsetzen des Cylinders geschlossen und in der Regel nach Verfluss einer weitern Minute mit den Ablesungen begonnen, die während zwei Minuten von 15 zu 15 Sekunden fortgesetzt wurden. Eine Minute nach Oeffnen des Kreises las man dann die Ruhelage des Magneten noch einmal ab, um die Variation desselben zu controlliren. — So erhielt man z. B.:

Zeit	x	u	$\log x$	$\varDelta_1 \log x$	$\varDelta_2 \log x$
10^h 47′	490,0	10^0,34	2,67431		
				0,10028	0,40526
47′ 15″	387,0	8^0,16	2,57403		
				0,10127	0,40465
47′ 30″	306,9	6^0,47	2,47276		
				0,10392	0,40161
47′ 45″	242,7	5^0,12	2,36884		
				0,09979	0,39942
48′	193,0	4^0,07	2,26905		
				0,09967	0,40276
48′ 15″	153,4	3^0,24	2,16938		
				0,09823	
48′ 30″	122,5	2^0,58	2,07115		
				0,10173	
48′ 45″	97,5	2^0,06	1,96942		
				0,10313	
49′	78,3	1^0,65	1,86629		

Das Mittel der Logarithmen ist: 0,40274 und entspricht einer mittlern Temperatur $u_m = 3^\circ,0$.

In ähnlicher Weise wurde gefunden:

$$\log \text{brigg} \frac{u_1}{u_2} =$$

0,40217	0,39960	0,40088
0,40218	0,40274	0,40247
0,40032	0,40273	
0,39800	0,40444	

Hieraus ergibt sich als Gesammtmittel der Werth:

$$0,40155$$

Setzt man diesen in die Gleichung (V^a), so erhält man:

$$0,92103 = 1,3975\, k + 3,215\, h$$

Das Verhältniss vom Hauptglied zum Correktionsglied ist, wenn wiederum $h = 0,01$ gesetzt wird: 1 : 0,036 und als Werth von k folgt schliesslich:

$$k = 0,639$$

für eine mittlere Temperatur von:

$$u_m = 2^\circ{,}8$$

Die Temperaturleitungsfähigkeit des Wismuth ist daher für dieses u_m angenähert:

$$\frac{k}{\varrho c} = 2{,}21$$

also viel kleiner als diejenige des Eisens. Denn nach den neuesten Messungen der Herren Kirchhoff und Hansemann ist für Eisen bei einer Temperatur von 15°:

$$\frac{k}{\varrho c} = 16{,}94 \left\{\begin{array}{l}\text{mill}\\ \text{sec}\\ 1^\circ\,\text{C.}\end{array}\right. \text{oder} = 10{,}16 \left\{\begin{array}{l}\text{cent.}\\ \text{min.}\\ 1^\circ\,\text{C.}\end{array}\right.$$

Die bekannte Erscheinung, dass ein Wachsüberzug auf eine Wismuthplatte schneller schmilzt, als auf einer gleich dicken und in gleicher Weise erwärmten Eisenplatte, muss somit einen andern Grund haben als die ungleiche Temperaturleitungsfähigkeit derselben Metalle; und es ist desswegen auch anzunehmen, dass die von Ingenhouss [1]) zur Bestimmung der relativen Wärmeleitungsfähigkeit verschiedener Metalle angewandte Methode des Schmelzens von Wachsüberzügen nicht allzu grosse Zuverlässigkeit beanspruchen kann.

3) Das dritte Metall, dessen Leitungsfähigkeit für die Wärme bestimmt wurde, war die sogen. Wood'sche Metalllegirung. Der verwendete Cylinder zeigte folgende Verhältnisse:

$$R = 8{,}31 \text{ cm.} \qquad O = 533{,}3 \,\square\, \text{cm.} \qquad \varrho = 9{,}730$$
$$\varDelta = 2{,}29 \text{ cm.} \qquad M = 4826 \text{ gr.} \qquad c = 0{,}0362$$

Da die Höhe $\varDelta$ sehr gering und die Wärmeleitungsfähigkeit bedeutend besser als bei Wismuth, so gieng die Abkühlung sehr rasch vor sich. Es wurde desswegen eine

---

[1]) Ingenhouss. Journal de physique, T. XXXIV.

halbe Minute nach dem Aufsetzen des Cylinders der Stromkreis geschlossen und nach einer weitern halben Minute mit den Ablesungen begonnen. Da aber der Cylinder wegen des niedern Schmelzpunktes des Metalles nicht stark erwärmt werden konnte, so betrug der erste abgelesene Scalenausschlag nie mehr als ungefähr 200 mm. und die folgenden nahmen im Laufe einer Minute, während der sie von 10 zu 10 Sekunden markirt wurden, fast bis zu Null ab.

Als Beispiel möge folgende Reihe dienen:

Zeit	x	u	$\log x$	$\Delta \log x$ (pro 10″)
10^h 10′	216,4 (?)			
10′ 10″	165,5	3°,49	2,21880	
				0,17597
10′ 20″	110,4	2°,33	2,04297	
				0,17787
10′ 30″	73,3	1°,55	1,86510	
				0,17846
10′ 40″	48,6	1°,02	1,68664	
				0,17744
10′ 50″	32,3	0°,68	1,50920	
				0,18082
11′ —	21,3	0°,45	1,32838	

Das Mittel aus diesen Zahlen ist:

pro 10″ : 0,17811 pro 1′ : 1,06867

und bezieht sich auf eine mittlere Temperatur von:

$$u_m = 0°,98$$

Andere Versuche ergaben pro 1 Minute:

log brigg $\frac{u_1}{u_2}$ =	u_m =	log brigg $\frac{u_1}{u_2}$ =	u_m =
1,07799	1°,27	1,08070	1°,05
1,04372	0°,80	1,08294	1°,18
1,08940	0°,78	1,08066	1°,63
1,05000	1°,71	1,05294	1°,10
1,07202	1°,30		

Das Mittel aus allen Logarithmen ist:

1,06990

Das Mittel aus allen u_m:

1°,20

Darnach erhält man die Gleichung:

$$2{,}46352 = 1{,}335\,k + 3{,}053\,h$$

oder wenn $h = 0{,}01$ gesetzt wird:

$$k = 1{,}823$$

Das Verhältniss vom Hauptglied zum Correktionsglied ist hier:

$$1 : 0{,}0125$$

Schliesslich hat man:

$$\frac{k}{\varrho c} = 5{,}176$$

Zusammenstellung der Resultate.

Es wurde gefunden für:

Blei:	$\varrho = 11{,}352$	$c = 0{,}0296$	für $u_m = 2^\circ{,}6$
	$k = 4{,}446$	$\frac{k}{\varrho c} = 13{,}23$	
Wismuth:	$\varrho = 9{,}843$	$c = 0{,}0294$	für $u_m = 2^\circ{,}8$
	$k = 0{,}639$	$\frac{k}{\varrho c} = 2{,}21$	
Wood's Metall:	$\varrho = 9{,}730$	$c = 0{,}0362$	für $u_m = 1^\circ{,}2$
	$k = 1{,}823$	$\frac{k}{\varrho c} = 5{,}176$	

Von frühern Untersuchungen derselben Metalle standen mir nur folgende Resultate zu Gebote:

1) Von Péclet [1]) für Blei:

$k = 3{,}84$	$q = 1$ □m $d = 1$ mm Secunde Kilogramm 1° Celsius	oder reducirt $k = 2{,}3$	Centimeter Minute Gramm 1° Celsius

[1]) Pogg. Ann. Bd. 55 (1842).

2) Von Wiedemann und Franz [1]) und Despretz [2]) die relativen Werthe:

	Ag	*Cu*	*Pb*	*Bi*	Wood'sches Metall
Despretz	973	898,2	179,6		
W. u. F.	100	73,6	8,5	1,8	2,8 (Rose's Metall)

Würde man den absoluten Werth von k für Kupfer gleich 50 setzen, so ergäbe sich nach Wiedemann und Franz für:

Blei $k = 5{,}8$, Wismuth $k = 1{,}22$, Rose's Metall $k = 1{,}90$.

1) Pogg. Ann. Bd. 89 (1853).
2) Pogg. Ann. Bd. 12 (1828).

Notizen.

Untersuchung über die in Zürich vorkommenden Niederschläge. Die deutliche Beziehung zur Jahreszeit, welche nach den gegebenen Zahlen die Gewitter auszeichnen, sucht man in einer Uebersicht der Vertheilung der Niederschläge (Regen, Schnee und Schlossen) beinahe umsonst auf. Allerdings zeigt der Dezember die kleinste, der Juni die grösste Zahl von Niederschlägen; aber auch manche Tage des Jänner, März, April, September und Oktober zeichnen sich durch eine geringe Zahl von Niederschlägen aus und dazwischen liegen dagegen kürzere Zeiten mit einer verhältnissmässig grossen Anzahl derselben. Nachfolgende Uebersicht ist das Ergebniss aus 94jährigen Beobachtungen, die indess, wegen mancher Lücken, nur zur Bildung von 92 vollständigen Jahrgängen benutzt werden konnten. Zu den früher angeführten Beobachtungen sind noch die fünf Jahre 1762—66, beobachtet von J. J. Ott und Spitalmeister Meyer in Zürich, hinzugekommen, während das Jahr 1828 für den vorliegenden Zweck nicht benutzt werden konnte. Die Gesammtzahl der in den 92 Jahren