Geometrische Mittheilungen

von

Wilh. Fiedler.

VI. Die Curven vierter Ordnung oder Classe vom Geschlecht Eins nach darstellend geometrischer Methode.

In der Versammlung vom 28. Juli 1883 habe ich unter Vorweisung und zur Erläuterung von Modellen die Darstellungen der Durchdringungscurve von Flächen zweiten Grades im Sinne der Ueberschrift besprochen, als Curven vierter Ordnung vom Geschlecht Eins oder mit zwei Doppelpunkten; und sodann speciell die einfachsten Bilder der Curve hervorgehoben, welche möglich sind, nämlich die Centralprojectionen aus den vier Punkten des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole für die sich durchdringenden Flächen, welche Kegelschnitte sind; das Letztere, um eine daraus entspringende projectivische Beziehung zwischen den Kegelschnitten eines Büschels und denen der Schaar aus zweien unter ihnen auseinander zu setzen, welche sich bei Flächen zweiten Grades wiederholt. Wie die allgemeine Frage, so war auch diese specielle seit lange Gegenstand meiner Untersuchungen, mehrfach erörtert in meinem mathematischen Seminar und um jene Zeit zugleich bearbeitet in dem Manuscript für die 3. Auflage meines Buches »Die darstellende Geometrie in org. Verbindung mit der Geometrie der Lage«, Bd. II. Vergl. §§ 25 f., 46 das. Ich halte es nicht für überflüssig, hier die wesentlichen Punkte dieser Erörterung in Kürze anzugeben, die sich am vollständigsten und einfachsten darstellen lassen an dem Falle der Durchdringung von zwei reellen Kegelflächen zweiten Grades.

Algebraische ebene Curven, deren Geschlecht Eins nicht übersteigt, sind ausser den Kegelschnitten und den Curven dritter Ordnung resp. Classe zunächst diejenigen Curven vierter Ordnung oder Classe, welche zwei Doppelpunkte resp. zwei Doppeltangenten besitzen. Es wird genügen, nur von den Curven 3. und 4. Ordnung zu sprechen und die dual entsprechenden Fälle unbesprochen zu lassen; aber es soll nicht übersehen werden, dass es sich in diesem Sinne eigentlich um die projicirenden Kegel der betrachteten Raumcurve handelt, deren jeder dann mit jeder beliebigen Ebene des Raumes ein Bild derselben erzeugt.

Für die Raumcurve 4. Ordnung aus zwei Flächen zweiten Grades sind nun nur die von den Ecken des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole ausgehenden projicierenden Kegel Kegel zweiten Grades; alle die einfach unendlich vielen projicierenden Kegel der Curve aus Punkten in ihr selbst sind Kegel dritter Ordnung und die projicierenden Kegel aus allen übrigen reellen Punkten des Raumes — an Zahl dreifach unendlich — sind Kegel vierter Ordnung, deren Geschlecht Eins nicht übersteigt, weil jeder derselben in den beiden geraden Erzeugenden der den Punkt enthaltenden Fläche des Büschels von Flächen zweiten Grades, das durch die Curve geht, welche von jenem ausgehen, zwei Biseklanten der Curve oder zwei Doppelerzeugende besitzt; auch wenn diese nicht selbst reell sind, ist es doch immer ihre Verbindungsebene, die Tangentialebene der besagten Fläche im betrachteten Punkte.

Bezeichnet man unter μ und ν die Ordnung und Classe, durch δ und τ die Zahl der Doppelerzeugenden und resp. der Doppeltangentialebenen, sowie durch $\varkappa$ und ι die Zahlen der stationären Erzeugenden und resp. Tangentialebenen, so sind die wesentlich verschiedenen Kegel dritter und vierter Ordnung, deren Geschlecht Eins nicht übersteigt, die von folgenden zehn Gruppen von Charakteren.

	μ	ν	δ	τ	$\varkappa$	ι
I	3	6	0	0	0	9
II	3	4	1	0	0	3
III	3	3	0	0	1	1
IV	4	8	2	8	0	12
V	4	7	1	4	1	10
VI	4	6	0	1	2	8
VII	4	6	3	4	0	6
VIII	4	5	2	2	1	4
IX	4	4	1	1	2	2
X	4	3	0	1	3	0

Unter ihnen sind die Kegel oder Curven in II, III und in VII bis X rational; die übrigen vom Geschlecht Eins.

In den Fällen der Kegel und Curven vierter Ordnung gehen aber überdies aus der möglichen Vereinigung der Doppelerzeugenden etc. untereinander oder mit Rückkehrerzeugenden etc. besondere Formen hervor, die hervorgehoben werden müssen. (Vergl. Salmon-Fiedler, »Analyt. Geom. der höheren ebenen Curven«, 2. Aufl., p. 279 f.) Der Bequemlichkeit wegen von den Spurcurven statt von den Kegeln selbst sprechend sagen wir: Wenn die singulären Punkte reell sind, so sind folgende Coincidenzen möglich:

1) Zwei Doppelpunkte, die einander unendlich nahe rücken, bilden einen Berührungsknoten, eine gewöhnliche zweipunktige Berührung von zwei Aesten der Curve;

im Falle IV bezeichnet dann $\delta = 2$ den Berührungsknoten und $\tau = 8$ die doppelt zählende Doppel-Tangente in diesem und sechs andere Doppeltangenten, während im Falle VIII ausser jener nur noch zwei andere Doppeltangenten existiren.

2) Ein Doppelpunkt und ein Rückkehrpunkt erzeugen durch ihre Vereinigung eine Schnabel- oder Knoten-Spitze, deren Tangente einmal als Doppeltangente und einmal als stationäre Tangente zählt; in den Fällen V, VIII, IX bezeichnet also diese Spitze je einen Doppel- und einen Rückkehrpunkt; im Falle V gibt es noch drei andere Doppeltangenten und neun andere Inflexionstangenten, im Falle VIII noch eine und drei resp. und im Falle IX keine andere Doppeltangente und nur noch eine stationäre Tangente.

3) Das Zusammenrücken von drei Doppelpunkten an einer Stelle von endlicher Krümmung erzeugt einen Osculationsknoten, eine Stelle der dreipunktigen Berührung oder Osculation zwischen zwei Aesten der Curve; die zugehörige Tangente zählt dreifach als Doppeltangente und es gibt daher ausser ihr nur noch eine andere Doppeltangente (VII).

4) Wenn in derselben Weise zwei Doppelpunkte und ein stationärer Punkt zu Nachbarn werden, so entsteht die Berührungsknotenspitze, ein vierpunktiger Schnitt der beiden Aeste der Curve, die sich in einer Spitze verbinden; die entsprechende Tangente zählt als Doppeltangente zweifach und es existirt daher (VIII) keine andere Doppeltangente; und sie zählt als stationäre Tangente einfach, so dass noch drei andere Inflexionen vorhanden sind.

Ueberdiess können in VII die drei Doppelpunkte als

Ecken eines unendlich kleinen Dreiecks zusammenfallen, oder ebenso in VII die zwei Doppelpunkte mit der Spitze, oder in IX die zwei Spitzen mit dem Knotenpunkt; woraus die Formen der Curve mit dreifachem Punkt hervorgehen, welche nicht hieher gehören, sondern zu den rationalen Raumcurven vierter Ordnung, die als theilweise Durchdringungen aus einer Fläche zweiter mit einer Fläche dritter Ordnung entstehen und für die daher alle geraden Mantellinien der ersten dreifach schneidende Sekanten sind.

Am a. O. p. 285 ist auch der in Curven vierter Ordnung zuerst mögliche Singularität der Undulation, d. h. der vierpunktigen Berührung mit einer Geraden gedacht; diese Tangente vertritt zwei Inflexionstangenten und eine Doppeltangente.

In dem Büschel von Flächen zweiten Grades, welches durch die Durchdringungscurve von zwei solchen Flächen geht, bilden die doppelt projicierenden Kegel die Uebergangsformen von den einfachen zu den zweifachen Hyperboloiden. Enthält dasselbe, wie bei den Eindringungen oder eintheiligen Durchdringungen, nur zwei reelle Kegel, K_1 und K_2, so bildet der eine derselben den Uebergang von einer Reihe der einfachen Hyperboloide zur Reihe der zweifachen und der andere den Uebergang von dieser wieder zu jener; enthält er der Kegel vier, wie bei den eigentlichen oder zweitheiligen Durchdringungen, so treten zwei Reihen H_{11}, H_{12} einfacher und zwei Reihen H_{21}, H_{22} zweifacher Hyperboloide im Büschel auf und wenn der erste Kegel den Uebergang bildet von der Reihe H_{11} zu der Reihe H_{21}, der zweite von H_{21} zu H_{12}, so gibt der dritte den von H_{12} zu H_{22} und der vierte den von H_{22} zu H_{11} zurück. Enthält das Büschel keine reellen Kegel, so besteht es aus lauter einfachen Hyperboloiden. Im Falle von vier reellen Kegeln sind alle Ecken, Kanten und Flächen des gemeinsamen Quadrupels reell; wenn nur zwei der Kegel reell sind, so sind zwei Ecken und zwei Flächen, sowie die zwei Kanten reell, in deren einer jene liegen und in deren anderer diese sich schneiden. Im Büschel ohne reelle Kegel gibt es keine reellen Ecken und keine reellen Flächen des Quadrupels; nur ein Paar von Gegenkanten desselben bleiben reell, zwei Gerade, welche in Bezug auf alle Flächen des Büschels zu einander polar sind. Die reellen Ebenen des Quadrupels sind die Ebenen der Doppelcurven oder Selbstdurchdringungen der Tangentenfläche der Curve, Curven vierter Ordnung, welche Doppelinflexionsknoten in den Ecken des Quadrupels haben; bei nur zwei reellen Kegeln sind auch nur die beiden Doppelcurven in den ihren Spitzen gegenüberliegenden reellen Quadrupelebenen reell; und die Durchdringungscurve des nur aus einfachen Hyperboloiden bestehenden Büschels hat wie keine reellen Kegel auch keine reellen Doppelcurven. (Vergl. meine »Darstell. Geom.«, 3. Aufl. II, § 45.)

Die Lage des Centrums, von welchem aus die Durchdringungscurve projiciert wird, entscheidet nun über die Eigenschaften des projicierenden Kegels. Liegt es in der Region der einfachen Hyperboloide des Büschels, so hat der Kegel zwei reelle Doppelkanten und längs jeder derselben zwei verschiedene Tangentialebenen, nämlich die projicierenden Ebenen der Tangenten der Curve in ihren Schnittpunkten mit der betreffenden Doppelkante; während für die Lage in der Region der zweifachen Hyperboloide nur die Verbindungsebene derselben reell ist. Es findet also stets das erste statt, wenn das Büschel keine reellen Kegel enthält (IV). Im andern Falle findet durch die Mäntel der Kegel hindurch der Uebergang aus der einen Region in die andere statt. Für die Lage des Centrums in einem beliebigen Punkte auf dem Mantel eines doppelt projicierenden Kegels rücken die beiden Doppelkanten unendlich nahe zusammen und es findet Selbstberührung des Kegels längs der entsprechenden Mantellinie statt.

Liegt das Projectionscentrum auf der Tangentenfläche der Curve (vergl. »Darstell. Geom.«, a. a. O., § 24), also in einer Tangente derselben, so ist diese selbst die eine Doppelkante; weil aber die projicierenden Ebenen der zu ihren beiden Schnittpunkten mit der Curve gehörigen Tangenten sich in der zugehörigen Tangentialebene der entwickelbaren Fläche vereinigen, so ist diese Doppelkante zur Rückkehrkante geworden und es bleibt nur eine eigentliche nothwendig reelle Doppelkante übrig (V). Vier Doppeltangentialebenen und zwei stationäre Tangentialebenen verschwinden dafür.

Mit der Lage in einer Doppelcurve der Tangentenfläche werden beide Doppelkanten des projicierenden Kegels zu Rückkehrkanten in den zugehörigen Mantellinien von jener und mit den zugehörigen Tangentialebenen als Rückkehrtangentialebenen (VI). Im Falle des Büschels ohne reelle Kegel kann auch dies nicht eintreten.

Dagegen kann in allen Fällen einer reellen Durchdringung das Projectionscentrum auf der Curve selbst genommen werden; der projicierende Kegel ist dann nur von der dritten Ordnung nach der Zahl der Schnittpunkte, die eine durch das Centrum gehende Ebene noch ausser ihm mit der Curve gemein hat; seine Classe ist um zwei und die Zahl seiner Inflexionstangentialebenen um drei vermindert, weil im Centrum zwei Tangenten der Curve und drei Schmiegungsebenen derselben sich schneiden, die in ihm selbst berühren. Desshalb erscheinen auch keine singulären Punkte und keine Doppeltangentialebenen mehr und man erhält den Fall I.

Der auch stets mögliche Fall der Lage *in einer Kante des Quadrupels* hat keine in der Tafel der Charaktere erscheinende Veränderung zur Folge; ebenso die Lage *in einer Quadrupelfläche*, welche in jedem der Fälle mit reellen Kegeln möglich ist.

In diesem Falle kann aber das Centrum überdiess nicht nur *in einer Ecke des Quadrupels* speziell gewählt werden, sondern auch *in einer der Mantellinien eines doppelt projicierenden Kegels, welche zugleich Tangenten der Curve sind* oder auch ihrer developpablen Fläche angehören. Offenbar werden sich dann die Eigenthümlichkeiten der projicierenden Kegel vereinigt zeigen, welche beiden Fällen einzeln zukommen, also der Berührungsknoten und der Rückkehrpunkt vor Allen, so dass der Fall II entsteht.

Da die Curve acht *reelle stationäre Schmiegungsebenen* haben kann, und für die Lage des Centrums *in einer* derselben diese für zwei der durch dasselbe gehenden Schmiegungsebenen oder der Inflexionstangentialebenen des zugehörigen projicierenden Kegels zählt, so erhalten wir hier eine vierstrahlig berührende Doppelinflexionstangentialebene des Kegels oder eine *Undulationskante* desselben. Es ist klar, dass in den Punkten ihrer Schnittlinien zu zweien dies zweimal und in ihren Schnittpunkten zu dreien dreimal geschieht; unter diesen letzteren Punkten sind die Spitzen der doppelt projicierenden Kegel, durch welche je noch eine vierte der stationären Ebenen geht — oder im Falle der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten bedingt die vierfache Undulation den Uebergang in einen doppelt zählenden Kegelschnitt oder überall Undulation. Die Lage in der Tangente der Curve, längs welcher die stationäre Ebene die Developpable berührt, macht die Undalationsstelle des Bildes zu einer Spitze zweiter Art oder Schnabelspitze. (»Darstellende Geom.« a. a. O. § 24, 2.) Für die Durchdringung ohne reelle Kegel sind auch diese Specialitäten nicht möglich.

Während nun dies Alles von der Durchdringung ohne singulären Punkt gilt, erinnern wir jetzt, dass dieselbe auch entweder selbst einen Doppelpunkt, und zwar als Knoten oder isolirt, oder einen stationären Punkt besitzen kann, der für jede Lage des Projectionscentrums ausser ihm selbst eine Doppel- resp. Rückkehrkante des projicierenden Kegels hervorruft. Es ist ersichtlich, dass die Fälle VII bis X sich hieran anschliesen. Die Curve mit Doppelpunkt wird für beliebige Lage des Centrums einen projicierenden Kegel mit drei Doppelkanten (VII) liefern, von denen stets wenigstens eine und dazu die Verbindungsebene der beiden andern reell ist. Der Lage des Centrums in der Tangentenfläche der Curve entspricht der Uebergang von einer dieser Doppelkanten in eine Rückkehrkante (VIII) und der Lage in einer Doppelcurve der Tangentenfläche (»Darstell. Geom.« a. a. O. § 25) der Uebergang beider in Rückkehrkanten, also IX. Hat die Curve aber selbst einen stationären Punkt, so erscheint sie von jedem Centrum von allgemeiner Lage aus als Curve vierter Ordnung mit einer Spitze und zwei Doppelpunkten, welche entweder selbst reell sind oder doch eine reelle Verbindungsgerade haben (VIII). Aus dem Punkte einer Tangente resp. dem Schnittpunkt von zwei nicht benachbarten Tangenten erscheint sie aber als Curve mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt (IX) oder als Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen (X). Und wieder rücken für ein Centrum im Mantel eines doppelt projicierenden Kegels die Doppelpunkte zum Berührungsknoten zusammen und es ist offenbar, dass dabei unterschieden werden muss, zwischen der Lage im Mantel des (doppelt oder dreifach zählenden) uneigentlichen, doppelt projicierenden Kegels, der den singulären Punkt der Raumcurve zur Spitze hat, und der Lage im Mantel eines der beiden eigentlich doppelt berührenden Kegel resp. des einzigen eigentlichen Kegels dieser Art. Endlich wird wieder die Lage in einer der die Durchdringung berührenden Mantellinien eines dieser Kegel den speciellsten Fall hiezu bilden.

Die Lage auf der Durchdringungscurve selbst zuletzt liefert einen projicierenden Kegel dritter Ordnung mit singulärer Kante, also dem Falle II resp. III entsprechend für eine Durchdringung mit Doppelpunkt resp. mit stationärem Punkt.

Es bleibt übrig, anzugeben, wie in der darstellend geometrischen Disposition sich die speciellen Lagen des Centrums ausprägen und es mag genügen, das für den Fall der Durchdringung aus zwei reellen Kegeln zu erläutern; denn in diesem sind alle die zur Erörterung gekommenen Lagen wirklich möglich. Die Lage in einer Quadrupelfläche resp. -Kante übergehe ich, ebenso wie die in einer stationären Ebene. Die Lage in der zugehörigen Tangente entspricht der Vereinigung der beiden folgenden Hauptfälle: Lage in der Tangentenfläche, resp. im Mantel eines doppelt projicierenden Kegels. Seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte und L_1, L_2 die Spurkegelschnitte der Kegel, so ist das Projectionscentrum ein Punkt in der Tangentenfläche der Durchdringung, wenn eine der vier Geraden, die den Berührungspunkt einer Umrisskante von M_1, L_1 an L_1 mit dem einer Umrisskante von M_2, L_2 an L_2 verbinden, durch den Durchstosspunkt S der Geraden $M_1 M_2$ in der Bildebene geht. (Vergl .a. a. O. Fig. 47 und § 26.) Der Schnitt der bezeichneten Umrisskantenprojectionen ist der stationäre Punkt des Bildes. Das Centrum liegt also in zwei nicht benachbarten Tangenten der Durchdringung, wenn der Durchstosspunkt S der Verbindungslinie der Spitzen der Schnitt von zweien der vorbezeichneten vier geraden Linien ist.

Das Centrum liegt im Mantel eines doppeltprojicierenden Kegels, wenn das Bild seiner Spitze ein Punkt seines Spurkegelschnittes ist; dieser Punkt wird zum Berührungsknoten des Bildes der Durchdringung.

Ist dies für zwei sich durchdringende Kegel der Fall, so liegt das Projectionscentrum in der Durchdringungscurve und ihr Bild wird zur allgemeinen Curve dritter Ordnung.

Die Construction des Bildes zeigt uns aber in diesem Falle zwei involutorische Strahlenbüschel aus den Scheiteln M_1' in L_1 und M_2' in L_2, welche denselben Punkt S in der Verbindungsgeraden der Scheitel zum Pol in L_1 und L_2 haben; die Strahlenpaare derselben, welche durch das Sehnenbüschel der Hilfsebenenspuren einander projectivisch zugeordnet sind, erzeugen durch ihre Schnittpunkte die Projection der Curve. Es ist die Construction der Curve dritter Ordnung aus zwei projectivischen Involutionen, deren gemeinsamer Strahl zwei entsprechenden Paaren angehört.

Wenn wir bemerken, dass eine Fläche zweiten Grades aus einem ihrer Punkte als Centrum durch die Kegelschnitte dargestellt werden kann, welche ihre ebenen Querschnitte abbilden, nämlich die Kegelschnitte der Tafel, welche in einer gegebenen Geraden eine gegebene Involution harmonischer Pole haben, so ist es nicht schwer, die Durchdringung von zwei Flächen zweiten Grades aus einem ihrer Punkte allgemein darzustellen. (»Darstell. Geom.« a. a. O. § 41 und § 45, 30.)

Aber die wirkliche Durchführung aller im Früheren berührten Dispositionen würde zu weit führen. Ich wollte auch hier eine eingehende Untersuchung nur mehr disponiren als ausführen. Dieselbe führt zu einer Menge interessanter und nützlicher Ergebnisse.

VII. Drei gleichseitige Rotationshyperboloide desselben Büschels.

Wenn die Axe des ersten Hyperboloides die Axe z und seine Hauptebene die Ebene xy ist, während die Axen der beiden anderen in den Abständen c_3 und c_2 von z in xz und ihre Hauptebenen in den Abständen d_3, d_2 von xy liegen, so sind ihre Gleichungen

$$x^2+y^2-z^2=r_1^2,\ (x-c_3)^2+y^2-(z-d_3)^2=r_2^2,\ (x-c_2)^2+y^2-(z-d_2)^2=r_3^2,$$

und die Ebenen der Durchdringungen des ersten mit dem zweiten und resp. dritten sind

$$-2c_3x+c_3^2+2d_3z-d_3^2=r_2^2-r_1^2,\quad -2c_2x+c_2^2+2d_2z-d_2^2=r_3^2-r_1^2;$$

sie haben die gleiche Stellung, wenn

$$d_3 : c_3 = d_2 : c_2\,,$$

d. h. wenn die Mittelpunkte der drei Flächen in einer Geraden liegen, und die gleiche Spur in xy, wenn

$$c_2\,(r_1^2-r_2^2+c_3^2-d_3^2)=c_3\,(r_3^2-r_1^2+c_2^2-d_2^2)$$

oder

$$c_3^2d_2^2-c_2d_3^2=c_2c_3(c_2-c_3)-c_2(r_1^2-r_2^2)-c_3(r_1^2-r_3^2)$$

ist. Mit $d_1=d_2-d_3$ und $c_1=c_2-c_3$ erhält man, der Verlegung des Coordinatenanfangs in den Mittelpunkt des zweiten und resp. dritten Hyperboloides entsprechend, durch Vertauschung von 1 mit 2 und Wechsel des Zeichens bei

3 und nachher von 2 mit 3 und Wechsel des Zeichens bei 1 zwei weitere Bedingungsgleichungen. Sie genügen zur Bestimmung von $d_1^{\,2}$, .. und man erhält

$$d_1^{\,2}=\frac{c_1}{c_2c_3}S,\ d_2^{\,2}=\frac{c_2}{c_3c_1}S,\ d_3^{\,2}=\frac{c_3}{c_1c_2}S \text{ mit } S\equiv c_1c_2c_3-c_1r_1^{\,2}+c_2r_2^{\,2}-c_3r_3^{\,2},$$

oder mit einem Wechsel des Zeichens bei c_2, sodass dann $c_1+c_2+c_3=0$ ist

$$d_i^{\,2}=\frac{c_i}{c_jc_k}S \text{ für } S\equiv c_1c_2c_3+c_1r_1^{\,2}+c_3r_2^{\,2}+c_3r_3^{\,2}.$$

Nach diesen Bestimmungen ist die Orthogonalprojection des Durchdringungskegelschnittes in der Richtung der Flächenaxen der Kegelschnitt, welcher die Projectionen der drei Hauptkreise, d. h. irgend drei Kreise von einerlei Centrale je doppelt berührt. Die Fälle von einfachen und zweifachen Hyperboloiden, sowie von Kugeln als den sich durchdringenden Flächen sind darin eingeschlossen; die zweifachen Hyperboloide entsprechen den negativen Werthen der Radienquadrate r_1^2, r_2^2 oder r_3^2; die Kugeln dem negativen Werth der Summe S, welcher die d_i^2 negativ macht und damit den Gliedern mit $(z-d_i)^2$ in den Gleichungen das positive Zeichen giebt. (Vergl. weiterhin IX, p. 362 f.)

Man zieht aus den Bedingungen die allgemeinen Relationen

$$\frac{d_1^{\,2}}{c_1}+\frac{d_2^{\,2}}{c_2}+\frac{d_3^{\,2}}{c_3}=0,\ \left(\frac{d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}}{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}\right)^3=\left(\frac{d_1d_2d_3}{c_1c_2c_3}\right)^2$$

$$d_1^{\,2}d_2^{\,2}d_3^{\,2}=\frac{S^3}{c_1c_2c_3},\quad d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}=S\,\frac{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}+c_3^{\,2}}{c_1c_2c_3};$$

man erhält für $d_i^2=c_i^2$, $d_i^2=\frac{1}{2}c_i^2$ und $d_i^2=2c_i^2$ resp. den doppelt berührenden Kegelschnitt als Parabel, gleichseitige Hyperbel und gleichseitige Ellipse respective, für verschwindende c_i, womit die d_i unbestimmt werden, als Kreis — letzteres weil concentrische Kreise einander in unendlicher Ferne doppelt berühren.

Beispielsweise sind für die Ellipse resp. Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y_2}{b_2} = 1 \quad \text{mit} \quad c^2 = a^2 \mp b^2 \quad \text{resp.}$$

die reellen Brennpunkte und der Kreis aus dem Mittelpunkte mit dem Radius b resp. ib und wieder die imaginären Brennpunkte und der Kreis aus dem Mittelpunkt mit dem Radius a ein Tripel doppelt berührender Kreise unserer Art. Man hat im ersten Falle für die Ellipse $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 = b$, $c_3 = c = c_1$, $c_2 = -2c$, also $S = 2a^2c$ und $d_1^2 = d_3^2 = a^2$, $d_2^2 = (2a)^2$; letzteres der alte Satz von der Summe der Radien vectoren, ersteres aber der neue Satz: Die Tangente vom Ellipsenpunkt an den über der Nebenaxe als Durchmesser beschriebenen Kreis hat mit dem einen Radius vector des Punktes die grosse Halbaxe zur Summe und mit dem andern zur Differenz. Für die Hyperbel ist im ersten Falle $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 = ib$, $c_1 = c_3 = c$, $c_2 = -2c$ und somit $S = -2ca^2$ und $d_1^2 = d_3^2 = a^2$, $d_2^2 = (2a)^2$; man hat bei der Formulierung des neuen Satzes nur zu beachten, dass der Kreis K_2 hier rein imaginär ist, so dass (vergl. IX) die orthogonal schneidenden Kreise in diametral schneidende übergehen. Im Fall der imaginären Brennpunkte hat man $c_1 = c_3 = ic$ und $c_2 = -2ic$, $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 = a$ und daher $S = 2ic(c^2 - a^2) = \mp 2icb^2$ oder $d_1^2 = d_3^2 = \pm b^2$, $d_2^2 = \pm(2b)^2$; Relationen, welche die entsprechenden Sätze auf die imaginären Brennpunkte in der Nebenaxe oder auf einen derselben und den Kreis über der Hauptaxe als Durchmesser ausdehnen. Es sind die Fälle, wo zwei der Hyperboloide in Kegel übergegangen sind. Ist nur das Hyperboloid 3 ein Kegel, so ist $r_3 = 0$ und die Relationen $d_i^2 = \frac{c_i}{c_j c_k} S$ mit $S = c_1 c_2 c_3 + c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2$ verbinden zwei doppelt berührende Kreise von endlichen Radien aus Punkten derselben Axe mit einem Brennpunkt in ihr.

Wenn das Polynom S den Werth Null hat, so sind die $d_i = 0$, die Hyperboloide haben die nämliche Hauptebene, ihre gemeinschaftliche Durchdringung ist eine gleichseitige Hyperbel in zur Centrale x normaler Ebene, die sich in der Potenzlinie des Büschels der Hauptkreise projiciert. Der doppelt berührende Kegelschnitt zu den drei Hauptkreisprojectionen ist die doppelt zählende Potenzlinie derselben; für das Büschel mit Grenzpunkten die ganze Potenzlinie, für das mit Grundpunkten das äussere unendlich grosse Segment derselben. Für drei Kreise eines Büschels ist somit bei $-c_2 = c_1 + c_3$

$$c_1 c_2 c_3 + c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$-1 = \frac{r_1^2}{c_2 c_3} + \frac{r_2^2}{c_3 c_1} + \frac{r_3^2}{c_1 c_2}.$$

Für $r_3 = 0$ erhält man zwischen einem Grenzpunkt und zwei Kreisen des Büschels die Beziehung

$$-c_3 = \frac{r_1^2}{c_2} + \frac{r_2^2}{c_1}$$

und für $r_3 = 0$, $r_2 = 0$ zwischen beiden Grenzpunkten und einem Kreise desselben

$$-c_2 c_3 = r_1^2,$$

wonach die Grenzpunkte inverse Punkte für jeden Kreis des Büschels sind. Allgemein ergiebt sich für die Distanzen c_1, c_2, c_3 eines beliebigen Punktes von den Mittelpunkten der Kreise 1, 2, 3 des Büschels als von drei Punkten einer Geraden sofort die Relation

$$c_1 e_1^2 + c_2 e_2^2 + c_3 e_3^2 = -c_1 c_2 c_3$$

und aus ihr durch Verbindung mit

$$c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 = -c_1 c_2 c_3$$

die Relation zwischen den Potenzen eines Punktes in Bezug auf drei Kreise desselben Büschels

$$c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 + c_3 p_3^2 = 0.$$

Für einen Punkt des dritten Kreises ergiebt sich daraus

$$c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 = 0 \quad \text{oder} \quad p_1^2 : p_2^2 = -c_2 : c_1,$$

die Definition und Construction eines Kreises im Büschel von zwei Kreisen als Ort der Punkte von constantem Verhältniss der bezüglichen Potenzen; etc.

Schneidet ein Kreis vom Mittelpunkte P und vom Radius r drei Kreise eines Büschels in X, Y, Z und bestimmen die Radien PX, PY, PZ auf ihnen die zweiten Schnittpunkte X', Y', Z', so liefern die Potenzen von P die Relation

$$c_1 . PX . PX' + c_2 . PY . PY' + c_3 . PZ . PZ' = 0 \quad \text{oder}$$
$$c_1 r(r + XX') + c_2 r(r + YY') + c_3 r(r + ZZ') = 0 \quad \text{d. h.}$$
$$r^2 (c_1 + c_2 + c_3) + r(c_1 XX' + c_2 YY' + c_3 ZZ') = 0, \quad \text{also}$$
$$c_1 XX' + c_2 YY' + c_3 ZZ' = 0.$$

Für σ_1, σ_2, σ_3 als die Schnittwinkel von r mit den drei Kreisen des Büschels respective ist aber $XX' = 2r_1 \cos\sigma_1$, $YY' = 2r_2 \cos\sigma_2$, $ZZ' = 2r_3 \cos\sigma_3$ und somit auch

$$c_1 r_1 \cos\sigma_1 + c_2 r_2 \cos\sigma_2 + c_3 r_3 \cos\sigma_3 = 0,$$

wieder eine Formel von wichtigen Consequenzen. Für $\sigma_1 = 90^0$ und $\sigma_2 = 90^0$ giebt sie auch $\sigma_3 = 90^0$ und damit die Lehre vom conjugierten Büschel zu dem gegebenen Büschel. Für $\cos\sigma_3 = 0$

$$c_1 r_1 \cos\sigma_1 + c_2 r_2 \cos\sigma_2 = 0 \quad \text{oder} \quad c_2 : c_1 = -r \cos\sigma_1 : r_2 \cos\sigma_2,$$

die Bestimmung des orthogonal schneidenden Kreises im Büschel aus den unter σ_1 und σ_2 schneidenden Kreisen; insbesondere $\sigma_1 = \sigma_2$ oder $\sigma_1 = 180 - \sigma_2$ noch $c_2 : c_1 = \mp r_1 : r_2$, d. h. die gleichwinklig schneidenden zu zwei Kreisen schneiden den inneren und resp. den äusseren Potenzkreis derselben orthogonal. Mit $\cos\sigma_3 = \pm 1$ folgt ebenso

$$c_1 r_1 \cos\sigma_1 + c_2 r_2 \cos\sigma_2 \pm c_3 r_3 = 0,$$

die Bestimmung der Kreise eines Büschels, die einen beliebigen Kreis berühren, aus zwei Kreisen desselben, die ihn unter den Winkeln σ_1, σ_2 resp. schneiden; etc. Aber man weiss, wie alle diese Beziehungen, von denen die letzten in ähnlicher Ableitung auch sonst schon bekannt sind, völlig direct durch die Methode der Cyklographie geliefert werden.

Daher nur noch die Bemerkung, dass diese kleine Untersuchung zur Berichtigung einer augenscheinlich unrichtigen Formelgruppe bei J. Steiner (»Journal von Crelle« Bd. 45, p. 203 f., vergl. »Werke« II, p. 461 und 740) gemacht worden ist.

VIII. Ueber die developpable Fläche von 45° Gefälle durch einen Kegelschnitt und gegen seine Ebene. — Erklärung eines vorgelegten Fadenmodells der Fläche.

In meiner Mittheilung vom 17. December 1883 habe ich die zahlreichen Relationen kurz erwähnt, welche zwischen den von den Axen gebildeten Abschnitten in Tangente und Normale eines Kegelschnittes im nämlichen Punkte und den durch sie bestimmten Abschnitten in den Axen bestehen. Ist M der Mittelpunkt der Kegelschnitte von den Brennpunkten C_1 und C_2, welche sich in P orthogonal durchschneiden und sind J, J_1 resp. E, E_1 die Schnittpunkte der Normale und Tangente der Ellipse (also der Tangente und Normale der Hyperbel) mit der Haupt- und Neben-Axe der Kegelschnitte, deren Halbaxen für die Ellipse durch a, b und für die Hyperbel durch a', b' bezeichnet werden mögen, so erhält man insbesondere (vergl. die Ausführung in »Acta Mathematica« B. V, p. 331 f., speciell p. 394 f.

$$MJ = c\frac{a'}{a},\; EM = c\frac{a}{a'},\; J_1M = c\frac{b'}{b},\; ME_1 = c\frac{b}{b'};$$

$$PJ = \frac{b}{a}\sqrt{r_1 r_2}\,,\ EP = \frac{b'}{a'}\sqrt{r_1 r_2}\,;\ J_1P = \frac{a}{b}\sqrt{r_1 r_2},\ PE_1 = \frac{b'}{a'}\sqrt{r_1 r_2}$$

wobei noch r_1 und r_2 die Radien vectoren des Punktes P sind. Nach denselben ist die Relation der Ellipse $a^2 - b^2 = c^2$ äquivalent mit jeder der beiden Gleichungen

$$\frac{\overline{MJ}^2}{c^2} + \frac{\overline{PJ}^2}{b^2} = 1\,,\quad \frac{\overline{PJ_1}^2}{a^2} - \frac{\overline{MJ_1}^2}{c^2} = 1$$

und die Relation der Hyperbel $a'^2 + b'^2 = c'^2$ mit jeder der beiden andern

$$\frac{\overline{ME}^2}{c^2} - \frac{\overline{PE}^2}{b'^2} = 1\,,\quad \frac{\overline{PE_1}^2}{a'^2} - \frac{\overline{ME_1}^2}{c^2} = 1\,;$$

oder diese Gleichungen erhellen direct, weil sie nach den obigen Werthen und wegen $r_1 \pm r_2 = 2a$, resp. $2a'$ in Indentitäten übergehen. Da nun JP, J_1P die Radien doppelt berührender Kreise der Ellipse aus Punkten ihrer Haupt- und resp. Nebenaxe und ebenso EP, E_1P die Radien solcher doppelt berührenden Kreise der Hyperbel sind, die nach der Methode der Cyklographie durch Punkte des Raumes in den durch die Axen gehenden Normalebenen zur Tafelebene dargestellt werden, so sei M der Anfangspunkt, EJM die Axe der x und E_1MJ_1 die Axe der y eines Cartesischen rechtwinkligen Coordinatensystems, für welches die Radien der berührenden, doppelt berührenden und osculierenden Kreise des Kegelschnittes als Coordinaten z von Raumpunkten erscheinen, die die Mittelpunkte dieser Kreise zu ihren Projectionen auf die Ebene xy haben. Dann gehen die obigen Gleichungen für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und resp. für die Hyperbel $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$

über in $$\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,\ \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1\,;$$

resp. $$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b'^2} = 1\,,\ \frac{z^2}{a'^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1\,.$$

Die ersten beiden repräsentieren eine Ellipse in der Ebene xz und eine Hyperbel in der Ebene yz als räumliche Repräsentanten der die gegebene Ellipse (a, b, c) doppelt berührenden Kreise aus Punkten der Axen x und y resp.; die beiden letzten ebenso eine Hyperbel in der Ebene xz und eine Hyperbel in der Ebene yz als räumliche Repräsentanten der die gegebene Hyperbel (a', b', c) doppelt berührenden Kreise aus Punkten von x und y, d. h. in beiden Fällen aus Punkten ihrer Haupt- und Neben-Axe resp.

Denkt man alle Punkte einer Normale des Kegelschnittes und ihre räumlichen Repräsentanten in diesem Sinne, so bilden die Letzteren die zur Ebene des Kegelschnittes unter 45^0 geneigten Geraden, welche die Normale zu ihrer Orthogonalprojection und deren Fusspunkt P im Kegelschnitt zum Durchstosspunkt in $x\,y$ haben. Jede dieser Geraden kann angesehen werden als die Schnittlinie der beiden zu xy nach gleicher Seite unter 45^0 geneigten Ebenen, die durch die sich im Fusspunkt P begegnenden benachbarten Tangenten des Kegelschnittes gehen. Es sind daher die den sämmtlichen Normalen eines Kegelschnittes in dieser Art entsprechenden Geraden die Erzeugenden der entwickelbaren Fläche von dem constanten Gefälle 45^0 durch den Kegelschnitt und zu seiner Ebene; der gegebene Kegelschnitt ist selbst die eine Doppelcurve dieser Fläche und die beiden in den vorhergehenden Gleichungen repräsentierten Kegelschnitte in den Normalebenen durch seine Axen zu seiner Ebene sind die beiden andern Doppelcurven derselben im endlichen Raume. Und weil die Normalen in den beiden Endpunkten eines Durchmessers des Kegelschnittes zu je zwei Paaren paralleler Erzeugenden Anlass geben, so ist der unendlich ferne Querschnitt des gleichseitigen Rotationskegels mit zur Tafel normaler Axe

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

die letzte Doppelcurve der entwickelbaren Fläche. (Vergl. meine Darstell. Geom. § 101 der 2. Aufl. oder Bd. II, § 47 der dritten.) Die Fläche ist die Enveloppe sämmtlicher Kegel dieser Art, die die Punkte des gegebenen Kegelschnittes zu Scheiteln haben.

Ihre Rückkehrcurve, der Ort der Schnittpunkte von je drei unendlich nahe benachbarten Ebenen oder von je zwei unendlich nahe benachbarten Erzeugenden derselben, besteht aus zwei in der Evolute des Kegelschnittes orthogonal projicierten zur Ebene xy symmetrischen Raumcurventheilen, und hat mit den Doppelcurven die nachfolgend erörterten Beziehungen.

Im Falle der Ellipse, in der die Endpunkte der Hauptaxe durch A, B und die der Nebenaxe durch C, D, die reellen Brennpunkte durch G, H und der Mittelpunkt durch M bezeichnet seien. Die Doppelellipse in der Normalebene durch die Hauptaxe d. h. in xz hat zu ihren Scheiteln in dieser die Brennpunkte G und H, und ihre Axenlänge EF in z gleich der Nebenaxe $2b$ der Ellipse. Die Doppelhyperbel in der Ebene yz hat ihre Hauptaxe JK in der Axe z der Hauptaxe der Ellipse gleich und ihre Brennpunkte liegen in der Distanz JG vom Mittelpunkte M entfernt.

Die Rückkehrcurve hat mit jeder der beiden Doppelcurven zwei Paare zu den Hauptebenen und zum Mittelpunkt symmetrisch gelegene Punkte gemein, nämlich ihre reellen stationären Punkte, die Punkte, welche den vierpunktig berührenden Osculationskreisen im Raume entsprechen. Zur Doppelellipse gehören die Punkte $y = 0$, $x = \pm \frac{c^2}{a}$, $z = \pm \frac{b^2}{a}$, welche durch die Krümmungskreise in den Scheiteln der Hauptaxe cyklographisch abgebildet werden, und zur Doppelhyperbel die den Krümmungskreisen in den Scheiteln der Nebenaxe entsprechenden Punkte $x = 0$, $y = \pm\frac{c^2}{b}$, $z = \pm\frac{a^2}{b}$. In den ersteren ist die Rückkehrtangente zugleich Tangente der Doppelellipse, in den letzteren Tangente der Doppelhyperbel; beide in jenen zur Spitze zusammenlaufenden Aeste haben denselben Aufriss, und die beiden den $\pm x$ entsprechenden Aeste der Aufrisse vereinigen sich in den Aufrissen der letzteren Punkte; dagegen haben die in diesen zur Spitze zusammenlaufenden Aeste denselben Seitenriss und die beiden den $\pm y$ entsprechenden Aeste der Seitenrisse vereinigen sich in den Seitenrissen der ersten Punkte. Der gesammte Aufriss der Rückkehrcurve $+z$ bildet mit dem Aufriss der Doppelellipse zwischen deren Grenzpunkten über E in z ein krummliniges Dreieck; ebenso der gesammte Seitenriss der Rückkehrcurve für $+z$ mit dem Seitenriss der Doppelhyperbel zwischen ihren Grenzpunkten über J in z.

Zwischen den Grenzpunkten über die Scheitel G, H und jenseits der Grenzpunkte bis in's Unendliche sind die Doppelellipse in xz und resp. die Doppelhyperbel in yz isolierte Doppelcurven der betrachteten Fläche. In dem besonderen Falle der Ellipse $a = c\sqrt{2}$, oder $b = c$ wird die Doppelellipse zum Kreis $x^2 + z^2 = c^2$ vom Radius $c = b$ und die Doppelhyperbel in yz zu der gleichartigen $\frac{z^2}{2c^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$; die vorerwähnten Coordinaten der Grenzpunkte sind dann $x = \pm\frac{c}{\sqrt{2}} = z$ und resp. $y = \pm c$ $z = 2c$, wie im Allgemeinen mit c^4 als dem Product aller vier Werthe.

Sodann im Falle der Hyperbel mit den Scheiteln A, B und den Brennpunkten G, H in der Axe x. Die

Doppelhyperbel in der Ebene xz hat zu ihren Scheiteln in x die Brennpunkte G, H und ihre Potenz in der Nebenaxe z ist dieselbe wie die der Originalhyperbel in der Nebenaxe y. Die Doppelhyperbel in der Ebene yz hat ihre Scheitel in z in demselben Abstand vom Mittelpunkt wie die Originalhyperbel in x und ihre Potenz in der Nebenaxe y ist der der vorigen in x gleich und entgegengesetzt. Diese letztere ist durchaus reell doppelt, weil aus allen Punkten der Nebenaxe doppelt berührende Kreise der Hyperbel mit reellem Radius beschrieben werden; die erstere ist reell doppelt in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung ausserhalb eines je den einen und den anderen Scheitel umfassenden Bogens, dessen Endpunkte die reellen Rückkehrpunkte der Rückkehrcurve sind, mit $y=0$, $x=\pm\frac{c^2}{a'}$, $z=\pm\frac{b'^2}{a'}$, welche den Osculationskreisen in den Scheiteln entsprechen.

Mit $c^2=2a'^2$ oder $b'^2=a'^2=\frac{c^2}{2}$ d. h. der gleichseitigen Hyperbel werden die Doppelhyperbeln ausgedrückt durch

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{2z^2}{c^2}=1,\ \frac{2z^2}{c^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$$

und die Coordinaten der Rückkehrpunkte durch $2a'$, a' resp. $c\sqrt{2}$ und $\frac{c}{\sqrt{2}}$.

Der Fall der Parabel ist von dem Falle der Hyperbel aus leicht zu übersehen, indem man sich den einen Ast derselben und damit ihrer Evolute, sowie der zugehörigen Doppelcurve in xz mit der ganzen Doppelcurve in yz unendlich entfernt denkt.

Im Falle des Kreises vereinigen sich die ganze Rückkehrcurve mit den reellen Theilen der Doppelcurven in den beiden Punkten des Raumes, deren cyklographisches Bild der Kreis ist, die developpable Fläche ist zum Doppelkegel geworden. Den Fall des Linienpaares $b'^2 x^2 = a'^2 y^2$ wollen wir nur erwähnen.

Unsere developpable Fläche veranschaulicht die Gesammtheit der berührenden Kreise und der Normalen des betrachteten Kegelschnittes. Für irgend einen Punkt in seiner Ebene giebt die durch ihn gehende Parallele zur Axe z mittelst ihrer Schnitte mit der Developpabeln die Radien der um jenen zu beschreibenden Berührungskreise des Kegelschnittes und in den nach den Berührungspunkten gehenden Radien oder den Projectionen der zugehörigen Mantellinien der Developpabeln die von ihm ausgehenden vier Normalen und Tangenten der Evolute.

Die Projection des Querschnittes der Fläche mit einer Ebene von der Spur s und der Neigung α zur Ebene des Kegelschnittes ist der Ort der Centra derjenigen den Kegelschnitt berührenden Kreise, die s zur gemeinsamen Aehnlichkeitsaxe und cotan α zum Modul haben; unter ihnen sind als Projectionen der Schnittpunkte der Ebene mit den Doppelcurven in xz resp. yz die doppelt berührenden und als die ihrer Schnittpunkte mit der Rückkehrcurve die osculierenden Kreise des bezeichneten Systems.

Denken wir einen Punkt der Kegelschnittebene als Mittelpunkt eines gleichseitigen Rotationskegels mit zu ihr normaler Axe, so erhalten wir in der Projection seiner Durchdringung mit der developpablen Fläche den Ort der Mittelpunkte berührender Kreise des Kegelschnittes, die durch jenen Punkt gehen; durch die Schnitte der Doppelcurven und resp. der Rückkehrcurve derselben mit dem Kegel insbesondere die doppelt berührenden und die osculierenden Kreise in jenem System.

So erhalten wir für einen Kreis in der Kegelschnittebene das System der ihn und den Kegelschnitt berührenden Kreise aus der Durchdringung des über ihm stehenden gleichseitigen Rotationskegels mit der Fläche; ferner die Systeme der Berührungskreise des Kegelsschnittes, die den gegebenen Kreis orthogonal oder unter vorgeschriebenen reellen Winkeln σ schneiden, aus der Durchdringung der developpablen Fläche mit dem gleichseitigen einfachen Rotationshyperboloid, welches den Kreis R selbst oder den von ihm um die Distanz $R \cos \sigma$ entfernten vom Radius $R \sin \sigma$ zum Kehlkreis hat; und endlich analog durch zweifache gleichseitige Rotationshyperboloide die Systeme der Berührungskreise des Kegelschnittes, welche den gegebenen Kreis diametral oder unter einem durch seinen Cosinuswerth gegebenen nicht reellen Winkel schneiden — in welch' letzterem Falle der gegebene Kreis auch selbst rein imaginär sein kann.

Denken wir zu dem ersten Kegelschnitt in der Ebene xy einen zweiten und bilden für beide die Flächen gleichen Fallens von 45^{0} F_1 und F_2 mit den Rückkehrcurven R_1 und R_2 und den Doppelcurven D_{11}, D_{12} und D_{21}, D_{22} der ersten und zweiten, so lässt sich die Durchdringungscurve C_{12} beider Flächen F_1, F_2 darstellen und liefert den Ort der Centra von Kreisen, welche beide Kegelschnitte zugleich berühren — wenn man will die äquidistante Symmetrie- oder die Halbierungscurve zwischen beiden, während die Projectionen der Doppelcurven die Symmetrielinien etc. der Originalkegelschnitte selbst sind. In jenem Orte sind die den Doppelcurven D_{11}, D_{12} angehörigen Punkte die Centra von Kreisen, die den ersten Kegelschnitt doppelt und den zweiten einfach berühren, und die Punkte aus der Rückkehrcurve R_1 die Centra der Osculationskreise des ersten Kegelschnittes, die den zweiten berühren; etc.

Endlich liefern für drei Kegelschnitte derselben

Ebene die zugehörigen Developpablen F_1, F_2, F_3 durch ihre Schnittpunkte die Centra der Kreise, welche jene Kegelschnitte zugleich berühren oder die von ihnen gleichentfernten Punkte.

Man sieht, dass für Kegelschnitte die Uebertragung des Problems in den Raum von drei Dimensionen eine wesentliche Vervollständigung seiner Lösungen herbeiführt.

Damit ist die Frage der Uebertragung unserer Behandlung auf beliebige ebene Curven natürlich gestellt und wir widmen ihr folgende kurze Erörterung. Die Bildung der Developpablen ist offenbar; sie ist die Enveloppe aller der gleichseitigen Rotationskegel mit zur Ebene normaler Axe, die ihre Mittelpunkte in der Curve haben, und damit auch die aller der unter 45^0 zu ihrer Ebene geneigten Ebenen, welche durch die Tangenten der Curve gehen; sie ist die gemeinsame Developpable der Curve und des gemeinsamen Fluchtkreises dieser Kegel oder ihres unendlich fernen Querschnittes. Die Projection ihrer Rückkehrcurve ist die Evolute der gegebenen Curve und die Projection ihrer Doppelcurve die Symmetrieaxe oder Halbierungscurve derselben; etc. Unsere Developpablen für zwei Curven in derselben Ebene liefern die äquidistante oder Symmetrie-Curve derselben und die für drei Curven die äquidistanten Punkte, etc.

Sind μ und ν die Ordnungs- und Classen-Zahl der Curve und $\varkappa$ die Zahl ihrer stationären oder Rückkehrpunkte, so lässt sich leicht zeigen, dass die developpable Fläche, welche sie mit einem Kegelschnitte in beliebiger Ebene bestimmt, von der Classe $n = 2\nu$ ist oder dass von einem Punkte aus 2ν Tangentialebenen an sie gehen; ferner von der Ordnung $r = 2(\mu + \nu)$ oder dass eine gerade Linie ihr in so viel Punkten begegnet; während ihre Rückkehrcurve von der Ordnung $m = 2\varkappa + 6\nu$ ist. Diese Charakterzahlen sind für einen Kegelschnitt wegen $\mu = \nu = 2$, $\varkappa = 0$ speciell $n = 4$, $r = 8$, $m = 12$. Die Evolute ist daher von der Classe $\frac{1}{2}r$ und von der Ordnung $\frac{1}{2}m$ als eine Doppelprojection der Rückkehrcurve.

Dass die Evolute einer algebraischen Curve von der Ordnung μ und der Classe ν mit $\varkappa$ stationären Punkten oder ι stationären Tangenten von der Ordnung $3\nu + \varkappa = 3\mu + \iota$ und von der Classe $\mu + \nu$ ist, sind aber wohlbekannte Ergebnisse der Curventheorie.

Man erhält aber aus jenen Charakteren auch die Ordnungszahl x der gesammten Doppelcurve der Developpablen, von der dann die Ordnungszahl ν für den Kegelschnitt, weil er ν fach wird in derselben, und μ für die Curve selbst, weil sie doppelt ist, abgezogen werden müssen, um die Ordnungszahl derjenigen Doppelcurve zu erhalten, die durch ihre Projection die Symmetriecurve der gegebenen liefert; man erhält die Zahl der stationären Punkte ihrer Rückkehrcurve etc. (Vergl. meine »Darstell. Geometrie«, 3. Aufl., II, §§ 22 f.)

Die Developpable gleichen Fallens von 45° durch die Kreisevolvente ist die Tangentenfläche der Schraubenlinie vom nämlichen Anfangspunkt und Drehungssinn, die den Grundkreis der Evolvente zu ihrer Orthogonalprojection und die Neigung 45° hat. Desshalb ist der Grundkreis die Evolute der Evolvente. Und weil der aufsteigende Gang der Schraubenlinie die eine und der absteigende Gang die andere Evolvente des Grundkreises vom nämlichen Anfangspunkt zur Spur hat, und die mit dem Grundkreis concentrischen Kreise durch die im Durchmesser des Anfangspunktes abwechselnd dies- und jenseits sich folgenden Schnittpunkte beider Evolventen die Projectionen der aufeinander folgenden Doppelcurven jener Schraubenfläche sind, so sind sie die Symmetriecurven beider Evolventen. (Vergl. meine »Darstell. Geometrie«, 3. Aufl., II, §§ 13 f.) Für zwei verschiedene Kreis-Evolventen derselben Ebene ist die Projection der Durchdringung ihrer Developpablen vom Gefälle 45^0 die Symmetriecurve, etc.

Die Verbindung einer ebenen Curve mit einem beliebigen Kegelschnitt in anderer Ebene entspricht der collinearen Umformung des Problems von der Developpablen gleichen Fallens von 45^0; die Doppelprojection der Rückkehr- und Doppel-Curven erfolgt dann aus dem Pol der Schnittlinie beider Ebenen in Bezug auf den Kegelschnitt auf die Ebene der Curve, und an die Stelle der Bildkreise treten Kegelschnitte, für die der Fusspunkt des projicirenden Strahles der Pol jener Geraden ist und die in ihr dieselbe Involution harmonischer Pole mit dem gegebenen Kegelschnitt bestimmen, überdiess aber die Curve berühren.

Die Doppelprojection der Rückkehrcurve ist die Quasi-Evolute der gegebenen Curve. (Vergl. Salmon-Fiedler, »Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven«, 2. Aufl., §§ 106 f.)

Ginge man aber zur Geometrie von vier Dimensionen vor, so würde man in analoger vervollständigter Weise eine Theorie der berührenden Kugeln und der Normalen einer algebraischen Oberfläche erhalten. (Man vergleiche meine Abhandlung »Zur Gesch. und Theorie der elem. Abbildungsmethoden« in Bd. XXVII dieser Vierteljahrsschrift, p. 174 f.)

Aber ich will hier nur den Uebergang zum Imaginären besprechen, der in der Natur der Sache liegt und zu einer weiteren Ergänzung der vorigen Resultate führt.

IX. Cyklographische Uebergänge vom Reellen zum Rein-Imaginären.

Wenn $2c$ die Centraldistanz zweier Kreise in der Ebene x, y ist, von den Radien R (um den Coordinatenanfangspunkt) und r (um x, y), so drücken die Relationen

$$(2c)^2 = R^2 + r^2, \quad (2c)^2 + R^2 = r^2, \quad (2c)^2 + r^2 = R^2,$$

von denen die zweite und dritte durch den Zeichenwechsel von R^2 resp. r^2 oder die Ueberführung von R, r in iR resp. ir aus der ersten hervorgehen, den orthogonalen Schnitt beider Kreise, resp. den diametralen von R durch r und von r durch R aus; und cyklographisch, mit Auftragung der r als z, d. h. als Perpendikel zur Ebene xy in den Punkten x, y sind die Flächen

$$x^2 + y^2 = R^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 + R^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

die Repräsentanten der durch den festen Kreis R und jene resp. Bedingungen gegebenen Kreissysteme: Das einfache gleichseitige Rotationshyperboloid mit R als Kehlkreis; das zweifache gleichseitige Rotationshyperboloid mit R als Bildkreis der Scheitel, und die Kugel mit R als Hauptkreis; beide ersten mit $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ als Asymptotenkegel, an dessen Stelle bei der Kugel der Nullkugel-Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ tritt. Die Enveloppe solcher reeller gleichseitiger Rotationskegel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ aus den Punkten des betrachteten Kegelschnittes war die Developpable vom Fallen 45^0 in der vorigen Betrachtung, als deren im Endlichen gelegene Doppelcurven sich mittelst der Normalenrelationen des Grund-Kegelschnittes

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Kegelschnitte in xz, yz resp.

$$\frac{x^2}{c^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$$

ergaben. Setzen wir an Stelle von $+z^2$ überall $-z^2$ oder

iz für z, so erhalten wir die Gleichungen der Doppelcurven der imaginären Enveloppe der Nullkugel-Kegel aus den Punkten jenes Grund-Kegelschnittes oder die seiner Focalcurven in der Form

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$$

für die Ellipse und in der anderen

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$$

für die Hyperbel; eine Hyperbel in der Symmetrieebene durch die Hauptaxe, die die Brennpunkte der Ellipse zu ihren Scheiteln und die Scheitel derselben zu ihren Brennpunkten hat, und eine imaginäre Ellipse in der Symmetrieebene durch die Nebenaxe, im ersten Falle; und eine Ellipse in jener von der gleichen Lagenrelation, mit einer imaginären in dieser im letzteren Falle.

Für die besonderen Fälle der Ellipse $a = c\sqrt{2}$ werden die Focalhyperbel gleichseitig und die Ellipse von derselben Specialität

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{z^2}{2c^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

und für die gleichseitige Hyperbel $c = a\sqrt{2}$ die Focalellipsen, die reelle wie die imaginäre, zu speciellen

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{2z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{2z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1.$$

Man sieht auch leicht, dass man von der Focalhyperbel $\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ und resp. von der Focalellipse $\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ wieder zur ursprünglichenEllipse und Hyperbel als der zugehörigen reellen Focalcurve gelangt, oder dass die Beziehung gegenseitig ist. Die beiden reellen Doppelcurven sind das einzig Reelle der developpablen Fläche. Natürlich ist dies auch für jede beliebige ebene Curve der Fall, und die auf die Doppelcurven und ihre Projection speciell gerichtete Untersuchung der Focal-Developpablen im Sinne der vorigen Mittheilung liefert entsprechende Resultate.

Die Ordinaten der reellen Focalcurve liefern die reellen Factoren für die Radien der rein imaginären Kreise aus ihren Fusspunkten, welche den gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren; die Brennpunkte desselben sind die Kreise dieser Art vom Radius Null, wie bekannt, und durch sie schliessen sich jene an die reellen Kreise aus Punkten der Hauptaxe an, welche den Kegelschnitt imaginär doppelt berühren. Focalkegelschnitt und Doppelkegelschnitt der Developpablen von 45^0 Gefälle in der Hauptaxensymmetrieebene schliessen sich in den reellen Brennpunkten berührend nach verticalen Tangenten aneinander. Man sieht, dass die Lehre von den doppelt berührenden Kreisen der Kegelschnitte erst durch die Berücksichtigung der Focalcurven ganz vollständig wird, insofern man verlangt, dass die Radien aller, der reellen und der rein imaginären doppelt berührenden Kreise durch reelle Strecken bestimmt werden sollen.

Aber ich will noch von einigen verwandten Uebergängen aus dem Reellen in das Imaginäre kurz berichten, zu denen die Untersuchungsweise der Cyklographie Anlass giebt und von denen in meinem gleichnamigen Buche (Leipzig, 1882) nicht gehandelt ist. (Vergl. daselbst p. 105 f., p. 138 f.). Der Wechsel des Zeichens von z^2, der das einfache gleichseitige Rotations-Hyperboloid vom Kehlkreis R in die reelle Kugel mit demselben als Hauptkreis überführt, verwandelt zugleich das zweifache Hyperboloid mit dem Bildkreis der Scheitel R oder $x^2+y^2-z^2=-R^2$ in die rein imaginäre Kugel $x^2+y^2+z^2=-R^2$, die zum Kreise R als Symmetriekreis des Hauptkreises gehört.

Man betrachte nun wie in der Mittheilung vom 17. Dec.

1883 die Durchdringungskegelschnitte des centrischen einfachen oder zweifachen Hyperboloides

$$(x+c)^2+y^2-z^2=\pm r_1^2$$

mit dem excentrischen

$$(x-c)^2+y^2-(z+d)^2=\pm r_2^2$$

für veränderliche Distanz d der Kehlkreisebenen, so theilen sich die Projectionen derselben, die die Hauptkreisprojectionen doppelt berührenden Kegelschnitte, bekanntlich in Hyperbeln und Ellipsen durch die der Distanz $d=2c$ entspringende Parabel; und die wichtigsten Unterabtheilungen der einen oder andern Gruppe werden durch die Distanzen d bestimmt, welche den Längen der gemeinsamen Tangenten der Grundkreise gleich sind, oder durch diese Tangentenpaare selbst als Degenerationsformen unter den Kegelschnitten des Systems. Für reelle und aussereinanderliegende Grundkreise sind diese Längen t_i, t_e reell und die betreffenden Durchdringungen solche von einfachen Hyperboloiden; für reelle und sich schneidende Grundkreise entspricht der Distanz t_e (Länge der äusseren gemeinsamen Tangenten) die berührende Hyperboloid-Durchdringung, der Distanz t_i aber, welche rein imaginär ist, nach dem gleichzeitigen Uebergange der $+z^2$ in $-z^2$, die berührende Kugeldurchdringung

$$(x+c)^2+y^2+z^2=r_1^2,\ (x-c)^2+y^2+(z+d)^2=r_2^2,$$

welche den innern Aehnlichkeitspunkt abbildet. Umschliesst der Kreis r_1 den Kreis r_2, so sind sowohl die inneren als die äusseren gemeinsamen Tangenten von imaginären Längen und es entsprechen den bezüglichen Distanzen die berührenden Kugeldurchdringungen, welche die Aehnlichkeitspunkte abbilden.

Man hat bekanntlich bei der Centraldistanz $2c$ und den Radien r_1, r_2 im Falle des Aussereinanderliegens

$$t_i^2=(2c)^2-(r_1+r_2)^2,\ t_e^2=(2c)^2-(r_1-r_2)^2;$$

und erhält daher im Falle des Schneidens wegen $r_1 + r_2 > 2c$

$$t_i^2 = -\{(r_1 + r_2)^2 - (2c)^2\}$$

und im Falle der Umschliessung, wo gleichzeitig $r_1 + r_2 > 2c$ und auch $r_1 - r_2 > 2c$ ist, auch noch

$$t_e^2 = -\{(r_1 - r_2)^2 - (2c)^2\}.$$

Man sieht hieraus ferner, dass für den einen der Grundkreise als rein imaginär oder das eine der Hyperboloide als zweifach diese Distanzen complex werden, so dass die einfache räumliche Interpretation von vorher zu gelten aufhört; endlich aber, dass für beide Kreise als rein imaginär die Werthe übergehen in

$$t_i^2 = (2c)^2 + (r_1 + r_2)^2, \quad t_e^2 = (2c)^2 + (r_1 - r_2)^2,$$

so dass die Längen der gemeinsamen Tangenten gerade dann stets reell sind. Während sie im Falle der reellen aussereinanderliegenden Kreise die Radiensummen der sie orthogonal schneidenden Kreise aus den Aehnlichkeitspunkten J und resp. E sind, werden sie für die rein imaginären Kreise die Summen der Radien der dieselben diametral schneidenden Kreise aus denselben Aehnlichkeitspunkten; und während in jenem Falle $2c > t_e > t_i$ ist, wird in diesem $2c < t_e < t_i$. Es muss dazu bemerkt werden, dass die Aehnlichkeitspunkte von zwei rein imaginären Kreisen derselben Ebene identisch sind mit denen ihrer reellen Symmetriekreise. Man hat für die reellen Kreise die Abstände ihrer Aehnlichkeitspunkte J und E von der Mitte der Centrale respective

$$c\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}, \quad c\frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}$$

und sieht, dass beide durch die Ersetzung von r_1, r_2 durch ir_1, ir_2 nicht geändert werden. Ebenso bleiben die Abscisse ihres Mittelpunktes und die Hälfte ihres gegenseitigen Abstandes und somit der Aehnlichkeitskreis unverändert bei diesem Uebergang, weil jene Längen ausgedrückt wurden durch

$$c\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \quad \text{und} \quad \frac{2\,c\,r_1\,r_2}{r_1^2 - r_2^2} \text{ resp.}$$

Weil aber der letzte wie die vorigen Ausdrücke complex wird, wenn nur einer der betrachteten Kreise imaginär ist, so erhellt, dass ein reeller Kreis mit einem rein imaginären Kreis derselben Ebene wie keine reellen Längen gemeinsamer Tangenten, so auch keine reellen Aehnlichkeitspunkte und keinen reellen Aehnlichkeitskreis hat.

Man hat also insbesondere für reelle Grundkreise, wenn sie einander schneiden, für $d=0$ den äusseren Theil ihrer Potenzlinie als doppelt berührenden Kegelschnitt; und aus ihr sich entfaltend für reell wachsende d Hyperbeln mit der Nebenaxe in der Centrale bis zu den äusseren gemeinsamen Tangenten für $d = t_e$; sodann für bis $d = 2c$ wachsende Distanzen-Hyperbeln mit der Hauptaxe in der Centrale bis zur Parabel und weiterhin umschliessende Ellipsen. Der Bewegung der Distanz ins rein imaginäre Gebiet von $d=0$ bis $d = t_i = i\sqrt{(r_1+r_2)^2-(2c)^2}$ entsprechen die sich als Ellipsen im Kreisbogenzweieck projicierenden Kugeldurchdringungen, vom innerhalb liegenden Theil der Potenzlinie ab bis zum inneren Aehnlichkeitspunkt, für den sich der Satz ergiebt, dass die Summe der kleinsten durch ihn gehenden Halbsehnen grösser ist als für jeden andern Punkt.

Und man hat für reelle Grundkreise, deren einer den andern umschliesst, für $d=0$ die Potenzlinie und für von da aus wachsende reelle Distanzen die sich aus ihr entfaltenden Hyperbeln mit der Centrale als Hauptaxe bis zur Parabel für $d = 2c$ und den für grössere reelle Distanzen entspringenden umschliessenden Ellipsen. Nun gehören aber beide begrenzenden Degenerationsformen dem

Gebiet der elliptischen Durchdringungsprojectionen aus rein imaginären Distanzen an. Die Potenzlinie erscheint für $d = 0$ als Anfang der rein imaginären Werthereihe als Projection eines imaginären Kreises; mit der Distanz $d = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - (2c)^2} = it_e$ beginnen mit dem äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise die reellen elliptischen Durchdringungsprojectionen; für ihn ist daher die Differenz der zugehörigen kleinsten Halbsehnen ein Minimum. Und mit der Distanz $d = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (2c)^2} = it_i$ oder im inneren Aehnlichkeitspunkt, für den die Summe der kleinsten Halbsehnen ein Maximum ist, endigen sie. Jener entspringt der umschliessenden, dieser der ausschliessenden Berührung der Kugeln, wie man denn aus dieser Lage sofort die angegebenen Werthe der Distanzen wieder erhält.

Die vom einen oder anderen der gegebenen Kreise in einem Scheitel vierpunktig berührten Kegelschnitte, welche den Distanzen $d = b_1$, $d = a_2$, $d = b_2$, $d = a_1$ entsprechen für $b_1^2 = (2c - r_1)^2 - r_2^2$, $a_2^2 = (2c - r_2)^2 - r_1^2$, $b_2^2 = (2c + r_2)^2 - r_1^2$, $a_1^2 = (2c + r_1)^2 - r_2^2$ werden sämmtlich imaginär, sobald beide Kreise es sind; und für rein imaginäres r_1 resp. r_2 bleiben nur a_2^2, b_2^2 resp. b_1^2, a_1^2 oder zwei der bezüglichen Kegelschnitte reell. Für reelle Kreise, die ausser einander liegen, sind alle vier Distanzen reell und alle bezüglichen Kegelschnitte entspringen aus hyperboloidischen Durchdringungen; schneiden sich die Kreise, so dass A_2 im Innern des ersten und B_1 im Innern des zweiten liegt, so werden a_2^2 und b_1^2 negativ und die zugehörigen in A_2 von r_2 resp. in B_1 von r_1 vierpunktig berührten Kegelschnitte entspringen aus Kugeldurchdringungen; wird endlich der Kreis r_2 von r_1 umschlossen, so werden a_2^2, b_1^2 negativ und es entsprechen ihnen Ellipsen, welche aus Kugeldurchdringungen hervorgehen.