# Ueber eine ebene Reciprocität und ihre Anwendung auf ebene Curven*)

von

**Dr. Christian Beyel.**

Tafel I. Fig. 9—13.

## 1.

*Seien A B C die Ecken, a b c die ihnen gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks. Mit* $p_a\, p_b\, p_c$ *bezeichnen wir die Geraden, welche einen beliebigen Punkt in der Ebene des Dreiecks mit A B C verbinden.* $P_a\, P_b\, P_c$ *seien die Schnittpunkte einer durch P gehenden Geraden p mit den Seiten a b c. Dann können wir beweisen, dass*

$$(p\, p_a\, p_b\, p_c) = (P\, P_a\, P_b\, P_c) \text{ ist.}$$

Schneiden wir nämlich das Büschel $p\, p_a\, p_b\, p_c$ mit $a$ und sei $H$ der Schnittpunkt von $a$ mit P A, so erhalten wir die Projectivität: $(p\, p_a\, p_b\, p_c) \overline{\wedge} (P_a\, H\, B\, C)$. Letztere Gruppe projiciren wir aus A und schneiden das hierdurch erhaltene Büschel mit $p$. Dann ist: $(P_a\, H\, B\, C) \overline{\wedge} (P_a\, P\, P_c\, P_b)$. Weil aber allgemein $(P_a\, P\, P_c\, P_b) = (P\, P_a\, P_b\, P_c)$, so folgt $(p\, p_a\, p_b\, p_c) = (P\, P_a\, P_b\, P_c)$ was zu beweisen war.

*) Vgl. A. Ameseder: Ueber ein Nullsystem zweiten Grades. Sitzungsberichte der k. Academie der Wissenschaften. Bd. LXXXIII. II. Abth. Februar-Heft. Jahrg. 1881. Dort wird die Reciprocität (C B A $\Delta$) von anderem Gesichtspunkte aus besprochen. Die aus derselben hervorgehende Erzeugung von Curven 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten habe ich in meiner Abhandlung über centrische Collineationen $n$ter Ordnung (Vierteljahrsschrift der Zürcher naturforschenden Gesellschaft 1881. Bd. XXVI. S. 297) und in der Abhandlung über Curven 4ter Ordnung mit drei doppelten Inflexionscurven (Schlomilch: Zeitschrift für Mathematik und Physik XXX) benutzt.

Es knüpft sich an diesen Satz folgende Aufgabe: Durch einen Punkt — P — der Ebene soll eine Gerade $p$ gezogen werden, welche die Seiten eines Dreiecks in der Weise schneidet, dass P mit den Schnittpunkten — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein gegebenes Doppelverhältniss bildet. Um diese Aufgabe zu lösen, verbinden wir P mit den Ecken des Dreiecks. Dann wird $p$ nach der Relation $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \Delta$ gefunden. Da es zu drei Geraden sechs gibt, welche mit jenen ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss bilden, so schliessen wir:

*Wir können die Seiten eines Dreiecks mit sechs Geraden durch einen gegebenen Punkt so schneiden, dass dieser Punkt mit den Schnittpunkten das Doppelverhältniss $\Delta$ bildet.*

Die Aufgabe, welche der besprochenen dual gegenüber steht, verlangt in einer Geraden $p$ diejenigen Punkte, von denen aus nach den Ecken eines Dreiecks Strahlen gehen, welche mit $p$ ein bestimmtes Doppelverhältniss bilden. Es gibt sechs solche Punkte. Sie bilden resp. mit den Punkten, welche $p$ aus den Seiten des in Rede stehenden Dreiecks schneidet, das Doppelverhältniss $\Delta$.

2.

Eindeutig sind die erwähnten Aufgaben, wenn wir die Ecken und Seiten des Dreiecks festsetzen und die Reihenfolge angeben, in welcher die Punkte in $p$ resp. die Strahlen durch P mit P resp. $p$ das Doppelverhältniss $\Delta$ bilden. Durch diese Festsetzung wird jedem Punkte P eine und nur eine Gerade $p$ zugeordnet, für welche $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \Delta$ ist. Auf jeder Geraden $p$ liegt aber nur ein Punkt P, der durch die Bedingung $(P_c\, P_b\, P_a\, P) = \Delta$ bestimmt ist. Es wird also auf diese Weise eine eindeutige Correspondenz zwischen den Punkten und Geraden der Ebene festgelegt. Jeder Punkt geht durch eine Gerade, jede Gerade enthält ihren Punkt.

Entsprechend den Bestimmungsstücken wollen wir diese Reciprocität mit dem Symbol (C B A $\varDelta$) oder ($c\,b\,a\,\varDelta$) bezeichnen.

Sei nun $C_n$ eine Curve $n$ ter Classe in der Ebene der Reciprocität. Wir fragen dann nach dem Orte der Punkte, welche den Tangenten von $C_n$ in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entsprechen. Wir haben also in jeder Tangente $p$ von $C_n$ die Schnittpunkte $P_a\,P_b\,P_c$ mit den Seiten $a\,b\,c$ des Dreiecks A B C zu bestimmen und je einen Punkt P zu construiren, für den $(P_c\,P_b\,P_a\,P) = \varDelta$ ist. Für diese Construction geben wir eine räumliche Interpretation. Wir betrachten $P_c$ als Fusspunkt einer Normalen — $n_c$ — zur Ebene der Reciprocität. In $n_c$ bestimmen wir zwei Punkte — $C_1\,C_2$ — in der Weise, dass $\frac{P_c\,C_1}{P_c\,C_2} = \varDelta$ ist. Weiter errichten wir in $P_b$ eine Normale — $n_b$ — zur Ebene der Reciprocität. Ziehen wir jetzt $C_1\,P_a$ und schneide diese Gerade aus $n_b$ den Punkt S, so trifft S $C_2$ die Ebene der Reciprocität in P.

Um diese Construction auf allen Tangenten von $C_n$ durchzuführen, denken wir uns in $c$ und $b$ die resp. Ebenen $C, B$ bestimmt, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen. Dann ziehen wir in der Ebene $C$ zwei durch $B$ gehende Gerade — $c_1\,c_2$ — von der Art, dass $\frac{tg\,c\,c_1}{tg\,c\,c_2} = \varDelta$ ist. Die Tangente von $C_n$ betrachten wir als Spuren von Normalebenen. Diese umhüllen somit einen zur Ebene der Reciprocität senkrechten Cylinder — $C_{yn}$ — der $n$ ten Classe. Jede derselben schneidet aus $c_1\,c_2$

ein Punktepaar — $C_1 C_2$ — und aus $a$ einen Punkt $P_a$. Ziehen wir $C_1 P_a$ und treffe diese Linie $B$ in S, so schneidet $S C_2$ aus der Ebene der Reciprocität einen Punkt P. $S C_2$ aber ist eine Tangente des Cylinders $C_{yn}$.

Bemerken wir jetzt, dass alle Linien $C_1 P_a$ in der Ebene durch $c_1$ und $a$ liegen, so folgt, dass alle Punkte S in der Schnittlinie — $s$ — der letztern Ebene mit der Ebene $B$ sich befinden. Also stellen uns die Linien $S C_2$ die Gesammtheit der Geraden vor, welche die windschiefen Geraden $s_1 c_2$ schneiden und den Cylinder $C_{yn}$ berühren. Sie erfüllen eine Regelfläche — $R^{2n}$ — vom Grade $2n$. Wir können nämlich beweisen, dass eine beliebige Gerade $g$ des Raumes $2n$ der Linien $S C_2$ schneidet. Zu diesem Zwecke betrachten wir das Hyperboloid $H^2$, welches durch die Geraden $s$, $c_2$ und $g$ bestimmt wird. Dieses hat $2n$ Tangentialebenen mit $C_{yn}$ gemein. Wir erhalten dieselben, indem wir den Cylinder 2 ter Classe — $C_{y2}$ — zeichnen, der aus dem unendlich fernen Punkte von $C_{yn}$ an $H^2$ gelegt werden kann. Die gemeinsamen Tangentialebenen zwischen $C_{yn}$ und $C_{y2}$ sind zugleich Tangentialebenen an $C_{yn}$ und $H^2$. Sie schneiden $c_2$ und $s$ in Punkten, deren resp. Verbindungslinien zu den Geraden $S C_2$ gehören und auf $H_2$ liegen. Also müssen sie $g$ schneiden. Folglich wird, wie behauptet, $g$ von $2n$ Linien $S C_2$ getroffen. Schneiden wir $R^{2n}$ mit der Ebene der Reciprocität, so erhalten wir den Ort der Punkte P. Dieser ist nach dem bewiesenen eine Curve der $2n$ ten Ordnung — $C^{2n}$ — und wir sagen:

*Den Tangenten einer Curve von der $n$ ten Classe correspondiren in der Reciprocität ($C B A \Delta$) Punkte, deren Ort eine Curve $2n$ ter Ordnung ist.*

Wir können diess auch so ausdrücken:

*Construiren wir zu den Punkten, in welchen die Tangenten einer Curve $n$ ter Classe die Seiten eines Dreiecks schneiden, je den Punkt, welcher mit jenen — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein bestimmtes Doppelverhältniss $\varDelta$ bildet, so ist der Ort dieses Punktes eine Curve von der $2n$ ten Ordnung.*

3.

Die Untersuchung der Regelfläche $R^{2n}$ gibt uns weiteren Aufschluss über die Curve $C^{2n}$. Aus der gegebenen Erzeugungsweise von $R^{2n}$ folgt, dass sowohl durch jeden Punkt von $s$ wie von $c_2$ $n$ Gerade der Regelfläche $R^{2n}$ gehen. Also sind $s$ und $c_2$ $n$fache Linien dieser Fläche. *Mithin ist $B$ und $C$ ein $n$facher Punkt der Curve $C^{2n}$.*

Eine weitere $n$ fache Linie von $R^{2n}$ ist die Schnittlinie der Ebenen $B$ und $C$. Sie trifft die Ebene der Reciprocität in A. *Also ist auch $A$ ein $n$facher Punkt von $C^{2n}$.*

Hat $C_n$ eine $r$ fache Tangente — $t_r$ — so schneidet die Ebene, welche durch $t_r$ geht und zur Ebene der Reciprocität normal steht, aus $c$ und $s$ Punkte, deren Verbindungslinie eine $r$ fache Gerade von $R^{2n}$ ist. Letztere trifft die Ebene der Reciprocität in einem $r$ fachen Punkte von $C^{2n}$. Also folgt: *Auf den $r$fachen Tangenten von $C_n$ liegen $r$fache Punkte von $C^{2n}$.*

Sei $g$ eine Gerade in der Ebene der Reciprocität, so fragen wir nach der Construction der Schnittpunkte von $C^{2n}$ mit $g$. Um diese durchzuführen, bestimmen wir das Hyperboloid $H^2$, welches durch $s, c_2$ und $g$ gegeben ist und zeichnen den zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinder $C_{y2}$ an $H^2$. Dieser schneidet die Ebene der Reciprocität in einem Kegelschnitt $K^2_g$. Seine gemeinsamen Tangenten mit $C_n$ sind Spuren von Tangentialebenen, welche $H^2$ und $C_{yn}$ gemeinsam sind. Folglich schneiden diese Tangenten aus $g$ die gesuchten Punkte von $C^{2n}$.

Zur Construction von $K_g^2$ bemerken wir Folgendes: Die Geraden $g\ a\ c_2$ und $s$ liegen auf dem Hyperboloid $H^2$. $C$ und $B$ sind Tangentialebenen dieses Hyperboloides, welche auch den Cylinder $C_{y2}$ berühren. Daraus folgt, dass $g$, $a$, $c$, $b$ Tangenten des Kegelschnittes $K_h^2$ sind. Wir bestimmen diesen Kegelschnitt vollends, indem wir die zweite Gerade $h$ des Hyperboloides $H^2$ zeichnen, welche in der durch $g$ gehenden Normalebene $G$ zur Ebene der Reciprocität liegt. Diese schneidet resp. $c_1 c_2\, a\, b\, c$ in Punkten $C_1\ C_2\ P_a\ P_b\ P_c$. Ziehen wir dann $C_1\ P_a$, so trifft diese Linie $s$ im Schnittpunkte S der Ebene $G$ mit $s$. Die Verbindungslinie $SC_2$ ist die gesuchte Gerade $h$. Sie schneidet $g$ in einem Punkte G, welcher der Berührungspunkt der Tangentialebene $G$ an $H^2$ und mithin der Berührungspunkt von $g$ an $K_g^2$ ist. Zugleich ersehen wir aus der Construction von G, dass dieser Punkt mit $P_a P_b P_c$ durch die Relation $(P_c\, P_b\, P_a\, G) = \varDelta$ verbunden ist. G ist also der correspondirende zu $g$ in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$.

Die Construction der Schnittpunkte von $g$ mit $C^{2n}$ lässt sich nach dem Gesagten dahin zusammenfassen: *$a\,b\,c\,g$ und der entsprechende Punkt zu $g$ bestimmen als vier Tangenten und Berührungspunkt in einer einen Kegelschnitt, dessen gemeinsame Tangenten mit $C_n$ die Gerade $g$ in Punkten von $C^{2n}$ treffen.*

Berührt der Kegelschnitt $K_g^2$ die Curve $C_n$, so schneidet die Tangente im Berührungspunkte aus $g$ zwei benachbarte Punkte von $C^{2n}$ d. h. $g$ berührt in diesen Punkten $C^{2n}$. Wir können dies dahin verallgemeinern: Hat $K_g^2$

in $p$ Punkten mit $C_n$ eine einfache Berührung, so ist $g$ eine $p$fache Tangente an $C^{2n}$. Osculirt $K_g^2$ die Curve $C_n$, so ist $g$ eine Wendetangente an $C^{2n}$ u. s. f.

4.

Zu jeder Geraden $g$ der Ebene gehört ein Kegelschnitt $K_g^2$. Alle diese Kegelschnitte haben $a\,b\,c$ zu gemeinsamen Tangenten, bilden folglich ein Netz und die Geraden $g$ stehen zu den Kegelschnitten dieses Netzes in der Beziehung einer quadratischen Transformation. Um in derselben zu einem Kegelschnitt $K_g^2$ die correspondirende Gerade zu finden, heben wir folgende Eigenschaften von $K_g^2$ hervor: Sei $t$ eine beliebige Tangente an $K_g^2$, so geht durch dieselbe eine Tangentialebene $T$ an $H^2$. In dieser muss eine Gerade $h$ des letzterwähnten Hyperboloides liegen. $h$ ist die Verbindungslinie der Punkte, in welchen $T$ die Geraden $s$ und $c_2$ schneidet, und trifft die Ebene der Reciprocität in einem Punkte $\mathrm{P}$ von $g$. Seien dann die Punkte, in denen $t$ die Geraden $c\,b\,a$ schneidet, resp. durch $\mathrm{P_c\,P_b\,P_a}$ bezeichnet, so wird die gegebene Construction des Punktes $\mathrm{P}$ durch die Relation $(\mathrm{P_c\,P_b\,P_a\,P}) = \varDelta$ ausgedrückt, d. h. $\mathrm{P}$ ist der correspondirende Punkt zu $t$ in der Reciprocität $(\mathrm{C\,B\,A}\,\varDelta)$. Nun war $t$ eine beliebige Tangente an $K_g^2$. Wir sagen also: Die Punkte, welche in der Reciprocität $(\mathrm{C\,B\,A}\,\varDelta)$ den Tangenten von $K_g^2$ entsprechen, liegen auf *der* Geraden $g$, welche in der quadratischen Transformation dem Kegelschnitt $K_g^2$ entspricht.

In jedem nicht singulären Punkte von $C_n$ berührt ein Kegelschnitt $K_g^2$ diese Curve. Ihm correspondirt in der quadratischen Transformation eine Gerade, welche $C^{2n}$ berührt. Somit *erscheint $C^{2n}$ als die Enveloppe aller der*

*Geraden, welche in der quadratischen Transformation den Kegelschnitten entsprechen, die $C_n$ berühren.*

Damit ist das Mittel gegeben, um in einem nicht singulären Punkte P von $C^{2n}$ auf lineare Weise die Tangente zu zeichnen. Wir bestimmen die entsprechende Gerade $p$ zu P in der Reciprocität (C B A $\varDelta$). Dann construiren wir den Berührungspunkt dieser Geraden an $C^n$. In ihm wird $p$ von einem Kegelschnitt $K_g^2$ berührt. An denselben geht durch P eine zweite Tangente, welche in P die Curve $C^{2n}$ berührt.

Sollen die Tangenten aus einem beliebigen Punkte X der Ebene an $C^{2n}$ gezogen werden, so bemerken wir, dass den Geraden durch $x$ in der quadratischen Transformation die Kegelschnitte einer Schaar correspondiren; denn diese werden ausser von $a$ $b$ $c$ noch von derjenigen Geraden $x$ berührt, welche X in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entspricht. Denjenigen unter diesen Kegelschnitten, welche $C_n$ berühren, correspondiren in der quadratischen Transformation die Tangenten durch X an $C^{2n}$.

Ist ein in $C^{2n}$ gelegener Punkt D zugleich Berührungspunkt der entsprechenden Geraden $d$ an $C_n$, so ist D ein gemeinsamer Punkt von $C^{2n}$ und $C_n$. Construiren wir in ihm auf die oben angegebene Weise die Tangente an $C^{2n}$, so finden wir, dass diese mit $d$ zusammenfällt.

Wir können dies auch so ausdrücken:

*Correspondirt einem gemeinsamen Punkte von $C_n$ und $C^{2n}$ in der Reciprocität* (C B A $\varDelta$) *die Tangente in ihm an $C_n$, so berühren sich in diesem Punkte die Curven $C_n$ und $C^{2n}$.*

## 5.

Indem wir das Dreieck A B C festhalten, wollen wir $\varDelta$ alle möglichen reellen Werthe geben. Zu jedem derselben gehört ein Linienpaar $c_2$ und $s$. Seien z. B $c_2^*$ und $s^*$ die Geraden, welche $\varDelta^*$ zugeordnet sind und sei $C^{2n}$ die Curve, welche wir in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) aus $C_n$ abgeleitet haben, so untersuchen wir jetzt die Enveloppe der Geraden, welche den Punkten von $C^{2n}$ in der Reciprocität (C B A $\varDelta^*$) entsprechen. Durch jeden Punkt P von $C^{2n}$ geht eine Transversale $t^*$ zu $c_2^*$ und $s^*$. Legen wir durch eine derselben eine Normalebene — $P$ — zur Ebene der Reciprocität, so trifft $P$ die resp. Geraden $a\, b\, c$ in Punkten $P_a^*\, P_b^*\, P_c^*$ einer Geraden $p^*$ und es gilt die Relation $(P_c^*\, P_b^*\, P_a^*\, P^*) = \varDelta^*$. $p^*$ ist also die entsprechende zu $p$ in der Reciprocität (C B A $\varDelta^*$).

Wir erhalten mithin die Enveloppe der $p^*$, indem wir an die Regelfläche der $t^*$ einen Cylinder $C_{yn}^*$ legen, dessen Richtung normal zur Ebene der Reciprocität ist. Er schneidet letztere Ebene in den $p^*$. Nun sind die Geraden $t^*$ Transversalen zu den drei Leitlinien $C^{2n}\, c_2^*\, s^*$, von denen $c_2^*$ und $s^*$ mit $C^{2n}$ je einen $n$fachen Punkt gemein haben. Folglich erfüllen die Linien $t^*$ eine Regelfläche — $R^{2n*}$ — deren Grad gleich $2 \,.\, 2n - 2n = 2n$ ist.

Ein Berührungscylinder an diese Fläche ist im Allgemeinen von der $2n$ten Classe.

Betrachten wir speciell den Cylinder $C_{yn}^*$ und construiren wir an ihn die Tangentialebenen, welche durch eine Normale — $p$ — zur Ebene der Reciprocität gehen, so bemerken wir, dass $n$ von diesen Ebenen in die Ebene $p\,B$ und $n$ in die Ebene $p\,C$ zusammenfallen. Daraus folgt, dass die Ebenenbüschel, welche in $B$ und $C$ zur Ebene der Reciprocität senkrecht stehen, Theile des erwähnten Cylinders sind. Der Rest desselben ist somit ein Cylinder der $n$ten Classe. Er schneidet die Ebene der

Reciprocität in einer Curve der $n$ ten Classe $C_n^*$. Also umhüllen die $p^*$ eine Curve der $n$ ten Classe.

Zu jedem Werthe von $\Delta$ gehört eine solche Curve der $n$ ten Classe. Aus ihr kann $C^{2n}$ in einer Reciprocität der betrachteten Art abgeleitet werden und es gelten für sie die Beziehungen, welche wir oben zwischen $C^{2n}$ und einer Curve $C_n$ entwickelt haben. Daraus folgt, dass alle diese Curven $C_n$ dieselben Charaktere haben müssen.

Sei P ein Punkt von $C^{2n}$ und $p$ eine durch P gehende Gerade, so ist durch P und die Schnittpunkte von $p$ mit den Seiten des Dreiecks $a\,b\,c$ das Doppelverhältniss $\Delta$ einer Reciprocität (A B C $\Delta$) festgesetzt. Ziehen wir dann durch weitere Punkte von $C^{2n}$ diejenigen Geraden, welche diesen Punkten in der Reciprocität (C B A $\Delta$) entsprechen, so umhüllen diese Geraden eine Curve der $n$ ten Classe. Wir können dies so ausdrücken:

*Alle die Geraden, welche die Seiten des Dreiecks $abc$ und $C^{2n}$ in resp. Punktegruppen von constantem Doppelverhältniss treffen, umhüllen eine Curve $n$ ter Classe.*

## 6.

Wir untersuchen jetzt die Enveloppe der Geraden, welche in der Reciprocität (C B A $\Delta$) den Punkten P einer Curve $n$ ter Ordnung — $C^n$ — entsprechen. Wir stellen damit eine Frage, welche der unter 2 behandelten dual gegenübersteht. Sie führt zu Sätzen, welche den oben gegebenen dual sind. Wir unterlassen es, diese hier weiter auszuführen und begnügen uns für den directen Beweis derselben eine räumliche Darstellung zu geben.

Zu diesem Zwecke gehen wir von dem Ausdrucke $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \Delta$ aus und übertragen die Construction desselben auf den Raum. Wir errichten in B und C die resp. Normalen $n_b$ und $n_c$ zur Ebene der Reciprocität. In $n_c$ construiren wir zwei Punkte $C_1$ $C_2$, welche der Bedingung genügen: $CC_1 : CC_2 = \varDelta$. Dann legen wir durch $C_1$ und $p_a$ eine Ebene. Sie treffe $n_b$ in einem Punkte S. Durch diesen, durch P und $C_2$ geht eine Ebene. Sie schneidet die Ebene der Reciprocität in $p$.

Lassen wir P sich auf $C^n$ bewegen, so bilden alle Ebenen, welche durch $C_1$ und die $p_a$ gehen, ein Büschel, dessen Scheitelkante $C_1 A$ — sagen wir $a_1$ — ist. Dieses schneidet $n_b$ in einer Punktereihe S. Es sind also die Geraden — $t$ — welche die in den Ebenen durch $a_1$ liegenden Punkte P mit den resp. Punkten S verbinden, die gemeinsamen Transversalen zu $a_1$, $n_b$ und $C^n$. Folglich erfüllen sie eine Regelfläche des 2nten Grades — $R^{2n}$. Legen wir durch $C_2$ und diese Geraden $t$ Ebenen, so schneiden letztere die Ebene der Reciprocität in den Geraden $p$, welche den Punkten P in der Reciprocität ($CBA\varDelta$) entsprechen. Diese Ebenen durch $C_2$ bilden den Kegel aus $C_2$ an $R^{2n}$, also einen Kegel der $2n$ten Classe. Er trifft die Ebene der Reciprocität in einer Curve der $2n$ten Classe. Daraus ergeben sich Sätze, welche den in 2 hervorgehobenen dual sind.

Seien aus einem Punkte G der Ebene die Tangenten an $C_{2n}$ zu bestimmen, so benutzen wir das Hyperboloid $H^2$, welches durch die windschiefen Geraden $a_1$ $n_b$ und $\overline{GC_2}$ bestimmt wird. Dieses trifft die Ebene der Reciprocität in einem Kegelschnitt $K_g^2$.

Sei P ein gemeinsamer Punkt von $K_g^2$ und $C^n$, so geht durch ihn eine Transversale $t$ zu $a_1$ und $n_b$, welche sowohl auf $H^2$ wie auf $R^{2n}$ liegt. Sie wird also die Gerade $\overline{GC_2}$ schneiden und mit $C_2$ eine Tangentialebene an $R^{2n}$ bestimmen. Diese trifft die Ebene der Reciprocität in einer durch P und G gehenden Tangente an $C_{2n}$. Bemerken wir noch, dass $K_g^2$ durch A B C geht und in G von der Geraden $g$ berührt wird, welche dem Punkte G in der Reciprocität (C B A $\varDelta$) entspricht, so ergeben sich Schlüsse, welche den in 3 und 4 hervorgehobenen dual gegenüber stehen.

Lassen wir $\varDelta$ alle möglichen reellen Werthe annehmen, so gehört zu jedem derselben ein Punktepaar $C_1 C_2$, z. B. zu $\varDelta^*$ die Punkte $C_1^* C_2^*$. Halten wir dann die jetzt gefundene Curve $C_{2n}$ fest, so ist der Kegel über ihr aus $C_2^*$ von der $2n$ten Classe. Seien $S^*$ die Schnittpunkte der Tangentialebenen dieses Kegels mit $n_b$, so ziehen wir die Gerade durch $C_1$ nach den $S^*$. Diese schneiden die Ebene der Reciprocität in Punkten $P^*$, denen in der Reciprocität (C B A $\varDelta^*$) die Tangenten an $C_{2n}$ entsprechen. Der Ort der Punkte $P^*$ ist von der $n$ten Ordnung.

Sei nämlich $g$ eine beliebige Gerade in der Ebene der Reciprocität und schneide die Ebene durch $c_1$ und $g$ aus $n_b$ den Punkt $S_g$, so ziehen wir $\overline{S_g C_2}$. Diese Linie trifft die Ebene der Reciprocität in einem Punkte G, welcher in $a$ liegt. Durch ihn gehen $2n$ Tangenten an $C_{2n}$. Von diesen liegen $n$ in der Geraden $a$, welche für $C_{2n}$ eine $n$fache Tangente ist. Die übrigen schneiden $g$ in $n$ Punkten $P^*$. Also liegen alle Punkte $P^*$ auf einer Curve der $n$ten Ordnung.

Wir schliessen aus dem Gesagten, dass zu jedem reellen Werthe von $\varDelta$ eine Curve $n$ter Ordnung gehört, aus der $C^{2n}$ in einer Reciprocität der betrachteten Art abgeleitet werden kann.

## 7.

Das Princip der besprochenen Reciprocität ist einer Erweiterung fähig. Wir gehen bei derselben von zwei

Geraden $a, c$ und einer Curve $n$ ter Ordnung — $B^m$ — aus. Eine beliebige Gerade der Ebene schneide $a, c, B^m$ in den resp. Punkten $P_a$, $P_c$, $P_{b1}$ $P_{b2}$ ... $P_{bm}$. Dann erhalten wir $m$ Punkte $P_1$ $P_m$ auf $p$ durch Construction der Relationen: $(P_c P_{b1} P_a P_1) = \varDelta = \ldots (P_c P_{bm} P_a P_m)$. Hierdurch sind jeder Geraden $p$ $m$ ihrer Punkte zugeordnet. Wir wollen diese Reciprocität mit dem Symbol $(c B^m a \varDelta)$ bezeichnen.

Wir stellen — wie unter 2 — auch hier die Frage nach dem Orte der Punkte P, welche den Tangenten — $p$ — einer Curve $n$ ter Classe correspondiren. Wir gelangen zu demselben durch eine räumliche Darstellung, welche an die in 2 gegebene Interpretation der Construction eines Doppelverhältnisses anknüpft. Wir legen durch $c$ eine Normalebene — $C$ — zur Ebene der Reciprocität. In $C$ ziehen wir durch den Schnittpunkt B von $a$ und $c$ zwei Gerade — $c_1\, c_2$ —, welche die Bedingung erfüllen: $\frac{\operatorname{tg} c\, c_1}{\operatorname{tg} c\, c_2} = \varDelta$. $B^m$ betrachten wir als Spur eines zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinders $B^y_m$. $C_n$ sei die Spur eines normalen Cylinders $C_{yn}$. Die Tangentialebenen des letztern schneiden $c_1\, c_2\, B^m\, a\, c$ in den resp. Punkten $C_1\, C_2\, P_{b1} \ldots P_{bm}\, P_a\, P_c$. Die Geraden, welche die resp. Punkte $C_1 P_a$ verbinden, liegen in der Ebene $c_1\, a$ und treffen $B^y_m$ in einer Curve der $m$ ten Ordnung $S^m$. Verbinden wir die Punkte dieser Curve mit den resp. $C_2$, so tangiren diese Verbindungslinien den Cylinder $C_{yn}$ und schneiden die Ebene der Reciprocität in den Punkten P. Nun stellen die resp. Geraden $\overline{S\, C_2}$ die Gesammtheit aller Transversalen zu $c_2$ und $S_m$ vor, welche $C_{yn}$ tangiren. Sie liegen auf einer Regelfläche des $2\,mn$ ten Grades — $R^{2mn}$. Jede Gerade $g$ schneidet nämlich diese Fläche in $2mn$ Punkten; denn die Transversalen zu $g$, $c_2$ und $S^m$ liegen auf einer Regelfläche des $2m$ten Grades. Diese hat $2mn$ Tangentialebenen mit $C_{yn}$ gemeinsam, welche $g$ in Punkten von $R^{2mn}$ schneiden. Die Ebene der Reciprocität trifft $R^{2mn}$ im Orte der Punkte P und wir schliessen daher:

*Die Punkte, welche in der Reciprocität ($c\,B^m\,a\,\varDelta$) den Tangenten einer Curve $n$ ter Classe entsprechen, liegen auf einer Curve von der Ordnung $2mn$.*

$c_2$ und $S^m$ sind $n$ fache Linien von $R^{2mn}$. Mithin sind B und die Schnittpunkte von $a$ mit $B^m$ $n$ fache Punkte von $C^{2mn}$. Die Geraden, in welchen die Ebene $C$ den Cylinder $B^y_m$ trifft, sind ebenfalls $n$ fache Linien von $R^{2mn}$. Also sind die Schnittpunkte von $c$ mit $B^m$ $n$ fache Punkte von $C^{2mn}$.

Von hier aus lässt sich leicht übersehen, dass ein Gedankengang, welcher analog dem (2—6) durchgeführten ist, zur Verallgemeinerung der dort gegebenen Resultate führt.

## 8.

Wir ziehen zum Schlusse einige Consequenzen aus dem Gesagten für $n = 1$ und $n = 2$.

$a$) Setzen wir $n = 1$, so folgt aus den Ausführungen von 2:

*Satz: Die Punkte, welche in der Reciprocität ($CBA\varDelta$) den Strahlen eines Büschels correspondiren, liegen auf einem Kegelschnitt $K^2$* oder:

*Construiren wir zu den Punkten, in welchen die Strahlen eines Büschels die Seiten eines Dreiecks schneiden, je den Punkt, welcher mit jenen — in gleicher Reihen-*

*folge genommen — ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss $\varDelta$ bildet, so ist der Ort dieses Punktes ein Kegelschnitt $K^2$.*

$K^2$ wird nach dem in 2 gesagten aus einem Hyperboloid $H^2$ geschnitten, welches durch $s, c_2$ und die Gerade $n_p$ bestimmt wird, die im Scheitel P des Büschels zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht. Also geht $K^2$ durch die Ecken — A B C — des Dreiecks und durch den Punkt P. Die Tangente in P an $K^2$ ist diejenige Gerade, welche in der Ebene der Reciprocität (C B A $\varDelta$) dem Punkte P entspricht. Um die Tangente in B zu construiren, zeichnen wir die Tangentialebene $T$ in B an das Hyperboloid $H^2$. Diese geht durch $c_2$ und eine Gerade $d$, welche die Ebene durch $n_p$ und B aus der Ebene durch $C_1$ und $a$ schneidet. Die Schnittlinie der Ebene $T$ mit der Ebene der Reciprocität ist die Tangente — $b_1$ — in B an $K^2$. Bezeichnen wir die Schnittlinie der Ebene $n_p$ B und der Ebene der Reciprocität — also die Gerade BP — durch $p$, so lässt sich die angegebene Construction von $b_1$ durch das Symbol ($c\ p\ a\ b_1$) $= \varDelta$ ausdrücken. Liegt P auf einer der Seiten des Dreiecks A B C — etwa auf $a$ — so degenerirt $K^2$ in zwei Gerade. Die eine ist $a$; die andere geht durch A und bildet mit $c, b$ und A P das Doppelverhältniss $\varDelta$.

Geben wir einen Kegelschnitt durch 5 Punkte, so können wir diese zu 10 verschiedenen Dreiecken anordnen. Die Seiten *eines* solchen Dreiecks werden von der Verbindungslinie der 2 übrigen unter den 5 Punkten in 3 Punkten geschnitten. Diese bilden mit jedem von jenen 2 Punkten 6 Doppelverhältnisse von verschiedenem Werthe. Durch jedes derselben und das in Rede stehende Dreieck wird eine Reciprocität (C B A $\varDelta$) festgesetzt. In allen diesen Reciprocitäten erscheint der durch 5 Punkte bestimmte Kegelschnitt als Ort von Punkten, welche den Strahlen eines Büschels entsprechen. Indem wir also in irgend einem Punkte P eines Kegelschnittes eine derartige Reciprocität festsetzen, können wir sagen:

*Satz: Die Geraden, welche durch einen Punkt P eines Kegelschnittes gehen, schneiden aus den Seiten eines Dreiecks, das dem Kegelschnitt eingeschrieben ist, Punkte, welche — in gleicher Reihenfolge genommen — mit dem zweiten Schnittpunkte der Geraden und des Kegelschnittes das nämliche Doppelverhältniss $\Delta$ bilden.*

Halten wir A B C fest, so finden wir für jeden Punkt P des Kegelschnittes ein $\Delta$. Geben wir $\Delta$, so erhalten wir den zugehörigen Punkt P, indem wir in $B$ die Tangente $b_1$ construiren und eine Gerade $p$ zeichnen, für welche $(c\, p\, a\, b_1) = \Delta$ ist. Der zweite Schnittpunkt von $p$ mit $K^2$ ist P.

Damit ist die Aufgabe gelöst, die Seiten eines Dreiecks, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, durch eine Gerade so zu schneiden, dass die Schnittpunkte mit einem Punkte des Kegelschnittes — in vorgeschriebener Reihenfolge — ein gegebenes Doppelverhältniss bilden. Es gibt unendlich viele Gerade, welche dieser Bedingung genügen. Sie gehen alle durch einen Punkt des Kegelschnittes.

*b*) Seien $p_1\, p_2$ zwei Gerade durch P. Ihre Schnittpunkte mit $a\, b\, c$ seien $P_{a1}$, $P_{b1}$, $P_{c1}$ und $P_{a2}$, $P_{b2}$, $P_{c2}$. Ihre zweiten Schnittpunkte mit $K^2$ seien $P_1\, P_2$. Dann sagt der zuletzt hervorgehobene Satz aus, dass

$$(P_{c1}\, P_{b1}\, P_{a1}\, P_1) = (P_{c2}\, P_{b2}\, P_{a2}\, P_2).$$

Die Punkte $P_{a1} \dots P_{a2} \dots$ bestimmen also projectivische Reihen auf $p_1 p_2$. Folglich sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen, d. h. $a, b, c, \overline{P_1 P_2}$ — Tangenten eines Kegelschnittes — $K_1^2$ — der von $p_1 p_2$ berührt wird. Wir schliessen daher:

*Satz: Zwei Dreiecke, welche einem Kegelschnitt eingeschrieben sind, umhüllen einen zweiten Kegelschnitt.*

*c*) Gegeben sei ein Viereck. $a\,b\,c\,d$ seien *die* vier Seiten desselben, von denen keine drei in einer Ecke zusammenstossen. Gesucht werden die Geraden durch einen Punkt P der Ebene, welche die Seiten $a\,b\,c\,d$ in 4 Punkten $P_a\,P_b\,P_c\,P_d$ schneiden, deren Doppelverhältniss $\varDelta$ ist. Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir 3 Seiten des Vierecks als die Geraden einer Reciprocität $(a\,b\,c\,\varDelta)$. In dieser correspondiren nach einem Satze, der dem ersten unter *a*) abgeleiteten dual ist, den Punkten der Geraden $d$ die Tangenten eines Kegelschnittes $K^2$. An diesen gehen durch P zwei Tangenten, welche die Aufgabe lösen. Wir schliessen daher:

Satz: Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Gerade, welche die Seiten eines Vierecks, von denen keine drei in einer Ecke zusammentreffen, in vier Punkten schneiden, die — in gleicher Reihenfolge genommen — ein vorgeschriebenes Doppelverhältniss bilden. Diese Geraden umhüllen mit den erwähnten Seiten des Vierecks einen Kegelschnitt.