Ueber Curven IV. Ordnung mit einem doppelten Berührungsknoten und einem Doppelpunkte.

Mit 2 Tafeln. — Figur 1—13.

1.

Wir gehen von einer ebenen Reciprocität aus, welche durch zwei Gerade a, c, einen Kegelschnitt B^2 und ein Doppelverhältniss Δ festgesetzt wird, also von einer Reciprocität $(c\,B^2\,a\,\Delta)$*) und untersuchen den Ort der Punkte, welche den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel P correspondiren. Damit specialisiren wir die in der citirten Abhandlung unter 7 gegebenen Ausführungen für $m = 2$ und $n = 1$. Wir schliessen also:

Satz. In der Reciprocität $(c\,B^2\,a\,\Delta)$ *correspondiren den Strahlen eines Büschels die Punkte einer Curve vierter Ordnung* — C^4 — oder: *construiren wir zu den Punkten, in welchen die Strahlen eines Büschels zwei Gerade und einen Kegelschnitt treffen, je die zwei Punkte, welche mit jenen — in gleicher Reihenfolge genommen — dasselbe Doppelverhältniss* Δ *bilden, so ist der Ort dieser Punkte eine* C^4.

C^4 ist der Schnitt einer Regelfläche vierten Grades — R^4 — mit der Ebene der Reciprocität. Wir construiren dieselbe, indem wir über B^2 den Cylinder B^2_y errichten. (Fig. 1 axonometrisch.) Dieser wird von der Ebene $\widehat{c_1 a}$ in einem Kegelschnitt S^2 getroffen. Dann ist R^4 der Ort

*) Vgl. die Abhandlung: Ueber eine ebene Reciprocität, insbesondere Nr. 7.

aller Geraden, die S^2, c_2 und *die* Gerade n_p schneiden, welche in P zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht. C^4 geht durch die Punkte, in denen S^2 die Ebene der Reciprocität trifft. Es sind dies zugleich die Schnittpunkte — $C_1 C_2$ — von a mit B^2. Die Geraden n_{a1}, n_{a2}, in welchen die Ebene C den Cylinder B^2_y schneidet, liegen auf R^4. Mithin sind die Schnittpunkte — $A_1 A_2$ — von c mit B^2 auf C^4 gelegen. c_2 und n_p sind Doppellinien von R^4. Folglich sind B und P Doppelpunkte von C^4.

Die Ebene $\widehat{c_1 a}$ schneidet R^4 in S^2. Also muss sie mit R^4 noch eine Curve zweiter Ordnung gemein haben. Da S^2 im Allgemeinen weder durch B geht, noch von n_p geschnitten wird, so muss die Curve zweiter Ordnung, welche ausser S^2 noch in der Ebene $\widehat{c_1 a}$ liegt, in B und in dem Schnittpunkte — D — von n_p mit $\widehat{c_1 a}$ einen Doppelpunkt haben. Also muss diese Curve degeneriren und besteht aus der doppelt zu zählenden Geraden $\overline{BD}$ — sagen wir d. Mithin ist die Gerade d eine Doppellinie von R^4. Die Ebene durch d und c_2 berührt R in B. Also schneidet sie die Ebene der Reciprocität in einer Geraden — b — welche in B die Curve C^4 berührt. Diese Linie kann C^4 — ausser in B — nicht mehr schneiden. Folglich hat sie in B mit C^4 vier Punkte gemein und da sie Tangente in B ist, so folgt, dass in B zwei Doppelpunkte der C^4 zusammenfallen und dass in B die Curve C^4 sich selbst berührt. B *ist ein doppelter Berührungsknoten.*

Bezeichnen wir $\overline{BP}$ mit p, so wird die gegebene Construction von b durch die Relation $(c p a b) = \Delta$ ausgedrückt.

Um die Tangenten an C^4 in P zu construiren, zeichnen wir die Tangentialebenen in diesem Punkte an R^4. Dieselben gehen durch n_p. Legen wir jetzt eine Ebene durch P und c_2, so schneidet diese R^4 — ausser in c_2 — noch in einem Kegelschnitt, der in P einen Doppelpunkt hat. Ein solcher Kegelschnitt zerfällt in zwei Gerade. Es sind dies die Verbindungslinien des Punktes P mit den Punkten — $S_1 S_2$ — in welchen die Ebene durch c_2 und P den Kegelschnitt S^2 trifft.

Die Normalen aus S_1 und S_2 auf die Ebene der Reciprocität treffen B^2 in zwei Punkten — $B_1 B_2$ — welche auf einer Geraden — b_1 — durch B liegen. Für letztere gilt die Relation $(c\, b_1\, a\, p) = \Delta$.

Haben wir also nach derselben b_1 bestimmt und zeichnen wir die Schnittpunkte von b_1 mit B^2, so gehen durch diese die Geraden — $p_1\, p_2$ — welche C^4 in p berühren. Es sind diejenigen Linien, welche dem Punkte P in der Reciprocität $(c\, B^2\, a\, \Delta)$ entsprechen.

Seien $t_1\, t_2$ die Tangenten, welche aus P an B^2 gezogen werden können, so entsprechen ihnen — wie sofort ersichtlich — in der Reciprocität $(C\ B^2\ a\ \Delta)$ diejenigen Punkte, in denen die Geraden $t_1\, t_2$ die Curve C^4 berühren.

Sei x eine durch B gehende Gerade in der Ebene der Reciprocität, so fragen wir nach den Schnittpunkten von x mit C^4. Zur Beantwortung dieser Frage legen wir eine Ebene durch x und c_2 und construiren die Transversalen zu c_2, n_p und S^2, welche in dieser Ebene liegen. Wir haben also die Schnittpunkte der Ebene durch c_2 und x mit S^2 zu bestimmen. Indem wir diese Punkte mit dem Schnittpunkte der Ebene durch $c_2\, x$ und der Geraden n_p verbinden, erhalten wir die gesuchten Transversalen. Sie treffen x in zwei Punkten von C^4. Wir führen die skizzirte Construktion aus, indem wir zu x eine Gerade x_b nach der Relation $(c\, x_b\, a\, x) = \Delta$ zeichnen. x_b trifft B^2 in zwei Punkten.

Ihre Verbindungslinien mit P schneiden aus x zwei Punkte von C^4. Drehen wir x um B, so wird durch die Bedingung $(c\, x_b\, a\, x) = \Delta$ jeder Geraden x eine Gerade x_b zugeordnet; diese Geraden $x\, x_b$ sind Paare einer Projectivität, für welche c und a die Doppelstrahlen sind. Daraus entnehmen wir folgende Erzeugungsweise von C^4:

Gegeben sei ein Kegelschnitt B^2, *eine Projectivität von Strahlen an Scheitel* B *und ein Punkt* P. *Schneidet dann ein Strahl der Projectivität aus* B^2 *die Punkte* $B_1 B_2$, *so treffen die Verbindungslinien derselben mit* P *den entsprechenden Strahl der Projectivität in zwei Punkten von* C^4.

Durch diese Erzeugung von C^4 ist jedem Punkte von C^4 — ausgenommen B und P — ein Punkt von B^2 zugeordnet. Construiren wir die Tangenten aus B an B^2 und ihre entsprechenden Geraden — $b_1\, b_2$ — in der Projectivität P_{ac}, so sind letztere die Tangenten aus B an C^4.

2.

Sei c_{2x} eine beliebige durch B gezogene Gerade, welche nicht in der Ebene der Reciprocität liegt. Construiren wir dann eine Regelfläche — R^{4x} —, welche c_{2x}, n_p und die oben construirte Curve 4 ter Ordnung zu Leitcurven hat, so ist im Allgemeinen der Grad einer solchen Fläche gleich 8. Er wird in unserem Falle um 4 verringert, weil n_p und c_{2x} die Curve C^4 in Doppelpunkten schneiden. Construiren wir an R^{4x} in B die Tangentialebene — C_{2x} — so geht diese durch c_{2x} und durch die Gerade b, welche C^4 in B berührt. C_{2x} schneidet R^{4x} — ausser in c_{2x} — noch in einem Kegelschnitt. Weil nun b mit C^4 in B vier Punkte gemein hat, so muss dieser Kegelschnitt in B einen Doppelpunkt haben. Ein zweiter wird der Schnittpunkt — D^x — von n_p mit C_{2x} sein. Also degenerirt der Kegelschnitt in die Gerade $\overline{BD}_x$ — sagen wir d_x — und diese ist eine doppelte Linie von R^{4x}. Jede Ebene durch d^x wird R^{4x} noch in einem Kegelschnitt treffen. Sei C_{1x} eine solche Ebene, welche durch die Gerade a der Reciprocität gehe und R^{4x} in dem Kegelschnitt S^{2x} schneide. Durch c_{2x} legen wir eine Ebene — C_x —, welche zur Ebene der Reciprocität senkrecht steht und diese Ebene in c_x, die Ebene C_{1x} in c_{1x} treffe. Mit $\varDelta_x$ wollen wir die Relation $\frac{\operatorname{tg} c_x c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x c_{2x}}$ bezeichnen. Schliesslich construiren wir die Orthogonalprojection — B^{2x} — des Kegelschnittes S^{2x} auf die Ebene der Reciprocität. Damit haben wir eine Raumfigur hergestellt, welche analog der in 1 benutzten ist und auf dem nämlichen Wege wie diese zu Curve C^4 führt. Letztere erscheint jetzt als der Ort der Punkte, welche den Strahlen des Büschels mit dem Scheitel P in der Reciprocität ($c_x B^{2x} a \varDelta_x$) entsprechen.

Bewegt sich c_{2x} in der Ebene C, so gehört zu jeder Lage von c_{2x} eine andere Regelfläche R^{4x}. Die doppelten Geraden d_x dieser Regelflächen liegen in den Ebenen durch b und die resp. c_{2x}. Die Ebenen durch a und diese d_x schneiden aus den resp. Regelflächen R^{4x} die Kegelschnitte S^{2x} und aus der Ebene C die resp. Geraden c_{1x}. Es ist auf diese Weise jeder Geraden c_{2x} eine Gerade c_{1x} zugeordnet und für diese Geradenpaare gilt das nämliche Verhältniss $\frac{\operatorname{tg} c_x c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x c_{2x}} = \varDelta_x$. Die Transversalen t der Regelflächen R^{4x} drehen sich um die Punkte von C^4 und liegen in Ebenen durch n_p. Folglich schneiden diese t die Ebenen durch die d und a resp. in Punkten, welche auf Normalen zur Ebene der Reciprocität liegen*). Mithin befinden sich die Kegelschnitte S^2 auf einem zur letzteren Ebenen senkrechte Cylinder und haben dieselbe Orthogonalprojection B^2. Es führen also die jetzt betrachteten Lagen von c_{2x} zwar zu unendlich vielen Regelflächen R^{4x}, aber zu der nämlichen Reciprocität $(c_x\, B^{2x}\, a\, \varDelta_x)$. Lassen wir c_{2x} die Ebene C_{2x} durchlaufen, so gehört zu jeder Lage von c_2 eine Regelfläche R^{4x}. d_x ist eine doppelte Gerade für alle diese Flächen. Also schneidet C_{1x} dieselben — ausser in d_x — noch in unendlich vielen Kegelschnitten, deren Orthogonalprojectionen auf die Ebene der Reciprocität unendlich viele Kegelschnitte — B^{2x} — sind. Legen wir dann durch die Geraden c_{2x} die Normalebenen C_x zur Ebene der Reciprocität, so erhalten wir unendlich viele Geradenpaare $c_x\, c_{1x}$, welche mit den resp. c_{2x} durch die Bedingung: $\dfrac{\operatorname{tg} c_x\, c_{1x}}{\operatorname{tg} c_x\, c_{2x}} = \varDelta_x$ verbunden sein sollen. Wir gelangen so zu unendlich vielen Reciprocitäten $(c_x\, B^{2x}\, a\, \varDelta_x)$, welche die Linie a gemeinsam haben und deren Kegelschnitte — B^{2x} — sich in 2 Punkten — $C_1\, C_2$ — auf a schneiden.

Drehen wir jetzt die Ebene C_{1x} um d_x, so schneidet jede ihrer Lagen aus den Regelflächen R^{4x} unendlich viele Kegelschnitte S^{2y}. Ihre Orthogonalprojectionen auf die Ebene der Reciprocität sind unendlich viele Kegelschnitte B^{2y}. Zu jedem derselben gehört eine Gerade c_{2x} in C_{2x} und mithin ein $\varDelta_y$. Alle Kegelschnitte B^{2y}, welche zu diesem $\varDelta_y$ gehören, schneiden sich in zwei

*) In Fig. 2 sind zwei solche Transversalen — $t\, t^*$ — dargestellt, welche durch den Punkt P_1 von C^4 gehen.

Punkten einer durch B gehenden Geraden a_y. Sie ist die Schnittlinie einer Lage von C_{1x} mit der Ebene der Reciprocität. Es gehören also zu jedem C_{1x} unendlich viele Reciprocitäten $(c_y B^{2y} a_y \Delta_y)$.

Lassen wir endlich c_2 sämmtliche Normalebenen zur Ebene der Reciprocität durchlaufen, so wiederholt sich der Gedankengang, welchen wir oben für die Geraden c_2 in der Ebene C_x entwickelten. Wir gelangen zu keinen neuen Reciprocitäten. Damit haben die aber alle möglichen Lagen der Geraden c_{2x} durch B erschöpft und fassen nun das Gesagte dahin zusammen:

C^4 *liegt auf zweifach unendlich vielen Regelflächen vierter Ordnung, von denen je unendlich viele die doppelten Geraden* n_p *und* d_x *gemeinsam haben. Für je unendlich viele dieser Regelflächen liegt je ein Kegelschnitt auf einem zur Ebene der Reciprocität normalen Cylinder. Jede Gruppe der ersteren Regelflächen führt zu unendlich vielen Reciprocitäten* $(c B^2 a \Delta)$. *Jede Gruppe der in zweiter Linie erwähnten Regelflächen führt nur zu einer Reciprocität.* C^4 *correspondirt in diesen zweifach unendlich vielen Reciprocitäten den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel* P.

3.

Wir wenden uns dazu, die gegenseitige Abhängigkeit der Bestimmungsstücke unserer Reciprocitäten zu untersuchen. Zunächst ergibt sich aus der Herleitung der *Kegelschnitte* B^2, *dass jeder derselben vier Punkte von* C^4 *enthält, welche paarweise auf Geraden durch* B liegen.

Unter 1 haben wir gesehen, dass die Tangenten — $t_1 t_2$ — aus P an C^4 den dort benutzten Kegelschnitt B^2 berührten. Lassen wir jetzt an seine Stelle irgend einen der Kegelschnitte B^2 treten, welche wir oben ableiteten, so erhalten wir aus ihm durch Vermittlung einer Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\Delta$) dieselbe Curve vierter Ordnung wie unter 1. Sie hat also die nämlichen Tangenten aus P und daraus folgt, *dass sämmtliche Kegelschnitte* B^2 *von den Geraden* $t_1\,t_2$ *berührt werden.*

Seien $B_1\,B_2$ zwei Punkte eines Kegelschnittes B^2, welche auf einer Geraden x durch B liegen. Dann befinden sich in den Geraden $PB_1\,PB_2$ zwei Punkte — P_1P_2 — von C^4, welche auf einer Geraden x_1 durch B gelegen sind (1). Sollen wir die nämlichen Punkte $P_1\,P_2$ unter Benutzung eines anderen Kegelschnittes — sagen wir B^{2x} — erhalten, so muss $\overline{PB_1}$, $\overline{PB_2}$ aus B^{2x} zwei Punkte — $B_{1x}\,B_{2x}$ — schneiden, deren Verbindungslinie durch B geht. Lassen wir an Stelle von x eine der Tangenten an B^2 treten, so folgt: *Die Berührungspunkte der Tangenten aus B an die Kegelschnitte* B^2 *liegen auf zwei Geraden durch* P.

Zur Construction der Tangente b in B an C^4 haben wir unter 1 die Relation $(c\,p\,a\,b) = \Delta$ abgeleitet. Dieselbe Linie b müssen wir erhalten, wenn wir C^4 mit Hülfe irgend einer der Reciprocitäten ($c\,B^2\,a\,\Delta$) zeichnen. Es werden daher für alle Reciprocitäten, welche das nämliche Doppelverhältniss Δ haben, die Geraden a und c in der erwähnten Abhängigkeit von p und b stehen. Wir schliessen daraus:

Die Geraden a und c der Reciprocitäten von gleichem Doppelverhältniss Δ *bilden eine Projectivität, für welche b und p die Doppelstrahlen sind.*

Sei die Curve C^4 gegeben und betrachten wir irgend zwei Gerade durch B als a und c einer Reciprocität, so wird ihr Doppelverhältniss durch die Bedingung $(cpab) = \Delta$ bestimmt. Zu C^4, a, c, Δ gehört ein Kegelschnitt B^2. Derselbe geht durch die Schnittpunkte von a und c mit C^4 und hat $t_1 t_2$ zu Tangenten. Nun waren a und c beliebig gewählte Gerade durch B. Es folgt also:

Durch vier Punkte von C^4, *welche auf zwei Geraden aus* B *liegen, geht ein Kegelschnitt* B^2 oder: *Construiren wir auf den Geraden durch* P *zu den Schnittpunkten* — $P_c\, P_a\, P_1$ — *mit* c, a, C^4 *diejenigen Punkte* B, *für welche* $(P_c B P_a P_1) = \Delta$ *ist, so liegen diese auf einem Kegelschnitt.*

Seien $h_1 h_2$ zwei Gerade durch P, welche B^2 in den resp. Punkten $B_{h_1}\, B_{h_2}$ treffen. Auf den Geraden durch diese Punkte und P sollen die Punkte $P_{h_1}\, P_{h_2}$ von C^4 liegen, für welche $(P_{c_1}\, B_{h_1}\, P_{a_1}\, P_{h_1}) = \Delta = (P_{c_2}\, B_{h_2}\, P_{a_2}\, P_{h_2})$. Dabei seien $P_{c_1} \dots P_{a_1} \dots$ die Schnittpunkte von $h_1 h_2$ mit a und c. Wir wollen $B_{h_1}\, P_{h_1}$, $B_{h_2}\, P_{h_2}$ zugeordnete Punkte von B^2 und C^4 nennen. Dann folgt aus der angeführten Relation, dass die Punkte $P_{c_1}\, P_{c_2}$, $B_{h_1}\, B_{h_2} \dots$ projective Reihen auf $h_1 h_2$ bilden. Also sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen — d. h. c, $\overline{B_{h_1}\, B_{h_2}}$, $a\, \overline{P_{h_1}\, P_{h_2}}$ Tangenten eines Kegelschnittes, der von $h_1\, h_2$ berührt wird. Bezeichnen wir die Geraden $\overline{B_{h_1}\, B_{h_2}}$ und $\overline{P_{h_1}\, P_{h_2}}$ als Sehnen von B^2 und C^4, welche in der Reciprocität $(c\, B_2\, a\, \Delta)$ einander zugeordnet sind, so können wir das jetzt Bewiesene dahin aussprechen:

Zwei Sehnen des Kegelschnittes B^2 *und der Curve* C^4, *welche in der Reciprocität* $(c\, B^2\, a\, \Delta)$ *einander zugeordnet sind, umhüllen mit den Geraden durch* P, *welche die zugeordneten Punkte dieser Sehnen verbinden und mit a und c einen Kegelschnitt.*

Kennen wir P, B, B^2 und ein Punktepaar $B_{h_1}\, P_{h_1}$, so können wir nach diesem Satze auf lineare Weise die Punkte construiren, welche auf einer Geraden — x — durch B liegen. Treffe x den Kegelschnitt B^2 in B^2_h, so zeichnen wir durch P_{h_1} die Tangente eines Kegelschnittes, welche von a, c, $\overline{B_{h_1} B_{h_2}}$, $\overline{P B_{h_1}}$ und $\overline{P B_{h_2}}$ berührt wird. Sie schneidet x in einem Punkte von C^4.

Specialisiren wir den zuletzt hervorgehobenen Satz für die Tangenten, welche durch P an C^4 gehen, so folgt:

Die Tangenten aus P *an* C^4 *umhüllen mit den Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte an* C^4 *und an einen Kegelschnitt* B^2 *und mit* a *und* c *einen Kegelschnitt.*

Tritt an Stelle der Sehnen $\overline{B_{h_1} B_{h_2}}$ die Tangente in B_{h_1} an B^2, so geht $\overline{P_{h_1} P_{h_2}}$ in eine Tangente in P_1 an C^4 über. Aus den Geraden $h_1 h_2$ wird eine Tangente h_1, welche in P ihren Berührungspunkt hat und wir sagen:

Sind B_{h_1} P_{h_2} *zugeordnete Punkte in der Reciprocität* ($c\,B^2\,a\,\varDelta$), *so umhüllen die resp. Tangenten in ihnen an* B^2 *und* C^4 *mit* a *und* c *einen Kegelschnitt, der in* P *von* h_1 *berührt wird.*

Mit Hülfe dieses Satzes können wir auf lineare Weise die Tangente in P_{h_1} an C^4 zeichnen. Er versagt, wenn im Punkte C_1 auf a die Tangente gezeichnet werden soll. Dann construiren wir die Tangentialebene an R_4 in C_1. (Fig. 3.) Zu diesem Zwecke ziehen wir die Transversale t durch C_1 zu n_p und c_2. Weiter zeichnen wir die Tangente — t_b — in C_1 an B^2. Durch letztere legen wir zur Ebene der Reciprocität eine Normalebene. Sie trifft die Ebene durch c_1 und a in einer Geraden — s — welche in C_1 den Kegelschnitt S^2 berührt, den die Ebene durch c_1 und a aus R^4 schneidet. Mithin muss die Ebene durch die Geraden t und s die Fläche R^4 in C_1 berühren und aus der Ebene der Reciprocität eine Gerade — t_c — schneiden, welche in C_1 Tangente an C^4 ist. Bezeichnen wir die Orthogonalprojection von t auf die Ebene der Reciprocität — also die Gerade $\overline{P C_1}$ — mit p_c, so können wir die skizzirte Construction von t_c durch die Relation $(p_c\, t_b\, a\, t_c) = \varDelta$ ausdrücken. In analoger Weise erhalten wir die Tangenten in C_2. Handelt es sich darum, die Tangenten in $A_1\, A_2$ — den Schnittpunkten von c mit C^4 — zu finden, so betrachten wir letztere Gerade als Linie a einer Reciprocität $(c\, B^2\, a\, \varDelta^*)$, bestimmen dem entsprechend $\varDelta^*$ und construiren dann die Tangenten in analoger Weise, wie dies jetzt bei den Punkten $C_1\, C_2$ geschehen ist.

4.

Wir heben unter den Reciprocitäten $(C\, B^2\, a\, \varDelta)$ diejenigen hervor, für welche $\varDelta = 2$ ist. Bei ihnen bilden b, p mit den Geraden $a\, c$ harmonische Gruppen.

Sei B^2_2 ein Kegelschnitt einer solchen Reciprocität, so erhalten wir (vgl. 1) die Tangenten — $p_1\, p_2$ — in P an C^4, indem wir eine Gerade b_1 nach der Bedingung $(c\, b_1\, a\, p) = 2$ zeichnen. Letztere sagt aber aus, dass p und b_1 mit a und c eine harmonische Gruppe bildet. Also muss b_1 mit der oben erwähnten Geraden b zusammenfallen. Verbinden wir die Punkte, in denen b den Kegelschnitt B^2_2 schneidet, mit P, so erhalten wir $p_1 p_2$. Nun müssen wir stets zu denselben Tangenten $b, p_1 p_2$ gelangen, welchen Kegelschnitt B^2 wir auch benutzen. Wir schliessen also:

Sämmtliche Kegelschnitte B^2 *der Reciprocitäten, für welche* $\varDelta = 2$ *ist, gehen durch die Schnittpunkte von* b *mit* $p_1\, p_2$.

Specialisiren wir das, was am Ende von 1 gesagt wurde, für $\varDelta = 2$, so geht die Projectivität P_{ac} in Involution über und wir sagen:

Verbinden wir die Punkte, in denen ein Strahl einer Involution einen Kegelschnitt B^2 *trifft, mit einem beliebigen*

Punkte P, *so schneiden diese Verbindungslinien den entsprechenden Strahl in zwei Punkten einer* C^4.

Sei E_1 ein gemeinsamer Punkt von C^4 und B^2_2, welcher nicht in a oder c liegt, so schneidet die Gerade $\overline{PE_1}$ — sagen wir e — aus B^2_2 einen zweiten Punkt E_2 und aus a und c die resp. Punkte P_a, P_c. Dann muss in der Reciprocität (cB^2a2) dem Punkte E_2 von B^2_2 der Punkt E_1 von C^4 zugeordnet sein, d. h. $(P_c E_2 P_a E_1) = 2$. Aus dieser Relation folgt aber, dass auch $(P_c E_1 P_a E_2) = 2$ ist. Mithin muss E_2 ein Punkt von C^4 sein, welcher dem Punkte E_1 von B^2_2 zugeordnet ist, d. h. E_2 ist ebenfalls ein gemeinsamer Punkt von B^2_2 und C^4. Analoge Schlüsse zeigen uns, dass zwei weitere gemeinsame Punkte von B^2_2 und C^4 auf einer Geraden — f — durch P liegen. Wir folgern also:

Die Kegelschnitte B^2_2, *welche zu den Reciprocitäten gehören, deren* Δ *gleich 2 ist, haben ausser den Punkten in a und c mit* C^4 *noch vier Punkte gemeinsam, welche paarweise auf Geraden durch* P *liegen.*

Seien $F_1 F_2$ die gemeinsamen Punkte von C^4 und B^2_2, welche in f gelegen sind, so folgt aus dem unter 3 Bewiesenen, dass $e f a c$ mit den Geraden $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ einen Kegelschnitt umhüllen. Ein zweiter Kegelschnitt hat $e f a c$ und $E_1 F_2$, $E_2 F_1$ zu Tangenten.

Für die Construction der Tangenten an C^4 in den Schnittpunkten von a und c mit B^2_2 folgt (3):

In den auf a und c liegenden Schnittpunkten von C^4 *mit* B^2_2 *bilden die Tangenten an* C^4 *und* B^2_2 *mit den Geraden nach* B *und* P *harmonische Gruppen.*

5.

Sei g eine beliebige Gerade der Ebene, so fragen wir nach den Schnittpunkten von g mit C^4.

Um diese zu finden, ziehen wir durch B eine Gerade c_2, welche nicht in der Ebene der Reciprocität liegt. Dann denken wir uns eine Regelfläche — R^4 — construirt, welche zu dieser Geraden c_2 gehört, d. h. wir fixiren eine Reciprocität ($c\,\mathrm{B}^2\,a\,\varDelta$), in welcher C^4 den Strahlen eines Büschels mit dem Scheitel P correspondirt. Weiter zeichnen wir ein Hyperboloid H^2, welches durch die Geraden g, c_2 und n_p bestimmt wird. Nun schneidet die Ebene, welche durch a und die Doppellinie d von R^4 geht, aus letzterer Fläche einen Kegelschnitt S^2 und aus dem Hyperboloid H^2 einen Kegelschnitt H^2. Durch die gemeinsamen Punkte von S^2 und H^2 gehen vier Transversalen zu c_2, n_p und g, welche auf R^4 und H^2 liegen. Diese schneiden g in vier Punkten von C^4. Zur Durchführung dieser Construction bestimmen wir die Orthogonalprojectionen von S^2 und H^2 auf die Ebene der Reciprocität. Die Projection von S^2 ist der Kegelschnitt B^2 der Reciprocität ($c\,\mathrm{B}^2\,a\,\varDelta$). Die Projection — H^2_g — von H^2 erhalten wir durch folgende Ueberlegung: Sei t eine Transversale zu $c_2\,n_p$ und g und schneide diese aus der Ebene $\widehat{ad}$ den Punkt D von H^2, so erzielen wir durch D zur Ebene der Reciprocität eine Normale. Ihr Fusspunkt — D_1 — liegt auf H^2_g. Die Orthogonalprojection — t_1 — von t geht durch D_1 und wenn ihre resp. Schnittpunkte mit g, a, c durch $\mathrm{P}_g\,\mathrm{P}_a\,\mathrm{P}_c$ bezeichnet werden, so können wir die dargelegte Construction von D_1 durch die Relation ausdrücken: $(\mathrm{P}_c\,\mathrm{D}_1\,\mathrm{P}_a\,\mathrm{P}_g) = \varDelta$ oder $(\mathrm{P}_a\,\mathrm{P}_g\,\mathrm{P}_c\,\mathrm{D}_1) = \varDelta$. Da diese Relation für alle Punkte von H^2_g gilt, welche auf Geraden durch P liegen, können wir schliessen, dass H^2_g der Kegelschnitt ist, welcher den Strahlen des Büschels durch P in der Reciprocität ($a\,g\,c\,\varDelta$) correspondirt. Daraus folgt, dass $\mathrm{H}g^2$ durch die Schnittpunkte der Geraden $a\,g\,c$ geht.*)

Ist E ein gemeinsamer Punkt von B^2 und H^2_g, so repräsentirt er die Orthogonalprojection eines gemeinsamen Punktes von S^2 und H^2. Also ist die Gerade $\overline{\mathrm{EP}}$ die Orthogonalprojection einer gemeinsamen Transversalen von R^4 und H^2 und trifft mithin g in einem Punkte von C^4.

Nimmt g alle möglichen Lagen in der Ebene der Reciprocität an, so gehört zu jedem g ein Kegelschnitt $\mathrm{H}g^2$ resp. ein Hyperboloid H^2. Auf allen diesen Hyperboloiden liegt n_p und c_2. Mithin gehen alle Kegelschnitte H^2_g durch P und B. Eine weitere Gerade, welche allen Hyperboloiden H^2 angehört, ist die Verbindungslinie BP oder p. Also werden diese Hyperboloide von der Ebene durch c_2 und p in B berührt. Diese schneidet die Ebene $\widehat{ad}$ in einer Geraden, welche in B sämmtliche Kegelschnitte H^2 tangirt. Ihre Orthogonalprojection — b — muss somit alle Kegelschnitte H^2_g in B berühren. Nach der gegebenen Construction wird sie durch die Bedingung $(c\,b\,a\,p) = \varDelta$ bestimmt, d. h. sie ist die Tangente in B an C^4.

Wir sehen aus dem Gesagten, dass die Kegelschnitte H^2_g ein specielles Netz von der Art bilden, dass alle durch P gehen und sich in B berühren. Sie stehen mit den Geraden der Ebene in der Beziehung einer quadratischen Transformation. Jeder Kegelschnitt H^2_g trifft a und c — ausser in B — noch je in einem Punkte. Die Verbindungslinie dieser Punkte ist die zu H^2_g zugeordnete Gerade g.

Der Kegelschnitt H^2_g, welcher a und c zu Asym-

---

*) Vgl. Ueber eine ebene Reciprocität Nr. 7.

ptotenrichtungen hat, correspondirt der unendlich fernen Geraden der Ebene. Bestimmen wir seine Schnittpunkte mit B^2, so liegen auf den Geraden aus P nach diesen Schnittpunkten die unendlich fernen Punkte von C^4.

Berührt H^2_g den Kegelschnitt B^2, so ist die zugeordnete Gerade g eine Tangente an C^4.

Es erscheint somit C^4 *als Enveloppe aller der Sehnen, welche die Geraden a und c aus den Kegelschnitten* H^2_g *schneiden, die* B^2 *berühren.*

Verbinden wir im letzteren Falle den Berührungspunkt von B^2 und H^2_g mit P, so schneidet diese Verbindungslinie aus g den Berührungspunkt dieser Geraden mit C^4.

Haben wir speciell C^4 aus einem Kegelschnitt B^2_2 abgeleitet und sei B_1 P_1 ein zugeordnetes Punktepaar von B^2 und C^4, so wird dasselbe durch a und c harmonisch getrennt. Mithin bilden a und c mit den Geraden $B B_1$ und $P P_1$ eine harmonische Gruppe. Ist dann b_1 die Tangente in B_1 an B^2, so construiren wir einen Kegelschnitt H^2_g, der von b in B und von b_1 in B_1 berührt wird und durch P geht. Er schneidet a und c in zwei Punkten, deren Verbindungslinie die Tangente p_1 in P_1 an C^4 ist. Diese Punkte — A, C — bilden mit P_1 und dem Schnittpunkte — S — von p_1 und $B B_1$ eine harmonische Gruppe. Daraus folgt, dass die Polare von S in Bezug auf H^2_g durch P_1 geht. Zeichnen wir jetzt einen Kegelschnitt — H^2_t — der H^2_g in B und B_1 berührt, so hat der Punkt S in Bezug auf H^2_t dieselbe Polare wie in Bezug auf H^2_g. Setzen wir fest, dass H^2_t durch P_1 gehen soll, so folgt aus dem Gesagten, dass p_1 die Tangente in P_1 an H^2_t ist.

Wir schliessen daher:

Sind $B_1 P_1$ *zwei in einer Reciprocität* $(c B_2^2 a 2)$ *zugeordnete Punktepaare von* B^2 *und* C^4, *so berührt der Kegelschnitt durch* $b B$, $b_1 B_1$ *und* P_1 *die Curve* C^4 *in* P_1.

6.

Die Kegelschnitte H_g^2, welche in der erwähnten quadratischen Transformation den Geraden durch einen Punkt — sagen wir T — correspondiren, schneiden sich in einem Punkte T_1, d. h. sie bilden ein Büschel. Trifft nämlich $\overline{PT}$ die Geraden a und c in den Punkten $P_a P_c$, so wird T_1 durch die Relation: $(P_a T P_c T_1) = \varDelta$ bestimmt. Handelt es sich darum, die Tangenten zu finden, welche aus T an C^4 gezogen werden können, so haben wir diejenigen Kegelschnitte H_g^2 durch T_1 zu zeichnen, welche den Kegelschnitt B^2 berühren. Ihre Zahl ist sechs. Dem entsprechend gibt es sechs Tangenten durch T an C^4, d. h. *letztere Curve ist von der sechsten Classe.*

Soll g eine Doppeltangente an C^4 sein, so muss der Kegelschnitt H_g^2, welcher zu g gehört, den Kegelschnitt B^2 doppelt berühren. Unter den Kegelschnitten eines Netzes gibt es im Allgemeinen vier, welche einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren. *Also hat* C^4 *vier Doppeltangenten.*

Von diesen fallen zwei in b zusammen. Die anderen zwei erhalten wir, indem wir die zwei Kegelschnitte H_g^2 construiren, welche b in B tangiren, durch P gehen und B^2 doppelt berühren. Diese Construction — eine Specialisirung der allgemeinen Construction, welche die Kegelschnitte eines Netzes finden lehrt, die einen Kegelschnitt doppelt berühren — lässt sich in folgender Weise durchführen: Wir betrachten die Punkte B und P auf p als Doppelpunkte einer Punkteinvolution. Dann bestimmen wir die Involution harmonischer Pole in p in Bezug auf B^2. Beide Involutionen haben ein gemeinsames Paar — G H. Nun zeichnen wir in b die Involution harmonischer Pole — J_b — in Bezug auf B^2. Den Punkt B betrachten wir als zusammenfallendes Paar von Doppelpunkten einer parabolischen Involution auf b. Dann haben die beiden letzterwähnten Involutionen in B und dem entsprechenden — B_1 — zu B in der Involution J_b ein gemeinsames Paar. Ziehen wir jetzt $B_1\,g$, B_1 H, so sind diese Geraden die gemeinsamen Sehnen zwischen B^2 und den zwei gesuchten Kegelschnitten H_g^2. Letztere schneiden a und c in Punkten, deren resp. Verbindungslinien die Doppeltangenten — $d_1\,d_2$ — von C^4 sind. Ihre Berührungspunkte liegen auf Geraden, welche wir aus P nach den resp. Berührungspunkten der zwei Kegelschnitte H_g^2 mit B^2 ziehen können.

$d_1\,d_2$ sind stets reell, weil die Geraden a und c jeden Kegelschnitt H_g^2 in B reell schneiden und folglich ein zweites Mal reell schneiden müssen. Dagegen können die Berührungspunkte dieser Doppeltangenten imaginär werden. Dies wird für den Fall, dass B_1 G, B_1 H reell sind, stets dann eintreten, wenn eine dieser Geraden oder beide den Kegelschnitt B^2 imaginär schneiden. Projiciren wir diese Schnittpunkte aus P auf die resp. Doppeltangenten, so erhalten wir in denselben conjugirt imaginäre Berührungspunkte. Sind aber B_1 G, B_1 H imaginäre Gerade mit dem reellen Scheitel B, so schneiden sie B^2 in nicht conjugirten imaginären Punkten, deren Projectionen aus P auf die Doppeltangenten ihre Berührungspunkte sind.

7.

Wir wenden uns zu den Fällen, in welchen unsere betrachtete Curve vierter Ordnung einen speciellen Charakter hat.

a) Wir nehmen an, *dass a die unendlich ferne Gerade der Ebene sei.* Construiren wir dann eine Curve C^4 aus einem Kegelschnitt B^2 mit Hülfe einer Reciprocität, deren $\varDelta = 2$ ist, so muss auf einer Geraden durch P die Bedingung $(P_c\, P_b\, P_a\, P_1) = \varDelta$ erfüllt werden. Liegt nun P_a unendlich ferne, so halbirt P_c die Strecke $P_b\, P_1$. Wir können dann die Erzeugung von C^4 dahin fassen:

Gegeben sei ein Kegelschnitt B^2, *eine Gerade c und ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel* P. *Tragen wir den Abstand der Punkte, in welchen die Strahlen dieses Büschels die Gerade c und den Kegelschnitt* B^2 *schneiden, von den Punkten in c aus je auf die entgegengesetzte Seite ab, so erhalten wir eine* C^4 *(Fig. 12).*

Diese hat im unendlich fernen Punkte von c einen doppelten Berührungsknoten. Seine Tangente — b — ist parallel c und liegt in der Mitte von P und c. P ist ein Doppelpunkt von C^4. Seine Tangenten gehen durch die Schnittpunkte von b mit B^2.

Wir haben oben gesehen, dass es unendlich viele Kegelschnitte B^2 gibt, aus denen C^4 in einer Reciprocität $(c\, B^2\, a\, 2)$ abgeleitet werden kann. Indem wir diese Bemerkung in unserem speciellen Falle berücksichtigen und mit p die Gerade bezeichnen, welche durch P geht und zu c parallel ist, sagen wir: *Sei* c_1 *und* a_1 *ein Geradenpaar, das mit b und p eine harmonische Gruppe bildet und construiren wir auf Geraden durch* P *zu den Punkten von* C^4 *— ausgenommen* P *— die vierten harmonischen in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a_1 *und* c_1, *so liegen diese vierten harmonischen auf einem Kegelschnitt* B^2_1.

Analoge Sätze erhalten wir, wenn wir für ein unendlich fernes a die Curve C^4 in den Reciprocitäten $(c\, B^2\, a\, {-1})$ und $(c\, B^2\, a\, \frac{1}{2})$ ableiten. Im ersteren Falle ist C^4 der Ort der Mittelpunkte der Strecken, welche die Strahlen durch P aus c und B^2 schneiden. Im zweiten Falle wird C^4 erhalten, wenn wir diese Strecken von den Punkten auf B^2 aus nach der entgegengesetzten Seite hin abtragen. Ist B^2 ein Kreis, so gehen die jetzt besprochenen Curven vierter Ordnung durch die imaginären Kreispunkte.

b) C^4 sei aus einem Kegelschnitt B^2 in einer Reciprocität ($c B^2 a 2$) abgeleitet. Ist wieder — wie oben — b die Tangente in B an C^4, so kann b den Kegelschnitt B^2 berühren. Dann fallen in der Geraden, welche den Berührungspunkt mit P verbindet, die zwei Tangenten in P an C^4 zusammen. P ist also eine Spitze von C^4. *Diese Curve hat mithin einen doppelten Berührungsknoten und eine Spitze.*

Specialisiren wir für diesen Fall die gegebene Construction der Doppeltangenten an C^4, so ergibt sich, dass die hierbei auftretenden Kegelschnitte H_g^2 degeneriren. Ein Theil derselben ist b; der andere besteht je aus einer der Tangenten, welche von P aus an B^2 gelegt werden können. Letztere Tangenten sind also als zwei Doppeltangenten von C^4 zu betrachten.

Liegt P auf einer Tangente, welche in einem Schnittpunkte von b mit B^2 letzteren Kegelschnitt berührt, so hat diese Tangente in P mit C^4 vier benachbarte Punkte gemein. Sie ist also eine Inflexionstangente in P an C^4.

Ist P der Pol von b in Bezug auf B^2, so sind die Geraden, welche P mit den Schnittpunkten von b und B^2 verbinden, Tangenten aus P an B^2. Jede derselben hat folglich in P mit C^4 vier benachbarte Punkte gemein d. h. sie ist Inflexionstangente in P an C^4. *Diese Curve hat mithin einen doppelten Berührungsknoten und einen doppelten Inflexionsknoten.*

P und b ist in diesem Falle Pol und Polare für alle Kegelschnitte, aus denen sich C^4 mit Hülfe einer Reciprocität ($c\,B^2\,a\,2$) ableiten lässt. Da diese Kegelschnitte sich überdies in zwei Punkten von b schneiden, so folgt, dass sie alle in diesen Punkten von den in Rede stehenden Inflexionstangenten berührt werden. Letztere sind reell, wenn P in dem Theile der Kegelschnitte B^2 liegt, für welchen alle Involutionen harmonischer Polaren hyperbolisch sind. Dann schneiden sich in P zwei reelle Aeste von C^4. Liegt aber P im anderen Theile der Kegelschnitte B^2, so ist P ein isolirter Punkt von C^4.

Nehmen wir an, dass in dem zuletzt besprochenen Fall b die unendlich ferne Gerade sei, so sind a und c zu einander parallel und P liegt in der Mitte zwischen diesen Geraden. Daraus ergibt sich folgender Satz:

Gegeben sei ein Kegelschnitt — B^2 — *und ein Paar von parallelen Geraden* — a, c — *welche von einem Punkte* P *gleichweit abstehen. Construiren wir auf den Geraden durch* P *zu den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt die vierten harmonischen in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a *und* c, *so ist der Ort dieser vierten harmonischen eine* C^4 *(Fig. 13).*

Diese hat den unendlich fernen Punkt der Geraden a zum doppelten Berührungknoten.

Ist P der Mittelpunkt des Kegelschnittes B^2, so ist er der Pol von b und also für C^4 ein doppelter Inflexionsknoten. Seine Tangenten sind die Asymptoten von B^2.

Alle Kegelschnitte B^2, aus denen die letzte C^4 in einer Reciprocität ($c\,B^2\,a\,2$) abgeleitet werden kann, haben dieselben Asymptoten, d. h. sie sind zu einander ähnlich. Wir schliessen daraus: *Seien* $a_1\,c_1$ *zwei Gerade, welche zu* a *parallel sind und von* P *gleichweit abstehen, und con-*

struiren wir auf den Geraden durch P *zu den Punkten von* C^4 — *ausgenommen* P, B — *in Bezug auf die Schnittpunkte mit* a_1 *und* c_1 *die vierten harmonischen, so liegen diese auf einem Kegelschnitt, der zum Kegelschnitt* B^2 *ähnlich ist.*

8.

Wir betrachten nun die degenerirten Formen unserer Curve vierter Ordnung.

a) Der Punkt P *liege auf einem Kegelschnitt einer Reciprocität* ($c\,B^2\,a\,\varDelta$).

Construiren wir in derselben zu den Strahlen durch P die entsprechenden Punkte, so liegt auf jeder Geraden durch P ein Punkt P_1, für welchen die Relation

$$(P_c\,P\,P_a\,P_1) = \varDelta$$

gilt. Also sind alle diese Punkte P_1 auf einer Geraden b gelegen, welche durch die Bedingung $(c\,p\,a\,b) = \varDelta$ bestimmt wird. Mithin werden die übrigen Punkte, welche in der Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$) den Geraden durch P entsprechen, auf einer Curve dritter Ordnung — C^3 — liegen. Zur näheren Untersuchung dieser Curve gehen wir auf die Regelfläche vierter Ordnung — R^4 — zurück, welche in der Reciprocität ($c\,B^2\,a\,\varDelta$) zur Curve C^4 gehört. Die Leitcurven von R^4 waren c_2, n_p und der in der Ebene $a\hat{}c_1$ liegende Kegelschnitt S^2. Liegt P auf B^2, so muss n_p den Kegelschnitt S^2 schneiden. Also besteht ein Theil von R^4 aus der Ebene, welche durch c_2 und den Schnittpunkt — D — von n_p mit S^2 geht. Der Rest dieser Fläche ist mithin eine Regelfläche dritter Ordnung — R^3. Diese wird von der Ebene der Reciprocität in C^3 geschnitten. n_p ist eine doppelte Gerade von R^3. Also ist P ein Doppelpunkt von C^3. Wir erhalten seine Tangenten, indem wir eine Gerade b_1 nach der Relation $(c\, b_1\, a\, p) = \varDelta$ construiren. b_1 schneidet B^2 in zwei Punkten. Ihre Verbindungslinien mit P sind die Tangenten in P an C^3. Auf R^3 liegt die Gerade $\overline{BD}$. Durch sie und c_2 geht eine Ebene, welche R^3 in B berührt. Diese schneidet die Ebene der Reciprocität in b. Also ist b Tangente in B an C^3.

Ziehen wir in P die Tangente t an B^2, so liegt auf ihr ein Punkt — P_1 — von C^3, welcher nach der Relation $(P_c\, P\, P_a\, P_1) = \varDelta$ bestimmt wird. Er ist somit der Schnittpunkt von b mit t. Alle Kegelschnitte B^2, aus denen sich C^3 ableiten lässt, müssen durch P gehen und in diesem Punkte t berühren. Diejenigen unter ihnen, welche zu Reciprocitäten gehören, deren $\varDelta = 2$ ist, gehen überdies durch zwei feste Punkte von b. Berührt b diese Kegelschnitte, so ist P eine Spitze von C^3. Liegt P auf der Tangente t, so fallen in B drei benachbarte Punkte von C^3 zusammen d. h. b ist in B Inflexionstangente.

Nehmen wir an, dass a die unendlich ferne Gerade sei, so erhalten wir folgende Darstellung von C^3:

Gegeben sei ein Kegelschnitt B^2 *und eine Gerade c. Ziehen wir durch einen Punkt* P *des Kegelschnittes Strahlen und construiren wir die Mitten der Strecken, welche zwischen c und dem zweiten Schnittpunkte* B *mit dem Kegelschnitt liegen oder tragen wir diese Strecken von c oder von* B *aus in entgegengesetzter Richtung ab, so erhalten wir Curven dritter Ordnung, welche in* P *einen Doppelpunkt haben.*

b) Der Punkt B^2 *liege auf einem Kegelschnitt einer Reciprocität* $(c\, B^2\, a\, \varDelta)$.

Betrachten wir dann eine der Regelflächen R^4, welche in der Reciprocität $(c\, B^2\, a\, \varDelta)$ zur Curve C^4 gehören, so schneiden sich die Leitcurven S^2 und c_2 von R^4 in B. Mithin zerfällt R^4 in die Ebene, welche durch B und n_p geht und in eine Regelfläche dritter Ordnung — R^3. Also besteht ein Theil von C^4 aus der Geraden B P und der Rest ist eine Curve dritter Ordnung. c_2 ist eine doppelte Gerade von R^3. Also ist B ein Doppelpunkt an C^3.

Schneidet die Ebene des Kegelschnittes S^2 die Gerade n_p in D, so ist $\overline{BD}$ eine Gerade von R^3.

Folglich muss die Ebene, welche durch c_2 und D geht, in B die Fläche R^3 berühren und die Ebene der Reciprocität in einer Tangente — b — von C^3 schneiden. Es ist $(c\,p\,b\,a) = \Delta$.

Die zweite Tangente im Doppelpunkte B von C^3 erhalten wir, indem wir durch c_2 und die Gerade, welche in B den Kegelschnitt S^2 berührt, eine Ebene legen. Diese tangirt R^3 in B und schneidet die Ebene der Reciprocität in der gesuchten Tangente. Bezeichnen wir dieselbe mit t_1 und sei t die Tangente, welche in B den Kegelschnitt B^2 berührt, so erhalten wir t_1 nach der Relation $(c\,t\,a\,t_1) = \Delta$.

n_p ist eine Gerade von R^3. Also ist P ein Punkt von C^3. Seine Tangente geht durch den zweiten Schnittpunkt von b mit denjenigen Kegelschnitten B^2, welche zu Reciprocitäten gehören, deren $\Delta = 2$ ist. Berührt b diese Kegelschnitte B^2, so muss $\overline{PB}$ die Curve C^3 in P und B tangiren d. h. $\overline{PB}$ ist ein Theil von C^3 und der Rest dieser Curve ist ein Kegelschnitt, der B^2 in B berührt.

c) Liegen B und P auf einem Kegelschnitt B^2, so trifft S^2 sowohl c_2 wie n_p. Also degenerirt R^4 in zwei Ebenen und eine Regelfläche zweiten Grades — R^2. Mithin zerfällt C^4 in zwei Gerade und einen Kegelschnitt C^2. Dieser geht durch B und P. Seine Tangente in B ist die Gerade t_1, welche aus der Tangente t an B^2 nach der Relation $(c\ t\ a\ t_1) = \varDelta$ gefunden wird. Benützen wir den Kegelschnitt einer Reciprocität, deren $\varDelta = 2$ ist, zur Ableitung von C^2, so geht die Tangente in P an C^2 nach dem zweiten Schnittpunkte von b mit B^2. Berührt b diesen Kegelschnitt, so enthält B P drei Punkte von C^2, ist also ein Theil dieser Curve und der Rest ist eine Gerade.

9.

Zum Schlusse geben wir einige Erläuterungen zu den in Fig. 4—13 dargestellten Formen der besprochenen Curven vierter Ordnung. Dieselben sind alle aus einem Kreise mit Hülfe einer Reciprocität $(c\,B^2\,a\,2)$ abgeleitet.

Die Fig. 4—9 sind so disponirt, dass die dargestellten Curven orthogonal symmetrisch zu p liegen. b und p müssen also zu einander senkrecht stehen und die Winkel zwischen a und c halbiren.

In Fig. 4 ist P als Doppelpunkt angenommen, in welchem sich reelle Aeste von C^4 schneiden. b muss daher den Kegelschnitt B^2 reell schneiden. Die Asymptoten von C^4 erhalten wir in folgender Weise.

Wir construiren den Kegelschnitt $H^2_{g\infty}$, welcher zu der unendlich fernen Geraden gehört. Die Richtungen von a und c sind seine Asymptotenrichtungen. Er geht durch P und hat in B die Gerade b zur Tangente. Von seinen Schnittpunkten mit B^2 sind zwei reell. Verbinden wir diese mit P, so liegen auf diesen Verbindungslinien die zwei reellen unendlich fernen Punkte von C^4. Ihre Tangenten sind die Asymptoten von C^4. Ist also U_1 einer der gemeinsamen Punkte von B^2 und $H^2_{g\infty}$, so erhalten wir die Asymptote a_1, welche P U_1 parallel ist, indem wir den Kegelschnitt H^2_g zeichnen, der in U_1 den Kegelschnitt B^2 berührt. H^2_g geht durch P, tangirt b in B und ist somit bestimmt. Mit Hülfe des Satzes von Pascal zeichnen wir den zweiten Schnittpunkt von H^2_g mit c. Durch ihn geht a_1.

In Fig. 5 ist P ein isolirter Punkt von C^4.

Die Curve C^4, welche in Fig 6 dargestellt ist, schneidet die unendlich ferne Gerade nicht reell. Zu der Construction einer Doppeltangente von C^4 bemerken wir Folgendes: Mittelst des Hülfskreises H^2 ist ein Paar — resp. ein Punkt G des Paares — gezeichnet, welches sowohl der Involution harmonischer Pole auf p in Bezug auf B^2 angehört, als auch derjenigen Involution, welche die Schnittpunkte von p mit B^2 zu Doppelpunkten hat. Dem Punkte B correspondirt in der Involution harmonischer Pole auf b in Bezug auf B^2 der unendlich ferne Punkt von b. Verbinden wir diesen mit G, so erhalten wir eine Sehne — d — welche B^2 in zwei reellen Punkten schneidet. Ihnen correspondiren zwei Punkte von C^4, in welchen die Doppeltangente d_1 diese Curve berührt. Die zweite Doppeltangente berührt C^4 in einem conjugirt imaginären Punktepaar.

Die in *Fig. 7* gezeichnete C^4 wird vom Kreise B^2 in vier bestimmten imaginären Punkten geschnitten. a und c sind als Doppelstrahlen einer Rechtwinkelinvolution angenommen. Es sind somit jene vier imaginäre Punkte als die Schnittpunkte dieser Doppelstrahlen mit B^2 definirt. Der Kegelschnitt $H^2_{g\infty}$, welcher zur Geraden g_∞ gehört, ist ein durch B und P gehender Kreis. Weil diese Punkte auf einem Durchmesser von B^2 liegen und weil $H^2_{g\infty}$ b in B berührt, so ist $H^2_{g\infty}$ ein zu B^2 concentrischer Kreis. Er schneidet B^2 in den unendlich fernen Kreis-Punkten und C^4 muss durch diese Punkte gehen. Construiren wir — wie bei Fig. 6 — die Doppeltangenten, so bemerken wir, dass eine derselben die unendlich ferne Gerade ist. C^4 berührt also die Kreispunkte ihrer Ebene.

Fig. 8 und 9 zeigen C^4, zu deren Herleitung die Dispositionen ähnlich wie in Fig. 4 und 5 sind. Nur wurden jetzt *a* und *c* als Doppelstrahlen von Rechtwinkelinvolutionen angenommen. Die Kegelschnitte $H^2_{g\infty}$ sind Kreise. Sie schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden mit den B^2 in den imaginären Kreispunkten. Also müssen auch die C^4 durch die imaginären Kreispunkte gehen.

Die Curve C^4 von Fig. 10 ist so disponirt, dass sie eine Spitze in P hat. Also berührt *b* die Kegelschnitte B^2. *a* und *c* sind als Doppelstrahlen einer Rechtwinkelinvolution angenommen. Mithin ist H^2_g ein Kreis und C^4 geht durch die imaginären Kreispunkte. B ist ein isolirter Punkt von C^4.

Dies ist auch bei der in *11* dargestellten Curve der Fall. Dieselbe hat überdies in P einen doppelten Inflexionsknoten und berührt einen Kegelschnitt B^2.

In *Fig. 12* ist die Curve C^4 construirt, welche dadurch entsteht, dass wir auf den Durchmessern eines Kreises von den Punkten einer Geraden *c* aus die Abstände bis zu den Punkten des Kreises in entgegengesetzter Richtung abtragen. Vgl. 7*a*.) C^4 ist bicircular.

In Fig. 13 ist für einen Kreis B^2 die Curve C^4 gezeichnet, welche nach dem unter 7*c*) hervorgehobenen Satze erzeugt wird. P und B sind für dieselbe isolirte Punkte.
