

parallel sind, in p bestimmten imaginären Punkten geschnitten. Projiciren wir diese aus C_2 auf g , so erhalten wir p imaginäre Punkte P'_i , welche dem imaginären Punkte P_i correspondiren.

Wir sehen aus dem Gesagten, dass unsere Collineation ($CL^n \mathcal{A}$) auch dann einen bestimmten Sinn hat, wenn L^n eine durch reelle Elemente definirte imaginäre Fläche ist. Wir unterlassen es hier, in diesem Falle auf die allgemeine Correspondenz von Gebilden näher einzutreten.

Zur Geometrie des Imaginären.

Imaginär-Projectionen.

Mit Tafel — Fig. 1.

1.

Sei i eine imaginäre Gerade erster Art mit dem reellen Punkte S . Sie werde durch eine elliptische Strahleninvolution — J — und durch einen bestimmten Sinn gegeben.*) Wir machen i zur Axe einer centrischen Collineation erster Ordnung.***) B sei die Ebene, C das Centrum und \mathcal{A} die Charakteristik dieser Collineation. Dem entsprechend bezeichnen wir sie mit dem Symbol $(C i \mathcal{A})$.

Um die Construction entsprechender Elemente der Collineation $(C i \mathcal{A})$ durchzuführen, senden wir für dieselbe eine räumliche Darstellung voraus. Wir betrachten C als Fusspunkt einer Normalen $-- c --$ zur Ebene B und be-

*) Vgl. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage. — Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie, mathematische Annalen, Bd. VIII, p. 145. — Fiedler, Darst. Geometrie, II. Aufl., p. 509 ff.

**) Vgl. meine Abhandlung über centrische und plane Collineation.

stimmen auf c zwei Punkte — $C_1 C_2$ — in der Weise, dass $CC_1 : CC_2 = \angle$ ist. i fassen wir als Spur einer imaginären Ebene — J — auf, welche zur Ebene B senkrecht steht. Sind dann xx' , yy' entsprechende Paare der Involution J , so wird J durch eine elliptische Ebeneninvolution bestimmt, deren Scheitellkante die Tafelnormale s in S ist und deren entsprechende Ebenenpaare resp. durch xx' , yy' gehen. (Fig. 1.)*)

Wir vermitteln nun die Correspondenz der Gebilde in der Ebene B in folgender Weise:

Sei q_s die Verbindungslinie von C mit S und sei P_1 ein Punkt derselben, so ziehen wir $C_1 P_1$ (Fig. 1). Diese Gerade treffe s im Punkte P . Dann trifft $C_2 P$ die Ebene B in einem Punkte P_2 , für den: $CP_1 : SP_1 = CC_1 : SP$ und $CP_2 : SP_2 = CC_2 : SP$ ist. Also folgt dass $(CSP_1 P_2) = \angle$ sein muss.

P_2 ist mithin der entsprechende zu P_1 in der Collocation ($Ci\angle$).

Indem wir in analoger Weise verfahren, um zu einem Punkte P_1 , welcher nicht in q_s liegt, den correspondirenden zu bestimmen, haben wir mit $C_1 P_1$ die imaginäre Ebene J zu schneiden. Wir erhalten hierdurch einen imaginären Punkt P_i . Die Verbindungslinie desselben mit C_2 trifft die Ebene B in einem imaginären Punkte — P_{2i} — welcher der entsprechende zu P_1 ist. Wir schliessen daher: *Einem reellen Punkte — P_1 — correspondirt in der Collocation ($Ci\angle$) im allgemeinen ein imaginärer Punkt, welcher mit P_1 auf einer reellen Geraden durch C liegt. Den reellen Punkten auf q_s entsprechen reelle Punkte.*

Sei P_{1i} ein imaginärer Punkt in der Ebene B , welcher auf einer reellen Geraden q_p durch C liegt, so er-

*) Die Darstellung ist axonometrisch.

halten wir seinen entsprechenden, indem wir $C_1 P_{1i}$ ziehen. Diese Gerade trifft J in einem imaginären Punkte P_i . $C_1 P_i$ schneidet B in einem imaginären Punkte P_{2i} , welcher P_{1i} correspondirt. Hier kann nun der Fall eintreten, dass der reelle Träger von P_i durch C_2 geht. Dann schneidet dieser B in einem reellen Punkte P_2 , welcher P_{1i} entspricht. Es wird dies immer stattfinden, wenn P_i ein imaginärer Punkt ist, welcher einem reellen in einer Collineation $(C i \frac{1}{A})$ correspondirt.

Nehmen wir an P_{1i} sei ein imaginärer Punkt, welcher nicht auf einer durch C gehenden Geraden liegt, so construiren wir seinen entsprechenden, indem wir $C_1 P_{1i}$ ziehen. Den imaginären Punkt — P_i — welchen diese Gerade aus J schneidet, verbinden wir mit C_2 . $P_i C_2$ trifft B in P_{2i} und wir sagen:

Einem imaginären Punkte correspondirt in der Collineation $(C i A)$ im Allgemeinen ein imaginärer Punkt.

Zur Construction des zuletzt erwähnten Punktes P_{2i} machen wir noch folgende Bemerkung:

Sei p_1 der reelle Träger von P_{1i} . Dann betrachten wir $C P_{1i}$ als Spur einer imaginären Ebene P_i , welche zur Ebene B senkrecht steht. P_i schneidet die Ebene J in einer imaginären Geraden erster Art. Diese liegt in einer Ebene — G — welche normal zur Ebene B ist.

G schneidet B in dem reellen Träger — g — des Punktes, in welchem die Geraden i und $C P_{1i}$ sich treffen. Die Ebene $C_1 p_1$ aber schneidet aus G den reellen Träger — p — des Punktes P_i . Legen wir durch p und C_2 eine Ebene, so trifft diese B in dem reellen Träger — p_2 — des Punktes P_{2i} . Darnach müssen sich g und p_2 im Schnittpunkte von p mit der Ebene B , d. h. in einem

Punkte — P — von p_1 treffen. Bezeichnen wir die Gerade PC mit q_p , so folgt weiter, dass $(q_p g p_1 p_2) = \mathcal{A}$ ist.

Haben wir also in der Ebene B den reellen Träger — g — des Schnittpunktes von CP_{1i} und i gezeichnet, so können wir nach der letzteren Relation p_2 bestimmen. Diese Gerade trifft CP_{1i} im Punkte P_{2i} . Wir ziehen aus diesen Constructionen einen Schluss für entsprechende Punkte P_{1i} , P_{2i} . Sei q_i eine imaginäre Gerade erster Art, welche durch C geht und in der Ebene B liegt. Sie schneidet i in einem imaginären Punkte, der sich auf einer reellen Geraden g befindet. Es ist somit jeder imaginären Geraden q_i eine reelle Gerade g zugeordnet. Drehen wir nun um einen reellen Punkt P von g eine Gerade p_1 , so schneidet jede ihrer Lagen aus q_i einen imaginären Punkt P_{1i} . Sein correspondirender liegt in q_i und auf einer reellen Geraden p_2 , welche durch P geht. Wir sagen also:

Zwei imaginäre Punkte, welche sich in der Collineation $(C i \mathcal{A})$ entsprechen, liegen auf einer imaginären Geraden — q_i — durch C . Ihre reellen Träger schneiden sich in der reellen Geraden g , welche q_i zugeordnet ist. Sie bilden mit dem Strahle nach C und mit g das Doppelverhältniss \mathcal{A} .

In der Geraden g fällt P_{1i} mit P_{2i} zusammen, d. h. der Schnittpunkt von g mit i entspricht sich selbst.

Gehen wir zu den Geraden der Ebene B über, so ergibt sich sofort:

Einer reellen Geraden — g_1 — correspondirt in der Collineation $(C i \mathcal{A})$ eine imaginäre Gerade erster Art g_{2i} . Letztere ist die Projection aus C_2 von der Linie, in welcher die Ebene $C_1 g_1$ die Ebene J schneidet. Also liegt der reelle Punkt von g_{2i} in q_s und $g_1 g_{2i}$ schneiden sich in i .

Sei g_{1i} eine imaginäre Gerade erster Art in der Ebene B . Der reelle Punkt von g_{1i} sei P_1 . Wir erhalten in der Collineation $(C i \mathcal{A})$ das entsprechende Gebilde zu g_{1i} , indem wir durch C_1 und g_{2i} die Ebene G_i legen. Diese schneidet J in einer imaginären Geraden zweiter Art — g_i . Durch diese und den reellen Punkt C_2 geht eine imaginäre Ebene. Sie trifft die Ebene B in der imaginären Geraden g_{2i} — welche g_{1i} correspondirt.

Vereinfacht wird die Bestimmung von g_{2i} , wenn der reelle Punkt — P_1 — von g_1 in q_s liegt. Dann befindet sich auch P_2 in q_s .

Tritt hier der weitere specielle Fall ein, dass g_2 durch P_2 geht, so correspondirt diese Gerade in der Collineation $(C i \mathcal{A})$ der imaginären Geraden g_{1i} . Dann ist g_{1i} die entsprechende zu einer reellen Geraden in der Collineation $(C i \frac{1}{\mathcal{A}})$. Wir fassen also das gesagte dahin:

Einer imaginären Geraden erster Art — g_{1i} — correspondirt im Allgemeinen in der Collineation $(C i \mathcal{A})$ eine imaginäre Gerade erster Art. Den imaginären Geraden aber, welche reellen Geraden in der Collineation $(C i \frac{1}{\mathcal{A}})$ entsprechen, correspondiren diese reellen Geraden in der Collineation $(C i \mathcal{A})$.

2.

In analoger Weise wie jetzt die Collineation $(C i \mathcal{A})$ können wir alle die Collineationen erster Ordnung behandeln, bei denen ein, zwei oder drei Bestimmungsstücke imaginär sind.

Sei zuerst das Centrum ein imaginärer Punkt — C_1 — so errichten wir in C_1 zur Ebene B die Normale C_1 . Diese ist eine imaginäre Gerade erster Art, deren reeller Punkt die zu B senkrechte Richtung ist.

Auf C_i nehmen wir einen Punkt $-C_{1i}$ beliebig an. Sein reeller Träger sei c_1 und schneide den reellen Träger $-c$ von C_i im Punkte C . Nun construiren wir in c_i einen Punkt C_{2i} von der Art, dass sein reeller Träger $-c_2$ durch C geht und mit $c_1 c$ durch die Relation $\frac{\text{tg } c c_1}{\text{tg } c c_2} = \mathcal{A}$ verknüpft ist. Benutzen wir dann die Punkte $C_{1i} C_{2i}$ in analoger Weise wie die Punkte $C_1 C_2$ bei der Collineation $(C i \mathcal{A})$, so vermitteln wir die eindeutige Correspondenz der Collineation $(C_i i \mathcal{A})$.

Soll aber die Axe $-s$ der Collineation reell sein, so bestimmen wir die Punkte C_{1i} , C_{2i} so, dass ihre reellen Träger $-c_1 c_2$ durch den Schnittpunkt $-C$ von s mit c gehen. s betrachten wir als Spur einer Ebene S , welche zur Ebene B senkrecht steht. Damit ist der Weg gezeigt, welcher die Correspondenz der Collineation $(C_i s \mathcal{A})$ vermittelt.

Sei zweitens die Charakteristik der Collineation imaginär — etwa gleich $\mathcal{A}_i = \frac{m i}{n}$ — so errichten wir wieder in C ein Perpendikel $-c$ zur Ebene B . Auf ihm nehmen wir einen Punkt C_2 so an, dass $C C_2 = n$ ist. Ferner bestimmen wir einen Punkt C_{1i} , für welchen $C C_{1i} = m i$ ist. C_{1i} wird also ein imaginärer Punkt sein. Wir finden ihn, indem wir C als Mittelpunkt einer elliptischen Involution in c betrachten. Sei $-m^2$ die Potenz dieser Involution, so erhalten wir ein weiteres Paar $-XX'$ nach der Relation $CX \cdot CX' = -m^2$. Die Doppelpunkte haben den Abstand $m i$ von C . Je nachdem nun \mathcal{A}_i positiv oder negativ ist, wird C_{1i} derjenige Doppelpunkt der in Rede stehenden Involution sein, welcher in der Richtung $C C_2$ oder in der Richtung $C_2 C$ liegt. Damit ist C_{1i} eindeutig defnirt und in Analogie

der Bezeichnungsweise für reelle Punkte können wir sagen:

$$\frac{CC_{1i}}{CC_2} = \mathcal{A}_i.$$

Lassen wir jetzt $C_{1i} C_2$ an Stelle von $C_1 C_2$ in der Collineation $(C i \mathcal{A})$ treten, so gelangen wir zu einer Collineation $(C i \mathcal{A}_i)$. Ersetzen wir die imaginäre Axe durch eine reelle — s — so werden wir zu einer Collineation $(C s \mathcal{A}_i)$ geführt.

Wir wenden uns zu einer *Collineation erster Ordnung, für welche Centrum und Charakteristik imaginär sind*, also zu einer Collineation $(C_1 s \mathcal{A}_i)$. Ihre Correspondenz vermitteln wir mit Hilfe der oben besprochenen Collineationen und stützen uns dabei auf folgenden allgemeinen Satz*): Sei gegeben eine centrische Collineation erster Ordnung $(C_1 s_1 \mathcal{A})$. Denken wir uns die entsprechenden Gebilde dieser Collineation von einem Centrum C_2 aus durch eine centrische Collineation $(C_2 s_2 \mathcal{A}_2)$ transformirt, so erhalten wir entsprechende Gebilde einer neuen centrischen Collineation. Diese hat \mathcal{A} zur Charakteristik; Axe und Centrum sind die Gerade s und der Punkt C , welche C_1 und s_1 in der Collineation $(C_2 s_2 \mathcal{A}_2)$ correspondiren.

Indem wir diesen Satz benutzen, gehen wir von einer Collineation $(C_1 s \mathcal{A}_i)$ aus. Auf ihrer Axe s nehmen wir einen Punkt C_2 an und ferner den reellen Punkt S einer imaginären Geraden i . Transformiren wir jetzt $(C_1 s \mathcal{A}_i)$ durch eine Collineation $(C_2 i \mathcal{A}_2)$, so erhalten wir eine neue Collineation mit der Charakteristik \mathcal{A}_i . Die Axe dieser Collineation ist die entsprechende zu s in der Collineation $(C_2 i \mathcal{A}_2)$ d. h. die Gerade s . Das Centrum ist der Punkt

*) Vgl. Nr. 8 meiner oben citirten Abhandlung über centrische und plane Collineation.

C_1 , welcher dem Punkte C_1 in der Collineation $(C_2 i \mathcal{A}_2)$ entspricht.

Geben wir nun die Collineation $(C_1 s \mathcal{A}_1)$ durch ihre Bestimmungsstücke, so nehmen wir C_2 im Schnittpunkte des reellen Trägers c von C_1 mit s an. Ferner wählen wir in c einen Punkt C_1 und in s einen Punkt S . Dann construiren wir auf c den Punkt L_i nach der Relation $(C_2 L_i C_1 C_1) = \mathcal{A}_2$, wo \mathcal{A}_2 eine beliebige Zahl ist. Die Gerade LS_i sei i . Damit sind die 3 Collineationen $(C_1 s \mathcal{A}_1)$, $(C_2 i \mathcal{A}_2)$ und $(C_1 s \mathcal{A}_1)$ festgelegt. Soll in der letzteren z. B. zur reellen Geraden g_1 die entsprechende gezeichnet werden, so construiren wir zu g_1 die correspondirende g'_{1i} in der Collineation $(C_2 i \mathcal{A}_2)$. Zu g'_{1i} bestimmen wir die entsprechende g'_{2i} in der Collineation $(C_1 s \mathcal{A}_1)$. Die correspondirende g_{2i} zu g'_{2i} endlich in der Collineation $(C_2 i \mathcal{A}_2)$ entspricht der Geraden g_1 in der Collineation $(C_1 s \mathcal{A}_1)$.

Es bleibt uns noch übrig die *centrische Collineation erster Ordnung* zu besprechen, für welche *Centrum, Axe und Charakteristik imaginär sind*, also die Collineation $(C_1 i \mathcal{A}_1)$.

Da gehen wir von einer Collineation $(C_1 i_1 \mathcal{A}_1)$ aus. Transformiren wir dieselbe in einer Collineation $(C s \mathcal{A}_1)$, so gelangen wir zu einer neuen Collineation mit der Charakteristik \mathcal{A}_1 . Centrum dieser Collineation ist der Punkt $-C_1-$ welcher dem Punkte C_1 in der Collineation $(C i \mathcal{A}_1)$ correspondirt; Axe ist diejenige imaginäre Gerade $-i-$ welche i_1 in der letzterwähnten Collineation entspricht. Also ist die gefundene Collineation $-(C_1 i \mathcal{A}_1)-$ von der gesuchten Art.

Sei die Collineation $(C_1 i \mathcal{A}_1)$ durch ihre Bestimmungsstücke gegeben, so nehmen wir eine beliebige reelle Gerade s an. Der reelle Träger $-c-$ von C_1 schneide

dieselbe in C . Dann construiren wir in c zwei Punkte $C C_1$ nach der Relation $(C S C_1 C_i) = \mathcal{A}_i$. Zu diesem Zwecke bestimmen wir in der Involution, welche den Punkt C_i definirt, zu S den entsprechenden. Diesen betrachten wir als Punkt C und errichten in ihm eine Normale zu B . Auf ihr construiren wir zwei Punkte $- C_{11} C_2 -$ nach der Relation $\frac{C C_{11}}{C C_2} = \mathcal{A}_i$. Verbinden wir nun C_{11} mit C_i , so erhalten wir eine imaginäre Gerade erster Art, deren reeller Punkt P sei. Derselbe muss auf der Verbindungslinie der Punkte liegen, welche C in den Involutionen entsprechen, die C_i und C_{11} definiren. Daraus folgt, dass P auf der Normalen durch S zur Ebene B liegt. Projiciren wir daher P aus C_2 auf c , so erhalten wir einen Punkt C_1 , welcher der Bedingung $(C S C_1 C_i) = \mathcal{A}_i$ genügt. C_1 ist also der entsprechende zu C_i in der Collineation $(C s \mathcal{A}_i)$. In derselben Collineation entspreche der imaginären Geraden i die imaginäre Gerade i_1 . Damit sind drei Collineationen festgelegt und zwar $(C_1 i_1 \mathcal{A}_i)$, $(C s \mathcal{A}_i)$ und $(C_i s \mathcal{A}_i)$.

Gebilde, welche sich in der zuletzt angeführten Collineation entsprechen, thun dies auch in der zuerst erwähnten. Vermittelt werden diese Correspondenzen durch die Collineation $(C s \mathcal{A}_i)$.

Wir haben jetzt sämtliche Collineationen erster Ordnung untersucht, bei denen ein, zwei oder drei Bestimmungsstücke imaginär sind. Nun ist aber noch der Fall denkbar, dass die *Charakteristik* einer Collineation eine complexe Zahl — sagen wir $\frac{\alpha + m_i}{n} = \mathcal{A}_c$ sei. Dieser führt uns zu den Collineationen $(C s \mathcal{A}_c)(C i \mathcal{A}_c)$; $(C_1 s \mathcal{A}_c)(C_1 i \mathcal{A}_c)$. Ihre räumlichen Darstellungen ergeben sich resp. aus denen für $(C s \mathcal{A}_i)(C i \mathcal{A}_i)$; $(C_1 s \mathcal{A}_i)(C_1 i \mathcal{A}_i)$ dadurch, dass wir die

Darstellung des Punktes C_{1i} ändern. Wir müssen nämlich diesen Punkt in der normalen Richtung zu B um die Grösse α verschieben. Eine analoge Veränderung ergibt sich auch für den Punkt C_{2i} , wenn $\Delta = \frac{\alpha + m_i}{\beta + n_i}$.

Indem wir dazu übergehen mit Hilfe der besprochenen Collineationen aus reellen Figuren der Ebene B imaginäre abzuleiten, wollen wir die für die Collineationen gegebenen räumlichen Darstellungen der Kürze halber als *Imaginärprojectionen**) bezeichnen.

Damit haben wir festgesetzt, was unter der Imaginärprojectio von $(Ci\Delta)$, $(Ci\Delta_i)$... zu verstehen ist.

Imaginäre ebene Dreiecke.

Mit Tafel — Figur 2 und 3.

Wir gehen von einer Collineation $(Cs\Delta_c)$ aus und untersuchen in derselben die Figur, welche einem reellen *Dreieck* — EFG resp. efg — entspricht. Diese hat — (vergleiche Imaginärprojectionen 2) — folgende Eigenschaften: Sie ist ein *Dreieck*, dessen *Ecken* — $E_i F_i G_i$ — imaginäre Punkte sind, welche mit EFG auf Geraden

*) Einen speciellen Fall der besprochenen Correspondenzen, welcher nach unserer Ausdrucksweise durch eine Imaginärprojectio (Csi) vermittelt wird, erwähnt Wiener in seinem Lehrbuche der darstellenden Geometrie (1884, p. 315 ff.). Dort wird der Kegelschnitt l abgeleitet, dessen Punkte den imaginären Punkten eines Kegelschnittes m entsprechen, die auf Geraden durch das Centrum einer Collineation liegen. Axe derselben ist die Polare des Centrum in Bezug auf m . Die Charakteristik ist $\pm i$. Wiener nennt den Kegelschnitt l die Imaginärprojectio von m .

— q_e, q_f, q_g — durch C liegen. Die Seiten dieses Dreiecks — e_i, f_i, g_i — sind imaginäre Gerade erster Art, deren reelle Punkte — S_e, S_f, S_g — in den Schnittpunkten von efg mit s gelegen sind.

Wir wollen dieses Dreieck als ein imaginäres Dreieck erster Art bezeichnen. C nennen wir das Centrum, s die Axe desselben.

Geben wir drei imaginäre Punkte — E_i, F_i, G_i — deren reelle Träger sich in einem Punkte C schneiden, so können wir beweisen, dass die reellen Punkte der Verbindungslinien von E_i, F_i, G_i auf einer Geraden liegen. Construiren wir nämlich die Verbindungslinien e_i, f_i der Ecken F_i, G_i und E_i, G_i , so erhalten wir 2 Strahleninvolutionen, welche perspectivisch zu einer Punkteinvolution sind, durch welche G_i dargestellt wird. Also sind die Strahleninvolutionen zueinander perspectivisch. Sie werden von q_f resp. q_e in Punkteinvolutionen geschnitten, welche gleichfalls zueinander perspectivisch sind und die Punkte F_i resp. E_i definiren. Correspondirende Paare der letzterwähnten Involutionen werden mithin durch Strahlen verbunden, welche sich in einem Punkte — S_g — schneiden. Diese bestimmen die Involution, durch welche die Gerade $\overline{E_i, F_i}$ — oder g_i — defnirt wird.

Ueberblicken wir die jetzt skizzirte Figur (Fig. 2)*), so haben wir in derselben perspectivische Dreiecke — $XX', YY' \dots$ gezeichnet — deren Ecken — $X_e, X'_e, \dots, X_f, X'_f, \dots, X_g, X'_g, \dots$ auf den Geraden q_e, q_f, q_g liegen. Die Strahlen der Involutionen, durch welche e_i, f_i, g_i defnirt werden, sind entsprechende Seiten dieser perspectivischen Dreiecke.

*) Von den Involutionen ist je ein Paar entsprechender Elemente gezeichnet.

Mithin müssen die Schnittpunkte dieser Seiten, d. h. die Punkte $S_o S_r S_g$ auf einer Geraden liegen.

Auf analoge Art können wir zeigen, dass drei imaginäre Gerade erster Art, welche eine Gerade s reell schneiden, sich in drei imaginären Punkten treffen, deren reelle Träger durch einen Punkt gehen. Also gehören diese Geraden einem imaginären Dreieck erster Art an und wir sagen:

Drei imaginäre Punkte, welche auf Geraden durch einen reellen Punkt liegen, oder drei imaginäre Gerade erster Art, welche eine reelle Gerade reell schneiden, bestimmen ein imaginäres Dreieck erster Art.

Construiren wir nun zu einem derart bestimmten imaginären Dreieck erster Art ein reelles — $E^* F^* G^*$ — dessen Ecken resp. auf $q_o q_r q_g$ liegen und dessen Seiten resp. durch $S_o S_r S_g$ gehen, so können wir beweisen, dass das imaginäre Dreieck dem reellen in einer Collineation ($C s \mathcal{A}_c^*$) entspricht.

Sei nämlich C_2 ein beliebiger Punkt auf der Geraden c , welche in C zur Ebene der Collineation senkrecht steht, so projeciren wir die Punkte $E_i F_i G_i$ aus C_2 auf S .*) Wir erhalten hierdurch in letzterer Ebene drei imaginäre Punkte — $S_{oi} S_{ri} S_{gi}$ — deren reelle Träger zur Ebene der Collineation senkrecht stehen und deren Verbindungslinien resp. durch $S_g S_o S_r$ gehen. Ziehen wir dann die resp. Geraden $E S_{oi}$, $F S_{ri}$, $G S_{gi}$, so müssen diese sich in einem Punkte — C_{2i} — von c schneiden. Denn die Involutionen, durch welche letztere Gerade defnirt werden, bilden Dreiecke — XX' , YY' ..., welche zum Dreieck EFG perspectivisch sind. Also werden die Verbin-

*) Mit S sei wie oben die Normalebene durch s zur Ebene der Collineation bezeichnet.

dungslinien entsprechender Punkte je eines dieser Dreiecke und des Dreiecks $E^*F^*G^*$ sich in einem Punkte schneiden; z. B. die Geraden, welche $E^*F^*G^*$ mit den resp. Ecken X_e, X_f, X_g des Dreiecks X verbinden, treffen sich in einem Punkte X . Diese Geraden schneiden aber c , weil sie sich in Ebenen befinden, welche resp. durch q_e, q_f, q_g gehen und zur Ebene der Collineation senkrecht stehen. Sollen also X_e, E, X_f, F, X_g, G durch einen Punkt gehen, so muss dieser auf c liegen. In analoger Weise erhalten wir in c die Punkte X', Y, Y', \dots — entsprechend den Dreiecken X', Y, Y', \dots . Mithin wird hierdurch in c eine Punkteinvolution bestimmt und diese definiert einen imaginären Punkt C_{11} . Bemerken wir noch, dass durch die Punkte C, C_{11}, C_2 ein Verhältniss: $\mathcal{A}_c^* = \frac{C C_{11}}{C C_2}$ festgesetzt wird, so lehrt uns die construirte Raunfigur, dass das Dreieck E, F, G , dem reellen Dreieck $E^*F^*G^*$ in einer Collineation ($C s \mathcal{A}_c^*$) correspondirt.

Seien L_i, M_i zwei Punkte von e_i, f_i , deren reelle Träger — lm — sich in q_g schneiden, so sind die Involutionen, durch welche diese Punkte definiert werden, resp. perspectivisch zu den Involutionen, welche e_i, f_i darstellen. Letztere Involutionen sind aber perspectivisch zur Punkteinvolution, welche G_i definiert. Also sind auch die Involutionen, welche L_i, M_i bestimmen, einander perspectivisch zugeordnet. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden sich folglich in einem Punkte S und definiren die Gerade i , welche durch L_i, M_i geht. Zugleich correspondiren sich diese Geraden in perspectivischen Dreiecken, deren andere Seiten die Involutionen bestimmen, durch welche die Geraden e_i, f_i dargestellt werden. Daraus folgt, dass S mit den Punkten S_e, S_f auf einer Geraden sich befindet, d. h. S liegt in s . Wir sagen daher:

Die Verbindungslinie irgend zweier Punkte des imaginären Dreiecks erster Art, deren reelle Träger sich auf einer der Geraden q_e, q_f, q_g schneiden, hat ihren reellen Punkt in der Axe des Dreiecks.

Ziehen wir jetzt eine Gerade n so, dass das Dreieck lmn seine Ecken resp. auf q_e, q_f, q_g hat (Fig. 2.), so ist dieses zu allen Dreiecken $XX', YY' \dots$ perspectivisch, durch deren Seiten die Involutionen für e_i, f_i, g_i bestimmt werden. Also liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten von lmn und X auf einer Geraden x , von lmn und X' auf einer Geraden x' u. s. f. Diese Geraden stellen aber — wie wir oben gesehen haben — die Verbindungslinie — i — der Punkte L_i, M_i dar. Mithin muss auch der Punkt, in welchem n die Gerade g_i schneidet, auf i liegen.

Bezeichnen wir die Seiten $l e_i, m f_i, n g_i$ als correspondirende Seiten der Dreiecke $lmn, e_i f_i g_i$, so können wir das Gesagte dahin ausdrücken:

Construiren wir zu einem imaginären Dreieck erster Art ein reelles, dessen Ecken auf den nämlichen Geraden durch C liegen, wie die Ecken des imaginären Dreiecks, so schneiden sich die correspondirenden Seiten beider Dreiecke in Punkten einer imaginären Geraden, deren reeller Punkt sich auf der Axe des imaginären Dreiecks befindet.

Gehen wir von einer Geraden i aus, welche s reell schneidet, so ergibt ein ähnlicher Gedankengang Folgendes:

Schneiden wir die Seiten eines imaginären Dreiecks erster Art mit einer imaginären Geraden, deren reeller Punkt in der Axe des imaginären Dreiecks liegt, so bilden die reellen Träger der Schnittpunkte ein Dreieck, dessen Ecken auf den Geraden gelegen sind, welche die Ecken des imaginären Dreiecks enthalten.

Gehen lmn durch C , so folgt:

Schneiden wir die Seiten eines imaginären Dreiecks erster Art resp. mit 3 Geraden durch das Centrum, so sind die Schnittpunkte Ecken eines neuen imaginären Dreiecks, welches dieselbe Axe hat wie das alte.

Wir wenden uns zu einer Collineation ($C_i s \Delta_c$). Nach dem unter 2 Gesagten correspondirt in derselben einer reellen Geraden eine imaginäre, welche die reelle in s schneidet. Entsprechende Punkte liegen auf Geraden durch C_i .

Darnach wird einem reellen Dreieck — EFG — ein imaginäres entsprechen, dessen Seiten — $e_i f_i g_i$ — sich mit efg in s schneiden. Mithin ist dieses Dreieck ein imaginäres Dreieck erster Art. Seine Ecken liegen auf reellen Geraden — $q_e q_f q_g$ — durch einen Punkt C . Ueberdies sind diese Ecken — als correspondirende Punkte zu EFG — auf Geraden durch C_i gelegen.

Zeichnen wir ein reelles Dreieck — $E^*F^*G^*$ — (Fig. 3), dessen Seiten durch die reellen Punkte — $S_e S_f S_g$ — des zuletzt gefundenen imaginären Dreiecks gehen, so liegt $E^*F^*G^*$ zu allen Dreiecken — $XX', YY' \dots$ — perspectivisch, durch welche die Seiten des imaginären Dreiecks defnirt werden. Folglich schneiden sich die Geraden, welche $E^*F^*G^*$ und die resp. Ecken von X verbinden, in einem Punkte X u. s. f. Wir erhalten auf diese Weise eine Reihe von Punkten — $XX', YY' \dots$ —. Diese liegen in einer Geraden, welche durch C geht. Seien nämlich $X_e X'_e, Y_e Y'_e \dots$ und $X_f X'_f, Y_f Y'_f \dots$ die Ecken der Dreiecke $XX', YY' \dots$, welche auf q_e, q_f liegen, so bilden diese Punkte zueinander perspectivische Reihen. Projiciren wir die erste dieser Reihen aus E , die zweite aus F , so erhalten wir zwei zu einander perspectivische Büschel. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen somit auf

einer Geraden. Diese geht durch C , weil C den Reihen $X_s X'_s \dots$ und $X_r X'_r$ als sich entsprechender Punkt angehört. Bemerken wir noch, dass diese Schnittpunkte nichts anderes sind, als die oben erwähnten Punkte XX' , YY' ..., so ist die aufgestellte Behauptung, dass sie in einer Geraden durch C liegen, erwiesen. Sie sind in derselben Weise einander zugeordnet wie die Dreiecke XX' ..., bestimmen also eine Involution und definieren einen imaginären Punkt C_i .

Indem wir die Punkte $E^* E_i$, $F^* F_i$, $G^* G_i$ als correspondirende bezeichnen, können wir das Bewiesene dahin aussprechen:

Construiren wir ein reelles Dreieck, dessen Seiten durch die reellen Punkte eines imaginären Dreiecks erster Art gehen, so liegen die correspondirenden Ecken beider Dreiecke auf Geraden durch einen imaginären Punkt. Sein reeller Träger geht durch das Centrum des imaginären Dreiecks.

Wir heben schliesslich *einige specielle Fälle des imaginären Dreiecks erster Art* hervor.

Gehen wir von einer Collineation (CsA_i) aus, so entspricht in derselben einem reellen Dreieck ein imaginäres Dreieck erster Art. Dasselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass in den Involutionen, durch welche die Ecken $E_i F_i G_i$ defnirt werden, dem Punkte C die resp. Schnittpunkte der Träger mit s entsprechen. Wir wollen dies kurz so ausdrücken: *Das Centrum des Dreiecks entspricht der Axe.*

Geben wir eine Collineation (CiA), so correspondirt in derselben ebenfalls einem reellen Dreieck ein imaginäres Dreieck erster Art. Die reellen Punkte seiner Seiten liegen auf der Geraden, welche C mit dem reellen Punkte von i verbindet. Das auf diesem Wege erhaltene imagi-

näre Dreieck ist also dadurch ausgezeichnet, *dass sein Centrum in seiner Axe liegt.*

Ein imaginäres Dreieck erster Art von derselben speciellen Form wie die zuletzt erwähnte erhalten wir als die entsprechende Figur zu einem reellen Dreieck in der Collocation $C_i i A$. Die Ecken dieses imaginären Dreiecks liegen auf Geraden, welche durch den Schnittpunkt — C — von s mit dem reellen Träger des Punktes C_i gehen.

Den jetzt betrachteten imaginären Dreiecken stehen solche gegenüber, welche durch Imaginärprojection aus zwei reellen und einer imaginären Geraden abgeleitet werden können. Die reellen Punkte der Seiten dieser Dreiecke liegen nicht in einer Geraden. Wir können dieselben als imaginäre Dreiecke zweiter Stufe bezeichnen.

Wenden wir das nämliche Verfahren der Imaginärprojection auf Polygone an, so gelangen wir zu imaginären Polygonen der ersten und zweiten Stufe. Die ersteren sind Bilder von reellen Polygonen und ihre Ecken liegen auf reellen Geraden durch einen Punkt. Ihre Seiten schneiden eine Gerade reell.

Ueber die Schnittpunkte einer imaginären Geraden erster Art mit einem Kegelschnitte und über die Correspondenz imaginärer Elemente im ebenen Polarsystem.

Mit Tafel — Fig. 4.

1.

Eine imaginäre Gerade erster Art — g_i — sei durch eine elliptische Strahleninvolution — J — und einen be-

stimmten Sinn gegeben. S sei der reelle Punkt dieser Geraden. xx_1, yy_1 seien correspondirende Strahlenpaare der Involution J . In ihrer Ebene liege ein Kegelschnitt K^2 .

Wir fragen nach den Punkten, in denen g_i den Kegelschnitt K^2 schneidet.

Zur Beantwortung dieser Frage construiren wir zu den Punkten $A B \dots$ der Geraden x die Polaren in Bezug auf K^2 . Sie bilden ein Büschel, das zur Reihe der Punkte in x projectivisch ist. Mithin schneidet dasselbe aus x_1 eine Reihe von Punkten — $A_1 B_1 \dots$ — welche projectivisch zur Reihe $A B$ ist. Die Verbindungslinie entsprechender Punkte dieser Reihen umhüllen also einen Kegelschnitt — K_x^2 . Derselbe ist dadurch charakterisirt, dass jede seiner reellen Tangenten aus xx_1 zwei Punkte schneidet, welche in Bezug auf K^2 ein Paar der Involution harmonischer Pole bilden.

Zu den nämlichen projectivischen Reihen auf x und x_1 und mithin zu dem nämlichen Kegelschnitt K_x^2 gelangen wir, indem wir zu den Punkten von x_1 die Polaren in Bezug auf K^2 zeichnen und diese mit x schneiden.

Construiren wir jetzt zu den Punkten von y — resp. y_1 — die Polaren in Bezug auf K^2 und schneiden wir diese mit y_1 — resp. y — so erhalten wir projectivische Reihen in y und y_1 . Die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte umhüllen einen Kegelschnitt K_y^2 . Seine reellen Tangenten schneiden aus yy_1 Paare der Involution harmonischer Pole in Bezug auf K^2 .

Ist t_1 eine gemeinsame reelle Tangente von K_x^2 und K_y^2 , so trifft sie sowohl xx_1 als yy_1 in Paaren der Involution harmonischer Pole in Bezug auf K^2 . Da eine Involution durch 2 Paare bestimmt ist, so folgt, dass t_1 die imaginäre Gerade g_i in einem imaginären Punkte

— P_{11} — von K^2 schneidet. In analoger Weise wie zu xx_1, yy_1 können wir zu jedem weiteren Paare der Involution J einen Kegelschnitt construiren. Eine reelle gemeinsame Tangente von irgend zwei solchen Kegelschnitten trifft die zu diesen gehörenden Paare der Involution J in Punktepaaren der Involution harmonischer Pole in Bezug auf K^2 . Also schneidet diese Tangente auch alle übrigen Paare der Involution J in Paaren der Involution harmonischer Pole d. h. sie berührt alle übrigen Kegelschnitte $K_x^2 K_y^2$. Daraus folgt, dass diese Kegelschnitte die nämlichen reellen Tangenten besitzen.

Unter den Kegelschnitten $K_x^2 K_y^2 \dots$ heben wir einen hervor, welcher degenerirt. Wir gelangen zu demselben, indem wir das gemeinsame Paar — gg_1 — zwischen der Involution J und der Involution harmonischer Polaren — J_p — um S in Bezug auf K^2 construiren. Dieses gemeinsame Paar ist stets reell, weil die Involution J elliptisch ist. Zeichnen wir zu ihm den zugehörigen Kegelschnitt — K_g^2 — so bemerken wir, dass er in 2 Punkte zerfällt. Es sind dies die Punkte $G G_1$, in denen die Polare — s — von S in Bezug auf K^2 die Geraden $g_1 g$ trifft. Nach dem oben Bewiesenen schneiden die reellen Tangenten, welche wir aus $G_1 G$ an die Kegelschnitte $K_x^2 K_y^2 \dots$ ziehen können, die Gerade g_i in imaginären Punkten von K^2 .

Um die Lage dieser Tangenten genauer zu bestimmen, wenden wir uns eingehender zur Construction eines der Kegelschnitte $K_x^2 K_y^2 \dots$, sagen wir von K_x^2 (Fig. 4). Da sehen wir, dass in den Projectivitäten $A B \dots A_1 B_1 \dots$ auf xx_1 dem Punkte S die Schnittpunkte — XX_1 — von s mit xx_1 entsprechen. Folglich berühren die Geraden xx_1 in den Punkten XX_1 den Kegelschnitt K_x^2 und s ist die Polare von S in Bezug auf K_x^2 .

Nach Voraussetzung ist die Involution J elliptisch. Folglich trennen sich die Paare xx_1, gg_1 , also auch die Punkte XX_1 und GG_1 . Daraus ergibt sich, dass von den Punkten GG_1 der eine im Innern des Kegelschnittes K_x^2 liegt, der andere ausserhalb. Daher gehen nur von einem dieser Punkte reelle Tangenten an K_x^2 . Weil S und s Pol und Polare von K_x^2 sind, so werden diese Tangenten durch den Strahl aus ihrem Schnittpunkte nach S und durch s harmonisch getrennt.

Wir fassen das Gesagte dahin zusammen:

Eine imaginäre Gerade erster Art trifft einen Kegelschnitt — K^2 — in zwei imaginären Punkten. Der Schnittpunkt ihrer reellen Träger liegt in der Polare — s — des reellen Punktes S der imaginären Geraden in Bezug auf K^2 . Weiter liegt er in einem Strahle des gemeinsamen Paares der Involution, welche die imaginäre Gerade definiert und der Involution harmonischer Polaren um S in Bezug auf K^2 . Die reellen Träger selbst bilden mit jenem Strahle des gemeinsamen Paares und mit s eine harmonische Gruppe.

Ein Gedankengang, welcher dem bis jetzt eingeschlagenen dual gegenüber steht, zeigt uns die Construction der Tangenten, welche aus einem imaginären Punkte an einen Kegelschnitt gelegt werden können.

Nehmen wir nun an, der reelle Punkt von g_i liege auf K^2 , so sind die Reihen $AB\dots A_1B_1\dots$ auf x und x_1 zueinander perspectivisch. Daraus folgt, dass der Kegelschnitt K_x^2 in S und das Perspectiveentrum — S_x — der erwähnten Reihen zerfällt. In analoger Weise degeneriren alle weiteren Kegelschnitte $K_y^2\dots$ in S und je einen Punkt $S_y\dots$. Diese Punkte liegen in einer Geraden und repräsentiren eine reelle gemeinsame Tangente aller Kegelschnitte $K_x^2 K_y^2\dots$. Sie schneidet somit g_i in einem Punkte

von K^2 . Wir führen diese Construction auf eine bekannte Construction des Schnittpunktes von g_i mit K^2 zurück, indem wir in den zweiten Schnittpunkten von $xx_1 yy_1 \dots$ mit K^2 die Tangenten zeichnen. Diese treffen sich resp. in den Punkten $S_x S_y \dots$ einer Geraden, auf welcher der gesuchte Schnittpunkt liegt.

Der duale Gedankengang zeigt uns, wie wir aus einem imaginären Punkte, der auf einer reellen Tangente von K^2 liegt, an letzteren Kegelschnitt die zweite Tangente construiren.

Zum Schlusse bemerken wir, dass die Gerade, welche zu g_i conjugirt ist, den Kegelschnitt K^2 in zwei imaginären Punkten trifft, die zu den Schnittpunkten von g_i mit K^2 conjugirt sind.

2.

Indem wir die Bezeichnung von 1 beibehalten, nehmen wir an, dass durch G die reellen Tangenten $t_1 t_2$ an K_x^2 gehen (Fig. 4), auf welchen die imaginären Schnittpunkte $P_{1i} P_{2i}$ von g_i mit K^2 liegen. In letzteren wollen wir jetzt die Tangenten an K^2 construiren. Diese sind imaginäre Gerade erster Art $t_{1i} t_{2i}$ welche die Pole $T_1 T_2$ der reellen Geraden $t_1 t_2$ in Bezug auf K^2 zu reellen Punkten haben. Mithin liegen $T_1 T_2$ auf der Polaren von G in Bezug auf K^2 d. h. auf der Geraden g . Sie werden durch S und G_1 harmonisch getrennt, weil $t_1 t_2$ mit s und g_1 eine harmonische Gruppe bildet. Desgleichen sind die Punkte der Involutionen, welche P_{1i} und P_{2i} definiren, durch S und s harmonisch getrennt. Verbinden wir T_1 mit den Punkten der Involution von P_{1i} und T_2 mit den Punkten der Involution von P_{2i} , so werden die Geraden nach Punkten, welche auf Linien durch S liegen, sich in s schneiden. Unter diesen Ge-

raden bestimmen diejenigen durch T_1 die Involution, welche t_{1i} definiert, und diejenigen durch T_2 die Involution, welche t_{2i} darstellt. Die erwähnten Schnittpunkte in s bestimmen somit eine Involution, welche den Schnittpunkt $-G_i-$ von t_{1i} und t_{2i} definiert.

Ein Paar der letzteren Involution ist $G G_i$. Ein zweites Paar erhalten wir, indem wir die Schnittpunkte $-T_x T_{x_1}-$ von t_1 und $x x_1$ mit T_1 verbinden. Diese Verbindungslinien schneiden aus s das gesuchte Paar $S_{x_1} S_x$. Wir bemerken zu demselben, dass die Polare von T_x in Bezug auf K^2 durch die Punkte T_{x_1} und T_1 geht. (Fig. 4.) Folglich ist der Pol von $\overline{T_x S}$ d. h. von x im Schnittpunkte von $T_1 T_x$ mit s d. h. in S_x gelegen. T_{x_1} hat zu Polaren in Bezug auf K^2 die Gerade $\overline{T_x T_1}$. Also liegt der Pol von x_1 im Schnittpunkte von $\overline{T_1 T_x}$ mit s d. h. in S_{x_1} .

In analoger Weise können wir zeigen, dass die Pole je eines Paares der Involution J in Bezug auf K^2 ein Paar derjenigen Involution darstellen, welche G_i definiert. Nennen wir G_i den Pol von g_i , so schliessen wir also:

Der Pol einer imaginären Geraden erster Art in Bezug auf einen Kegelschnitt K^2 ist ein imaginärer Punkt. Sein reeller Träger ist die Polare des reellen Punktes der imaginären Geraden. Er wird durch eine Involution definiert, deren entsprechende Paare die Pole entsprechender Paare der Involution sind, welche die imaginäre Gerade bestimmt.

Tritt an Stelle von g_i die conjugirt imaginäre Gerade g_i^* , so sehen wir aus der Construction des Poles von g_i^* , dass dieser zu dem Pole von g_i zugeordnet ist.

Die Schlüsse, welche den jetzt gezogenen dual gegenüberstehen, lehren uns, wie wir zu einem imaginären Punkte $-G_i-$ die Polare construiren. Ihr reeller Punkt ist

der Pol des reellen Trägers von G_i in Bezug auf K^2 . Die entsprechenden Paare ihrer Involution sind die Polaren der entsprechenden Punkte derjenigen Involution, durch welche G_i definiert wird.

Aus dieser Beziehung von Pol und Polare ergeben sich noch leicht folgende Konsequenzen:

1) Zeichnen wir zu g_i den Pol G_i und sei g_{1i} die Gerade, welche G_i mit dem reellen Punkte S von g_i verbindet, so liegt der Pol G_{1i} von g_{1i} im Schnittpunkte von g_i mit s . Ist P_i irgend ein imaginärer Punkt, der auf g_i sich befindet, so geht die Polare p_i von P_i durch G_i . Es besteht also zwischen den imaginären Geraden durch S in Bezug auf K^2 dieselbe involutorische Zuordnung wie zwischen den reellen Geraden. Wir wollen diese als die *Involution der imaginären harmonischen Polaren um S* in Bezug auf K^2 bezeichnen.

Ist die Involution der reellen harmonischen Polaren um S elliptisch, so definiert sie die imaginären Tangenten durch S an K^2 . Diese sind imaginäre Gerade durch S , welche ihre Pole enthalten.

Wir können sie daher als die Doppelstrahlen der Involution imaginärer harmonischer Polaren um S betrachten. Letztere Involution hat keine Doppelstrahlen, wenn die Involution der reellen harmonischen Polaren um S hyperbolisch ist.

Das duale gilt für die Involution harmonischer Pole auf einer reellen Geraden. Die Involution besteht aus einer Involution reeller Punkte und aus einer Involution imaginärer Punkte. Letztere hat Doppelpunkte, wenn erstere keine besitzt.

2) Sei X_i ein imaginärer Punkt auf x . Seine Polare in Bezug auf K^2 ist eine imaginäre Gerade — x_i — deren

reeller Punkt — S_x — der Pol von x in Bezug auf K^2 ist. Zum imaginären Punkte Y_i auf y gehöre als Polare die imaginäre Gerade y_i mit dem reellen Punkte S_y . Construiren wir die Verbindungslinie $X_i Y_i$ — sagen wir z_i — so ist ihr Pol — Z_i — im Schnittpunkte von x_i mit y_i gelegen. Der reelle Träger z von Z_i ist der Pol des reellen Trägers — S_z — von z_i . Wir bemerken nun, dass die Dreiecke xyz und $S_x S_y S_z$ in Bezug auf K^2 zu einander reciprok liegen. Also sind sie zu einander perspectivisch.

3) Die Punkte einer imaginären Geraden haben in Bezug auf K^2 Polaren, welche durch einen imaginären Punkt — den Pol der imaginären Geraden — gehen. Schneiden sich die reellen Träger der imaginären Punkte in einem Punkte, so liegen die reellen Punkte der Polaren auf einer Geraden u. s. f.

Zum Schlusse erwähnen wir, dass die durchgeführten Ueberlegungen allgemeiner erscheinen, wenn wir an Stelle von K^2 die reciproken in einander liegenden Ebenen setzen, deren Abhängigkeit durch K^2 geleitet wird. Dann ist durch Vorstehendes die Correspondenz imaginärer Elemente in solchen Ebenen erledigt.

Der Kegel zweiten Grades mit imaginärer Spitze.

1.

L_1^2 sei ein reeller Kegelschnitt in der Ebene L_1 . C_i sei ein imaginärer Punkt auf der reellen Geraden c . Derselbe werde durch eine elliptische Involution — J_c — und einen bestimmten Sinn gegeben. Die Geraden, welche

durch C_i und die Punkte von L_1^2 gehen, fassen wir als Erzeugende eines Kegels — K_i^2 — auf.

Legen wir durch c ein Ebenenbündel, so schneidet dieses die Ebene L_1 in einem Strahlenbündel, dessen Scheitel — C_i — im Schnitte von c mit L_1 gelegen ist.

Wir nehmen nun *zuerst* an, dass von C_i aus reelle Tangenten an den Kegelschnitt L_1^2 gehen.

Dann gibt es Gerade — ϱ_1 — durch C_i , welche L_1^2 in imaginären Punkten treffen. Ihre Verbindungslinien mit C_i liegen in den durch c gehenden Ebenen, sind also imaginäre Gerade erster Art. Wir können beweisen, dass ihre reellen Punkte auf einem Kegelschnitt — L_2^2 — liegen.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir in der Involution J_c zu C_i den correspondirenden Punkt C_2 und ein Punktepaar — $X_1 X_2$ — welches mit $C_1 C_2$ eine harmonische Gruppe bildet. Dann zeichnen wir auf den Geraden ϱ_1 die Punkte C_p , welche C_i in den Involutionsen harmonischer Pole in Bezug auf L_1^2 entsprechen. Diese Punkte liegen in der Polaren p von C_i . Weiter bestimmen wir in den erwähnten Involutionsen die Punktepaare $P_1 P_2$, welche mit C_i und C_p harmonische Gruppen bilden. Bekanntlich ist der Ort dieser Punkte ein Kegelschnitt — L_{1c}^2 — welcher zu dem Kegelschnitt L_1^2 in Bezug auf C_i conjugirt ist. *)

Wenden wir uns jetzt zu den in einer Geraden ϱ_1 liegenden Punktepaaren $C_1 C_p$, $X_1 X_2$; so bestimmen diese eine Involution, welche zwei conjugirt imaginäre Punkte — $R_{1i} R_{1i}^*$ — von L_1^2 definirt. Von diesen Punkten sei R_{1i} dadurch festgesetzt, dass die drei Geraden $C_2 C_p$, $X_1 P_1$ und $X_2 P_2$ sich in dem reellen Punkte — R_2 — der Ge-

*) Vergl. Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1884. I. Bd., p. 315.

raden $C_i R_{1i}$ schneiden. Dann müssen sich $C_2 C_p$, $X_1 P_2$ und $X_2 P_1$ in dem reellen Punkte — R_2^* — von $C_i R_{1i}^*$ treffen. Indem wir auf diese Weise zu allen Geraden durch C_i und die reellen Punkte von L_1^2 die reellen Punkte R_2 bestimmen, bemerken wir, dass letztere auf Geraden durch C_2 in der Ebene C_{2p} — sagen wir L_2 — liegen. Ferner befinden sich diese Punkte R_2 auf Kegeln, welche wir aus X_1 und X_2 über der Leitcurve L_c^2 errichten können. Daraus folgt, dass sich diese Kegel — ausser in L_1^2 — noch in einem Kegelschnitt L_2^2 durchdringen. Er ist der Ort der Punkte R_2 und liegt in L_2 . Er trifft L_1^2 in den Schnittpunkten dieses Kegelschnittes mit p und der Pol dieser Linie ist C_2 . Daraus folgt, dass C_2 ausserhalb L_2^2 liegt, wenn C_1 sich ausserhalb L_1^2 befindet. Es gehen daher in diesem Falle durch C_2 in der Ebene L_2 reelle Gerade — ϱ_2 — welche den Kegelschnitt L_2^2 in imaginären Punkten — R_{2i} R_{2i}^* — schneiden. Verbinden wir diese Punkte mit C_i , so erhalten wir imaginäre Gerade erster Art. Wir zeigen, dass ihre reellen Punkte in L_1^2 liegen, d. h. dass diese Gerade Erzeugende des Kegels K_i^2 sind.

Um diesen Beweis zu führen, construiren wir — wie oben — in c die Gruppe $(C_1 C_2 X_1 X_2) = -1$. Dann zeichnen wir auf den Geraden ϱ_2 in den Involutionsen harmonischer Pole in Bezug auf L_2^2 die Punkte C_p , welche C_2 correspondiren und die Punkte $P_1 P_2$, welche mit C_i und dem resp. C_p eine harmonische Gruppe bilden. Nun liegen die Punkte C_p auf p , die Punkte $P_1 P_2$ auf dem zu L_2^2 in Bezug auf C_2 conjugirten Kegelschnitt L_{2c}^2 . Also sind die reellen Punkte der Geraden $C_i R_{2i}$ in der Ebene L_1 und in den Kegeln gelegen, welche L_{2c}^2 aus X_1 und X_2 projiciren. Folglich durchdringen sich letztere Kegel — ausser in L_{2c}^2 — noch in einem Kegelschnitt, der in L_1

liegt. Dieser ist die Projection von L_{2c}^2 aus einem der Punkte $X_1 X_2$ auf L_1 . Oben haben wir gesehen, dass L_{2c}^2 die Projection von L_{1c}^2 aus einem der Punkte $X_1 X_2$ auf L_2 war. Mithin muss der gesuchte Kegelschnitt in L_1 zu L_{1c}^2 in Bezug auf C_1 conjugirt sein, d. h. mit L_1^2 zusammenfallen.

Das jetzt Bewiesene können wir auch so ausdrücken: In jeder Ebene durch c , welche L_2^2 in zwei imaginären Punkten schneidet, liegen zwei reelle Punkte von L_1^2 . Weil aber L_2^2 die Projection des zu L_1^2 conjugirten Kegelschnittes L_{1c}^2 aus einem Punkte von c ist, so folgt, dass alle Ebenen, welche L_1^2 reell schneiden, den Kegelschnitt L_2^2 imaginär treffen. Indem wir von letzteren ausgehen, erhalten wir daher auf die angegebene Weise sämtliche reelle Punkte von L_1^2 . Wir können also die bewiesene Abhängigkeit der Punkte $R_{21} R_1$ umkehren und sagen: Die Erzeugenden des Kegels K_1^2 , deren reelle Punkte in L_1^2 liegen, schneiden L_2 in imaginären Punkten von L_2^2 , welche paarweise auf Geraden durch C_2 sich befinden.

Auf den Geraden ϱ_1 wird durch die Involutionen harmonischer Pole in Bezug auf L_1^2 ein Polarsystem bestimmt, welches L_1^2 zur Leitcurve hat. Auf den Geraden ϱ_2 bestimmen die Involutionen harmonischer Pole in Bezug auf L_2^2 ein Polarsystem, dessen Leitcurve dieser Kegelschnitt ist. Wir haben gezeigt, dass in dem Falle, in welchem C_1 in Bezug auf L_1^2 ein hyperbolischer Punkt ist, diese Involutionen die resp. Projectionen der Curven $L_1^2 L_2^2$ aus C_1 auf $L_2 L_1$ sind. Also müssen auch die erwähnten Polarsysteme gegenseitige Projectionen aus C_1 sein.

Wir wenden uns *zweitens* zu der Annahme, dass C_1 im Inneren des reellen Kegelschnittes L_1^2 liege.

Dann schneidet jede Gerade durch C_1 diesen Kegel-

schnitt in zwei reellen Punkten. Durch sie und C_1 legen wir die Erzeugenden des Kegels K_i^2 und schneiden diese mit einer Ebene L_2 , welche durch C_2 und die Polare p von C_1 in Bezug auf L_1^2 geht.

Ist also $R_1 R_1^*$ ein Punktepaar von L_1^2 , welches auf einer Geraden ϱ_1 durch C_1 liegt, so wird dieses durch C_1 und den Schnittpunkt $-C_p-$ von ϱ_1 mit p harmonisch getrennt. Indem wir nun die Geraden $R_1 C_1$ und $R_1^* C_1$ construiren, haben wir die Punkte $R_1 R_1^*$ mit den Punkten $C_1 C_2 X_1 X_2$ zu verbinden. Weil letztere und die Punkte $C_1 C_p R_1 R_1^*$ harmonische Gruppen bilden, so müssen sich $R_1 X_1$, $R_1^* X_2$ in einem Punkte Y_1 von $C_2 C_p$ — sagen wir von ϱ_2 — schneiden. Und $R_1 X_2$, $R_1^* X_1$ treffen sich in einem Punkte Y_2 von ϱ_2 . $Y_1 Y_2$ bilden mit C_2 und C_p eine harmonische Gruppe und diese Punkte sind resp. Paare der Involutionen, welche die Schnittpunkte $-R_{21} R_{21}^*$ — von $C_1 R_1$ und $C_1 R_1^*$ mit L_2 definiren. Folglich sind diese Schnittpunkte zu einander conjugirt imaginär.

Indem wir die dargestellte Construction in allen Ebenen, welche durch c gehen, durchführen, erhalten wir auf jeder reellen Geraden ϱ_2 durch C_2 in L_2 zwei conjugirt imaginäre Punkte.

Die Paare $Y_1 Y_2$ der Involutionen, welche diese Punkte darstellen, liegen in den projicirenden Kegeln aus X_1 und X_2 über L_1^2 . Folglich durchdringen sich diese Kegel — ausser in L_1^2 — in einem in L_2 gelegenen Kegelschnitt L_{2c}^2 . Seine Punkte werden durch C_2 und p harmonisch getrennt. Also sind sie mit C_2 und C_p Paare von Involutionen, welche imaginäre Doppelpunkte eines Polarsystems definiren. Dieses hat zur Leitcurve einen Kegelschnitt $-L_2^2-$ welcher zu L_{2c}^2 in Bezug auf C_2 conjugirt ist und welcher imaginär sein muss.

Wir sehen aus dem Bewiesenen, dass auch in dem Falle, in welchem C_i in Bezug auf L_1^2 elliptisch ist, die Projectionen der reellen Punkte von L_1^2 aus C_i auf L_2 imaginäre Punkte sind, welche ein Polarsystem bestimmen und wir schliessen — wie oben — dass dieses Polarsystem die Projection des durch L_1^2 geleiteten aus C_i ist.

In analoger Weise lässt sich darthun, dass ein Polarsystem, welches den imaginären Kegelschnitt L_2^2 zur Leitcurve hat, aus C_i auf L_1 als ein Polarsystem projicirt wird, dessen Leitcurve L_1^2 ist. Anstatt nun — wie dies oben geschehen ist — aus L_1^2 den imaginären Kegelschnitt L_2^2 abzuleiten, können wir von einem imaginären Kegelschnitt L_2^2 ausgehen. Dann ergibt uns der zuletzt ange-deutete Beweis, dass die Projection dieses Kegelschnittes aus C_i ein reeller Kegelschnitt L_1^2 ist. Wir sehen also, dass in allen besprochenen Fällen die Kegelschnitte $L_1^2 L_2^2$ — wir wollen sie Leitcurven von K_i^2 nennen — in Bezug auf K_i^2 die nämliche Bedeutung haben, welche wir dahin präcisiren können:

Hat ein Kegel eine imaginäre Spitze und eine reelle Curve zweiter Ordnung zur Leitcurve, so besitzt derselbe eine zweite reelle Leitcurve zweiter Ordnung, wenn der reelle Träger der Spitze die Ebene der ersten Leitcurve in einem Punkte schneidet, welcher in Bezug auf diese hyperbolisch ist. Wird dieser Punkt elliptisch, so hat der Kegel eine zweite imaginäre Leitcurve zweiter Ordnung. Jede Erzeugende des Kegels schneidet die Ebenen beider Leitcurven in Doppelpunkten der Polarsysteme, welche durch diese Leitcurven bestimmt werden.

Der Kürze halber wollen wir den Kegel mit imaginärer Spitze, dessen beide Leitcurven reell sind, einen *hyperbolisch imaginären Kegel* nennen. Der Kegel K_i^2 ,

für welchen eine Leitcurve reell und eine imaginär ist, sei als *elliptisch imaginärer Kegel* bezeichnet. Als Grenzfall dieser beiden Kegel können wir den *parabolisch imaginären Kegel* betrachten. Bei ihm schneidet der reelle Träger — c — der Spitze eine Leitcurve. Im Schnittpunkte wird diese von der Ebene der anderen Leitcurve berührt, welche in die doppelt zu zählende Gerade c zerfällt.

2.

Gegeben sei eine reelle Gerade g , welche zu c windschief ist. Wir suchen ihre Schnittpunkte mit dem Kegel K_i^2 . Zu diesem Zwecke legen wir durch g und die Spitze C_i von K_i^2 eine Ebene. Sie schneidet die Ebene einer Leitcurve — sagen wir L_1 — in einer imaginären Geraden erster Art — g_{1i} . Eine solche trifft den Kegelschnitt L_1^2 im Allgemeinen in zwei nicht zu einander conjugirten imaginären Punkten.*) Indem wir jeden derselben mit C_i verbinden, erhalten wir zwei imaginäre Gerade erster Art, welche Erzeugende des Kegels K_i^2 sind und g in den gesuchten Punkten schneiden. Aus ihrer Construction folgt, dass sie nicht zu einander conjugirt imaginär sind.

Schneidet g die Gerade c , so trifft die Ebene gc eine der Leitcurven von K_i^2 in zwei reellen Punkten. Ihre Projectionen aus C_i auf g sind zwei nicht conjugirte imaginäre Punkte von K_i^2 . Wir können also das Bewiesene dahin zusammenfassen:

Eine reelle Gerade schneidet im Allgemeinen K_i^2 in zwei nicht conjugirten imaginären Punkten.

*) Vgl. Ueber die Schnittpunkte einer imaginären Geraden erster Art mit einem Kegelschnitt. Nr. 1.

Eine *erste Ausnahme* von dieser Regel machen — wie wir unter 1 gezeigt — die Geraden in L_1 und L_2 . Sie schneiden K_i^2 entweder in reellen oder conjugirt imaginären Punkten oder sie berühren K_i^2 reell.

Eine *zweite Ausnahme* bilden die Geraden, welche eine der beiden Leitcurven — sagen wir L_1^2 in S_1 — reell schneiden. Sind diese Geraden zu g windschief, so ist S_1 der reelle Punkt von g_{1i} . Letztere Gerade trifft L_1^2 in einem zweiten — imaginären — Punkte. Projiciren wir diesen aus C_i auf g , so erhalten wir den zweiten — imaginären — Schnittpunkt von g mit K_i^2 . Schneiden wir dann die Ebene L_2 mit der Ebene, welche durch g und C_i geht, so ist die Schnittlinie eine imaginäre Gerade g_{2i} , deren einer Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt L_2^2 auf der Geraden $S_1 C_i$ liegen muss. Daraus folgt, dass dieser Schnittpunkt ein imaginärer Punkt auf einer Geraden durch C_2 ist. Indem wir das Analoge für eine zu c windschiefe Gerade nachweisen, welche L_2^2 reell schneidet, sagen wir:

Jede imaginäre Ebene durch C_i , deren reeller Träger die eine der zwei Leitcurven von K_i^2 reell schneidet, trifft die andere in einem imaginären Punkte, dessen reeller Träger die Gerade c schneidet.

Trifft g eine Leitcurve und c reell, so schneidet die Ebene durch c und g die andere Leitcurve imaginär.

Als *dritte Ausnahme* heben wir die reellen Geraden hervor, welche L_1^2 und L_2^2 — sagen wir in S_1 und S_2 — reell schneiden. Die Ebene durch eine solche Gerade und C_i trifft L_1 und L_2 in imaginären Geraden, deren reelle Punkte $S_1 S_2$ sind. Die resp. zweiten Schnittpunkte dieser Geraden mit L_1^2 und L_2^2 liegen auf Geraden durch C_1 resp. C_2 , weil diese Schnittpunkte die Projectionen von S_2 resp. S_1 aus C_i sind. Wir schliessen also:

Jede imaginäre Ebene durch C_i , deren reeller Träger die Verbindungslinie eines reellen Punktes einer Leitcurve mit einem reellen Punkte der anderen Leitcurve ist, schneidet diese Leitcurven in imaginären Punkten, deren reelle Träger c treffen.

Unter den jetzt hervorgehobenen Geraden sind diejenigen ausgezeichnet, welche durch die eventuell reellen zwei Schnittpunkte von L_1^2 und L_2^2 gehen. Sind diese Geraden zu c windschief, so treffen sie K_i^2 — ausser in einem jener Schnittpunkte — noch in einem imaginären Punkte. Sind sie aber nicht zu c windschief, so berühren sie K_i^2 reell.

Zu einer vierten Ausnahme werden wir geführt, wenn wir die *Tangentialebenen von K_i^2* betrachten.

Sei P_{1i} ein imaginärer Punkt von L_1^2 , so geht durch ihn eine imaginäre Tangente t_{1i} an diesen Kegelschnitt. Die Ebene durch sie und C_i bezeichnen wir als Tangentialebene der Erzeugenden $P_{1i} C_i$ von K_i^2 . Der reelle Träger — t — dieser Tangentialebene wird von $P_{1i} C_i$ in einem imaginären Punkte geschnitten. Wir sagen t berühre in diesem Punkte den Kegel K_i^2 und nennen t eine Tangente von K_i^2 . Unter Benützung dieser Bezeichnungsweise schliessen wir also:

Die reellen Träger der Tangentialebenen an K_i^2 sind im Allgemeinen reelle Tangenten von K_i^2 mit imaginären Berührungspunkten.

Zur Construction dieser reellen Träger sei Folgendes bemerkt: Der reelle Punkt der Tangente t_{1i} ist der Pol P_1 des reellen Trägers von P_{1i} in Bezug auf L_1^2 . Schneide $C_i P_{1i}$ die Ebene L_2 in P_{2i} , und sei t_{2i} die Tangente in diesem Punkte an L_2^2 , so liegt ihr reeller Punkt im Pole P_2 des reellen Trägers von P_{2i} . Mithin ist die Verbin-

dungslinie der Punkte $P_1 P_2$ zugleich die reelle Gerade t der Tangentialebene längs $P_{11} P_{21}$.

Wir sehen, dass auf diese Weise jeder Erzeugenden des Kegels K_i^2 eine reelle Gerade correspondirt, welche Träger der Tangentialebene längs jener Erzeugenden ist. Ist die Erzeugende eine imaginäre Gerade erster Art, so liegt — wie wir unter 1 gezeigt — ihr reeller Punkt auf einer der Leitcurven. Construiren wir in ihm an diese die Tangente, so ist sie reeller Träger der Tangentialebene jener Erzeugenden. In der angedeuteten Correspondenz sind also die Erzeugenden von K_i^2 , welche imaginäre Gerade erster Art sind, dadurch ausgezeichnet, dass ihnen die reellen Tangenten der Leitcurven entsprechen. Weiter erwähnen wir die Erzeugenden von K_i^2 , welche durch die Schnittpunkte von L_1^2 und L_2^2 gehen. Sind letztere imaginär, so werden jene Erzeugenden imaginäre Gerade zweiter Art sein. Die Tangentialebenen, welche längs dieser Erzeugenden K_i^2 berühren, gehen durch c und diese Gerade correspondirt beiden Erzeugenden.

Schneiden sich L_1^2 und L_2^2 in reellen Punkten, so gehen durch diese und C_i imaginäre Gerade erster Art, deren Ebenen längs jener Geraden K_i^2 berühren. Jede Gerade einer solchen Ebene kann somit als reelle Tangente von K_i^2 betrachtet werden.

Damit haben wir alle reellen Tangenten von K_i^2 hervorgehoben. Gemeinsam ist ihnen, dass sie K_i^2 reell oder imaginär berühren und in diesem Sinne bilden sie eine Ausnahme von der oben gegebenen Regel.

3.

Wir wenden uns nun einer Aufgabe zu, welche der jetzt erörterten dual gegenübersteht.

Gegeben sei ein reeller Punkt P . Wir suchen die Tangentialebenen, welche durch ihn an K_i^2 gehen. Zu diesem Zwecke ziehen wir $C_i P$. Diese Gerade schneidet die Ebenen der Leitcurven in zwei imaginären Punkten. Durch jeden derselben gehen zwei imaginäre Tangenten an die Leitcurve. Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf Geraden durch C_i d. h. auf Erzeugenden von K_i^2 . Längs dieser wird K_i^2 von Tangentialebenen berührt, welche durch P gehen. Ihre reellen Träger schneiden sich in P und wir sagen daher:

Durch jeden reellen Punkt des Raumes gehen im Allgemeinen zwei Tangentialebenen und zwei reelle Tangenten an K_i^2 .

Zur Construction dieser reellen Tangenten bemerken wir Folgendes: Die reellen Punkte der Tangenten, welche wir aus einem imaginären Punkte an einen Kegelschnitt ziehen können, befinden sich in einer Geraden, welche durch den Pol des reellen Trägers von jenem imaginären Punkte geht.

In unserem Falle ist dieser imaginäre Punkt entweder der Schnittpunkt — P_{1i} — von $C_i P$ mit L_1 oder der Schnittpunkt — P_{2i} — von $C_i P$ mit L_2 . $P_{1i} P_{2i}$ sind imaginäre Punkte auf Geraden — $q_1 q_2$ — durch $C_1 C_2$. Beide Geraden haben in Bezug auf L_1^2 resp. L_2^2 den nämlichen Punkt — P_{q_1} — auf p zum Pole. Ob nun die zwei Leitcurven von K_i^2 reell sind oder ob eine reell, die andere imaginär ist, stets muss P_{q_1} in Bezug auf eine dieser Leitcurven — natürlich in Bezug auf eine reelle — ein hyperbolischer Punkt sein. Wir nehmen an P_{q_1} sei in Bezug auf L_1^2 hyperbolisch. Dann gehen durch P_{1i} zwei Tangenten — $t_{1i} t_{1i}^*$ — an L_1^2 , deren reelle Punkte — $T_1 T_1^*$ — auf einer Geraden durch P_{q_1} liegen.

Diese ist ein Strahl des gemeinsamen Paares $— g g^* —$ der Involution harmonischer Polaren um P_{ϱ_1} in Bezug auf L_1^2 und derjenigen Involution, welche P_{11} aus P_{ϱ_1} projecirt. Um zu entscheiden, auf welcher der zwei Geraden $g g^*$ die Punkte $T_1 T_1^*$ liegen müssen, bemerken wir, dass letztere in Bezug auf L_1^2 elliptische Punkte sind. P_{ϱ_1} ist aber in Bezug auf L_1^2 hyperbolisch. Also muss die durch P_{ϱ_1} gehende Gerade $T_1 T_1^*$ den Kegelschnitt L_1^2 reell schneiden. Unter den Geraden $g g^*$ ist aber stets eine und nur eine, welche L_1^2 reell schneidet, weil $g g^*$ ein Paar der Involution harmonischer Polaren um einen hyperbolischen Punkt ist. Wir nehmen nun an, dass $T_1 T_1^*$ auf g liegen, und erwähnen noch, dass diese Punkte durch P_{ϱ_1} und den Schnittpunkt $— G —$ von g mit ϱ_1 harmonisch getrennt werden. Daraus folgt, dass die reellen Tangenten $— t t^* —$ durch P mit den Geraden nach P_{ϱ_1} und G eine harmonische Gruppe bilden.

Diese Construction von $t t^*$ vereinfacht sich, wenn der reelle Punkt in einer Leitcurvenebene liegt. Ist er ein Punkt einer Leitcurve, so repräsentirt seine Tangente zwei zusammenfallende reelle Tangenten an K_i^2 .

Sei P_1 in L_1 gelegen und in Bezug auf L_1^2 hyperbolisch, so gehen durch ihn zwei reelle Tangenten $— t_1 t_1^* —$ an L_1^2 , welche zugleich die reellen Tangenten durch P_1 an K_i^2 sind. Schneiden wir die Ebene L_2 mit $P_1 C_1$, so gehen durch den Schnittpunkt $— P_{21} —$ zwei imaginäre Tangenten an L_2^2 . Ihre reellen Punkte müssen in den reellen Trägern der Tangentialebenen liegen, welche durch P_1 an K_i^2 gehen, d. h. in den Punkten, welche $t_1 t_1^*$ aus p schneiden. Indem wir eine analoge Schlussweise für die hyperbolischen Punkte von L_2 durchführen, ergibt sich:

Projeciren wir die reellen hyperbolischen Punkte der

einen Leitcurvenebene aus C_i auf die andere, so erhalten wir imaginäre Punkte, deren Tangenten an die resp. Leitcurve die Gerade p reell schneiden.

Sei P_1 in Bezug auf L_1^2 ein elliptischer Punkt, so schneiden wir die Ebene L_2 mit der Geraden $P_1 C_1$.

Der Schnittpunkt P_{21} liegt auf einer Geraden q_2 durch C_2 . Aus ihm construiren wir zwei imaginäre Tangenten an L_2^2 . Ihre reellen Punkte $T_2 T_2^*$ liegen auf einer Geraden durch den in p befindlichen Pol $-P_{q_2}$ von q_2 . Diese Gerade ist entweder p oder $P_{q_2} C_2$, da diese Linien an Stelle von $g g^*$ der allgemeinen Construction treten. Würden die Punkte $T_2 T_2^*$ in p liegen, so gingen durch sie und P_1 reelle Tangenten an L_1^2 . Dieses widerspricht der Annahme, dass P_1 in Bezug auf L_1^2 ein elliptischer Punkt ist. Folglich müssen die Punkte $T_2 T_2^*$ auf der Geraden $P_{q_2} C_2$ liegen. Wir erwähnen noch, dass $(P_{q_2} C_2 T_2 T_2^*) = -1$.

Zu einem analogen Resultate gelangen wir, indem wir von einem Punkte von L_2 ausgehen, der in Bezug auf L_2^2 elliptisch ist. Wir schliessen daher:

Durch jeden reellen Punkt der Ebenen L_1, L_2 , welcher in Bezug auf L_1^2 resp. L_2^2 elliptisch ist, gehen zwei reelle Tangenten an K_i^2 , welche mit C_2 resp. C_1 in einer Ebene liegen. Sie bilden mit den resp. Geraden nach C_2 und C_1 und nach dem Schnittpunkte ihrer Ebene mit p eine harmonische Gruppe.

Sei nun in einer der Leitcurvenebenen — etwa in L_1 — eine Gerade g gegeben, welche L_1^2 reell schneidet und p in einem Punkte $-P_{q_1}$ trifft, der in Bezug auf L_1^2 hyperbolisch ist. Wir fragen nach den reellen Tangenten von K_i^2 , welche in den Ebenen durch g liegen. Zur Beantwortung dieser Frage construiren wir zu P_{q_1} die Polare q_1 in Bezug auf L_1^2 . Weiter zeichnen wir zu g den

correspondirenden Strahl g^* in der Involution harmonischer Polaren um P_{e_1} . $G G^*$ seien die Schnittpunkte von $g g^*$ mit e_1 . Indem wir aus diesen die Paare der Involution J_e projectiren, erhalten wir zwei zu einander projective Büschel, welche einen Kegelschnitt — K_p^2 — erzeugen. Jeder Punkt — P — dieses Kegelschnittes projectirt ein Paar der Involution J_e in die Punkte $G G^*$. Construiren wir jetzt in der oben besprochenen Weise aus einem solchen Punkte P die Tangenten an K_p^2 , so liegen diese in einer durch g gehenden Ebene. K_p^2 enthält den Punkt P . Also wird jede Ebene durch g aus K_p^2 einen reellen Punkt schneiden und somit zwei reelle Tangenten von K_i^2 enthalten.

Liegt g in L_2 , so können wir eine analoge Schlussweise durchführen und sagen daher:

In jeder reellen Ebene, welche eine Leitcurve reell schneidet und p in einem Punkte trifft, der in Bezug auf diese Leitcurve hyperbolisch ist, liegen zwei reelle Tangenten an K_i^2 und: Die reellen Tangenten von K_i^2 , welche die nämliche Gerade einer Leitcurvenebene treffen, schneiden sich paarweise in Punkten eines Kegelschnittes.

Ausgeschlossen von den vorstehenden Ueberlegungen sind die reellen Tangenten an K_i^2 , welche im Falle des hyperbolisch-imaginären Kegels in den Tangentialebenen durch c liegen.

Geben wir eine imaginären Gerade erster Art — g_i — so können wir ihre Schnittpunkte mit K_i^2 zeichnen, indem wir durch g_i und C_i eine Ebene legen. Diese trifft jede der Leitcurven in zwei imaginären Punkten, welche auf zwei Erzeugenden des Kegels liegen und g_i in den gesuchten Schnittpunkten treffen. Die Construction, welche dieser dual gegenübersteht, führt zu den zwei Tangentialebenen, welche aus einem imaginären Punkte an K_i^2 gehen.

Indem wir noch darauf hindeuten, dass sich im Falle des parabolisch-imaginären Kegels leicht zu erkennende Specialisirungen des Bewiesenen ergeben, besprechen wir zum Schlusse die *Schnitte einer reellen Ebene E mit K_i^2* .

Wir wollen dieselben — im Gegensatze zu den imaginären Kegelschnitten, welche Leitcurven eines Polarsystemes sind — als *imaginäre Kegelschnitte erster Art**) bezeichnen. Wir gruppiren sie nach folgenden Gesichtspunkten:

a) K_i^2 sei ein hyperbolisch-imaginärer Kegel.

1. Die Schnittcurve — C_i^2 — mit der Ebene E hat vier reelle Punkte. Dann hat sie auch vier reelle Tangenten mit imaginären Berührungspunkten. Zwei dieser Tangenten sind die Schnittlinien von E mit den Tangentialebenen durch c . Zwei weitere müssen existiren, weil E die Leitcurven reell schneidet und p in einem Punkte trifft, der in Bezug auf eine der Leitcurven hyperbolisch ist.

2. C_i^2 hat zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre Punkte. Die Curve hat wenigstens zwei reelle Tangenten mit imaginären Berührungspunkten, kann aber auch vier haben.**)

*) Diese Kegelschnitte stehen auf derselben Stufe wie die in meiner Abhandlung über imaginäre ebene Dreiecke behandelten imaginären Dreiecke erster Art. In gleicher Weise wie wir dieselben dort durch Imaginärprojection aus einem reellen Dreieck ableiteten, so können wir die imaginären Kegelschnitte erster Art aus einem reellen — etwa durch die Imaginärprojection ($Cs\Delta_c$) oder ($Ci\Delta$) — ableiten. Diese Behandlung führt zu speciellen Kegelschnittbüscheln, welche derartige imaginäre Kegelschnitte erster Art definiren.

***) Der Fall, dass E aus K_i^2 einen Kegelschnitt schneide, welcher zwei Paare von conjugirt imaginären Punkten hat, ist nicht möglich. Denn E muss p in einem Punkte treffen, der in Bezug auf eine Leitcurve elliptisch und in Bezug auf die andere hyperbolisch ist. Also muss E die erste Leitcurve immer reell schneiden.

b) K_i^2 sei ein elliptisch-imaginärer Kegel.

1. Die Schnittfigur hat zwei reelle und zwei conjugirt imaginäre Punkte. Sie hat dann stets zwei reelle Tangenten mit imaginären Berührungspunkten. Denn E kann einzig die Leitcurve reell treffen, in Bezug auf welche p nur hyperbolische Punkte enthält.

2. C_i^2 hat zwei Paare von conjugirt imaginären Punkten. Die Curve kann keine reellen Tangenten besitzen.

c) K_i^2 sei ein parabolisch-imaginärer Kegel.

1. C_i^2 hat einen reellen Punkt mit einer reellen Tangente und zwei weitere reelle Punkte. Dann muss C_i^2 zwei reelle Tangenten mit imaginären Berührungspunkten besitzen.

2. C_i^2 hat einen reellen Punkt mit einer reellen Tangente und zwei conjugirt imaginäre Punkte. Die Curve hat keine weiteren reellen Tangenten.

Specialisirungen dieser allgemeinen Formen treten auf, wenn E eine ausgezeichnete Lage hat.

E kann z. B. durch einen reellen Schnittpunkt beider Leitcurven oder durch eine reelle Tangente beider Leitcurven gehen. In beiden Fällen hat C_i^2 eine reelle Tangente mit einem reellen Berührungspunkte.

Oder E geht durch p . Dann hat im Falle des hyperbolisch-imaginären Kegels C_i^2 zwei reelle Tangenten mit reellen Berührungspunkten u. dgl. m.

Fig. 8

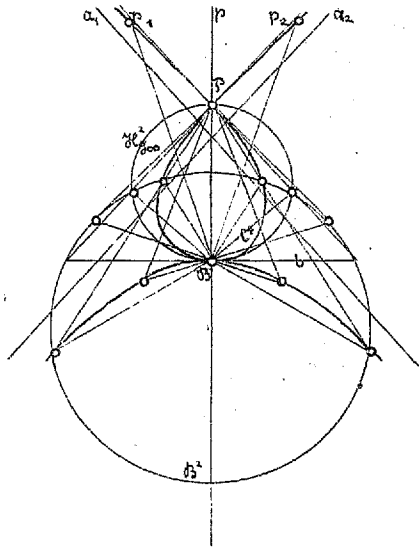


Fig. 10

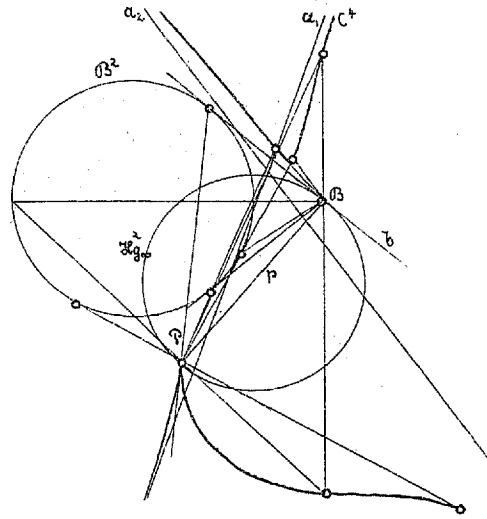


Fig. 12.

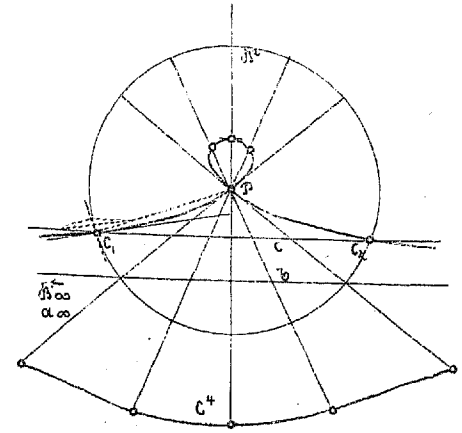


Fig. 13.

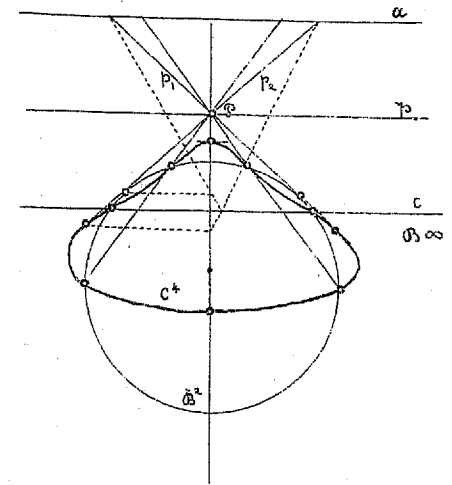


Fig. 9

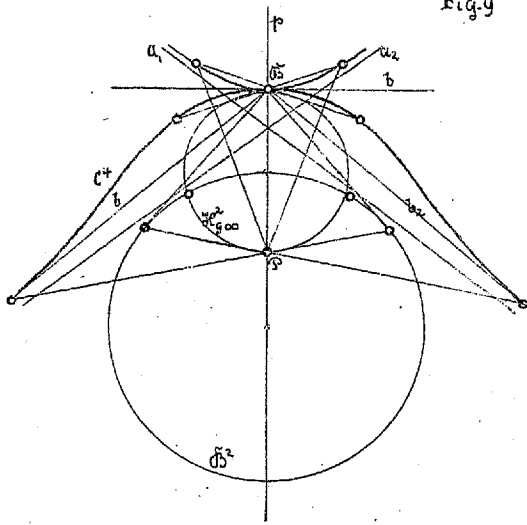


Fig. 11.

