Zur Configuration der Wendepunkte der allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Von

Dr. **M. Disteli.**

Um die vollständige Figur der Wendepunkte der allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung C_3 auf constructivem Wege zu untersuchen und ihre Darstellung zu erhalten, betrachten wir vorläufig die C_3 als Projection der Raumcurve vierter Ordnung erster Art R_4 aus einem ihrer Punkte, d. h. als Bild der Grundcurve eines Flächenbüschels zweiter Ordnung. Wir setzen zunächst ein solches mit vollständig reellem gemeinsamem Tetraeder harmonischer Pole und Polarebenen $M_1 \,.\,.\, M_4$ und $P_1 \,.\,.\, P_4$, also mit vier reellen doppelt projicirenden Kegelflächen $K_1 \,.\,.\, K_4$ durch die Curve voraus.

Sämmtliche Constructionen werden bis zu dem Grade der Vollständigkeit durchgeführt, dass sie später mit Weglassung der räumlichen Anschauung als planare Constructionen direct zu weiterer constructiver Untersuchung in der Ebene verwendet werden können.

Der Verfasser ist bereits früher nach einer von ihm aufgestellten Methode auf darstellend geometrischem Wege bei Anlass der Aufstellung des Steiner'schen Sechsschlusses zu einer räumlichen Bestimmung der Wendepunkte des Curvenbildes gelangt.*) Die Vervollständigung

*) Teubner, Leipzig 1888: „Die Steiner'schen Schliessungsprobleme nach darstellend geometrischer Methode".

in der Herleitung der hauptsächlichsten Eigenschaften und die zeichnerische Darlegung dieser ihrer Natur nach zu den Steiner'schen Schliessungsproblemen gehörenden merkwürdigen Punktengruppe ist der Zweck vorliegender Zeilen; um aber die gegenwärtige Entwicklung in einheitlicher und vollständiger Form zu geben, wird eine kurze Wiederholung der verwendeten Methode am Platze sein.

I. Bestimmung durch räumliche Construction.

A. Disposition.

1. Seien Figur 1 M_1' L_1 und M_2' L_2 die darstellend geometrischen Daten einer Durchdringung für einen beiden Kegelflächen K_1 und K_2 gemeinsamen Punkt, und sei der Durchstosspunkt S_{12} der Geraden M_1 M_2 derart gewählt, dass seine Tangentenpaare an L_1 und L_2 sich nicht trennen. Dann wird speciell das Bild der Spitze M_1 Wendepunkt des Curvenbildes, wenn das Centrum der Projection in der Gegenebene P_1 des Tetraeders harmonischer Polarebenen, oder in einem Punkte $\mathbf{S}_1$ der Durchdringung mit stationärer Schmiegungsebene liegt. Die Durchstosspunkte S_{12}, S_{13} und S_{14} der drei Tetraederkanten durch M_1 bilden ein Tripel harmonischer Pole bezüglich L_1, so dass die Bilder jener drei Kanten der Spur L_1 zum zweiten Male in drei Punkten S_2, S_3 und S_4 begegnen, die M_1' zu einem Kreisviereck ergänzen, welches das Dreieck der Punkte S_{ik} zum Diagonaldreieck hat. Die drei Seitenpaare dieses Vierecks sind die Tangentenpaare an die Spuren L_2, L_3, L_4 der drei Kegelflächen K_2, K_3 und K_4 aus den Punkten S_{12}, S_{13} und S_{14}, resp., deren Berührungspunkte alle in der gemeinsamen Polaren s^{P_1} oder in der Spur der projicirenden Ebene P_1 liegen, welche somit drei jener Berührungs-

punkte auf den Projectionen der Kanten durch M_1 als Bilder der drei Kegelspitzen M_2, M_3 und M_4 enthält.

Aus Gründen der Einfachheit und ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, wurde S_{12} unendlich fern, L_1 und L_2, also auch L_3 und L_4 als Kreise, somit s^{P_1} normal zur Richtung S_{12} angenommen.

2. Jede Fläche eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung enthält acht reelle oder nicht reelle Tangenten der Grundcurve R_4; wir wollen die acht Berührungspunkte P auf den Tangenten kurz das Berührungsoctupel der Fläche nennen. Seine Punkte liegen vier Mal paarweise auf Strahlen durch die vier Tetraederecken M_i und sechs Mal zu vieren in Ebenenpaaren durch die Tetraederkanten, welche von den entsprechenden Tetraederebenen harmonisch getrennt werden.

Jede der doppelt projicirenden Kegelflächen des Büschels, speciell die Fläche K_1, enthält vier in Paaren zusammengetretener Tangenten, ihre Berührungspunkte sind die vier Scheitel $\mathfrak{S}_1$ in der Gegenebene P_1, von denen wir einen zum Centrum der Projection gemacht haben. Bezeichnet man die projicirende Tangente mit t_1, diejenigen in den projicirenden Ebenen nach M_2, M_3 und M_4, resp. mit t_2, t_3 und t_4, so bestimmt jede Erzeugende e des Kegels K_1 mit diesen Tangenten vier Ebenen und durch diese als Tangentialebenen eine Vierergruppe von Flächen $F_1 \, .. \, F_4$, welche paarweise eine unendliche Folge Steiner'scher Vierseite enthalten.

Die vier Berührungsoctupel dieser Flächen stehen unter einander in der Beziehung, dass die Tangentialebenenpaare durch die drei Tetraederkanten aus M_1 an jede Fläche F_i die Berührungsoctupel der drei andern Flächen aus-schneiden. Jedes Berührungsoctupel wird also drei Mal erhalten, speciell dasjenige der Fläche F_1 durch das Tangentialebenenpaar aus $M_1 M_2$, $M_1 M_3$ und $M_1 M_4$ an die Flächen F_2, F_3 und F_4, resp.

3. So oft nun ein Punktepaar des Berührungsoctupels der Fläche F_1 auf der Erzeugenden e liegt, haben wir ein Punktepaar der Raumcurve, dessen Schmiegungsebenen durchs Centrum gehen, d. h. zwei Punkte, welche als Wendepunkt im Curvenbild erscheinen.

Da die drei Tangentialebenen durch die Tangenten t_i $(i = 2, 3, 4)$ die Erzeugende e sämmtlich enthalten, bringen wir sie mit dem Paar von Tangentialebenen der entsprechenden Tetraederkante $M_1 M_i$ an die durch sie bestimmte Fläche F_i zum Schnitt, und bestimmen diejenigen dieser Schnittlinien, welche dem Kegel K_1 angehören. Die drei Ebenenbüschel an den Tangenten t_i werden demnach durch die Flächen F_i, welche sie bestimmen mit den Involutionen an den ihnen entsprechenden Tetraederkanten $M_1 M_i$ in projectivische Verbindung gebracht. Das Erzeugniss ist jedesmal ein Kegel K^* von der Spitze M_1; seine Beziehung zum Kegel K_1 erläutern wir näher durch Construction.

Da es sich um Ebenenbüschel handelt, ersetzen wir diese durch ihre Spurenbüschel. Den Geraden der drei Büschel an den Durchstosspunkten S_i auf L_1 entsprechen die Paare der Involutionen an den Durchstosspunkten S_{1i}. Die Projectivität wird am einfachsten vermittelt durch die drei Kegelflächen K_2, K_3, K_4; es entsprechen dann beispielsweise den Strahlen von S_2 nach den Punkten S_{12}, S_{13}, S_{14} das Tangentenpaar aus S_{12} an L_1 und die Doppelstrahlen der Involution nach S_{13} und S_{14}. Der Strahl $S_2 S_{12}$ ist gemeinsam und entsprechend, das

Erzeugniss somit ein Kegelschnitt K^*, der das Dreiseit der drei Punkte S_i in den Punkten S_{1i} berührt, also mit dem Punkte M_1' als Brianchonpunkt. Der Kegelschnitt K^* ist durch diese Daten vollständig bestimmt, somit erscheint er auch als Erzeugniss der beiden anderen projectivischen Verbindungen. Er begegnet der Spur L_1 in vier Punkten $U_1 \,.\,.\, U_4$, welche die Durchstosspunkte der gesuchten Erzeugenden e sind. Die Geraden durch M_1' nach den Punkten U_i sind ihre Bilder; jede dieser vier Geraden begegnet daher dem Curvenbild in zwei Wendepunkten.

4. Aus den Bestimmungselementen des Kegelschnittes K^* folgt, dass jeder der beiden Kegelschnitte K^* und L_1 unendlich viele Tripel harmonischer Pole des andern enthält. Für zwei solche Kegelschnitte gehen die Tangenten in einem gemeinsamen Punkte X nach den Berührungspunkten Y und Z einer gemeinsamen Tangente. Ist X_1 ein weiterer reeller Schnittpunkt beider Curven, so erkennt man leicht, dass die Verbindungslinie s der beiden anderen gemeinsamen Schnittpunkte X_2 und X_3 die harmonische Polare des Punktes X_1 bezüglich des Dreieckes $X\ Y\ Z$ ist. Die Seiten dieses Dreieckes und die Verbindungslinien des Punktes X_1 mit der Gegenecke begegnen der Geraden s in drei Paaren XX', YY' und ZZ' der gemeinsamen Polinvolution beider Kegelschnitte, wobei die Punkte X', Y', Z' die vierten harmonischen der drei Punkte X, Y, Z bezüglich der beiden anderen sind. Demnach bilden je zwei Punkte mit verschiedenen Buchstaben mit und ohne Index mit dem Paar der Doppelpunkte $X_2\ X_3$ eine äquianharmonische Gruppe:

Die beiden Kegelschnitte L_1 und K^* begegnen sich also in zwei reellen und zwei nothwendig nicht reellen Punkten U_i, welche von jedem ihrer Punkte aus als äquianharmonische Gruppe projicirt werden.

Jeder dieser Punkte U_i führt zu einem Octupel von Punkten der Raumcurve, deren Bilder wir mittelst eines Paares von Hilfsebenen erhalten, deren Spuren dasjenige Paar in jeder der Involutionen an einem Punkte S_{ik} (in der Figur am Punkte S_{12}) bilden, welches den Punkt U_i enthält. Der Punkt U_1 allein führt zu einem reellen Octupel, die übrigen Punkte U_i zu nicht reellen. Die erste Gruppe enthält demnach zwei weitere reelle, die drei anderen enthalten je zwei nicht reelle Wendepunkte. Von den neun Wendepunkten sind also drei reell und sechs imaginär.

B. System der Wendepunkte und harmonischen Polaren.

5. Wir bezeichnen im Folgenden zur leichteren Uebersicht die Wendepunkte als Punkte J_k $(k = 1..9)$; die drei reellen speciell als J_1, J_2, J_3.

Ausser den Punkten J_2 und J_3 gehören zu ihrem reellen Octupel noch sechs weitere Punkte J, welche nothwendig im Bilde als Berührungspunkte der Tangenten aus J_2 und J_3 an die Curve dritter Ordnung erscheinen. Sie liegen daher zu dreien in zwei Geraden i_2 und i_3 resp.; für den Punkt J_1 sind M_2', M_3', M_4' diese Punkte J und ist s^{P_1} die Gerade i_1. Jede der drei reellen Geraden i ist in Verbindung mit der Curventangente im entsprechenden Wendepunkt J Polarkegelschnitt dieses Punktes bezüglich der Curve C_3. Die drei Linien i schneiden sich somit im nämlichen Punkte. Man nennt sie die harmonischen Polaren*) der Punkte J;

*) Wir schreiben in der Folge zur Unterscheidung mit anderen harmonischen Polaren bezüglich Curven zweiter Ordnung für diese Geraden h. Polaren.

auf jedem Strahl durch einen von diesen ist die Curve durch ihn und die h. Polare harmonisch getrennt.

Wir wissen bereits, dass die Wendepunkte paarweise auf zwei reellen Strahlen, von denen aber nur der eine reell schneidet, und auf einem nicht reellen Strahlenpaar durch den Wendepunkt J_1 liegen, sowie dass diese beiden Geradenpaare ein äquianharmonisches Doppelverhältniss besitzen.

6. Jede Linie, welche drei Wendepunkte verbindet, bezeichnen wir fortan als Linie h; diejenige speciell durch die drei reellen Punkte J_1, J_2, J_3 mit h_0. Wir bezeichnen im Weitern den Schnittpunkt zweier Linien h, der nicht Wendepunkt ist, mit H; speciell den Schnittpunkt der drei reellen h. Polaren i_1, i_2, i_3 aus bald hervortretenden Gründen mit H_0 und zeigen jetzt an Hand der Construction, dass zunächst für die beiden anderen Wendepunkte J_2 und J_3 dieselben Verhältnisse bestehen, wie sie sich für den Punkt J_1 ergeben haben.

Es ist bekannt, dass die neun Wendepunkte für sich eine Gruppe von Fundamentalpunkten für den Steinerschen Sechsschluss bilden. Die sechs Ecken jedes derartigen Polygons für zwei reelle Wendepunkte als fundamental liegen in Paaren auf drei Strahlen durch den dritten reellen Wendepunkt, und die Seiten des Polygons durch die beiden ersten schneiden sich paarweise in drei Punkten der h. Polaren des dritten Wendepunktes. Die h. Polaren sind demnach als Theil des Erzeugnisses die Perspectivaxen der drei erzeugenden cubischen Strahleninvolutionen an den Wendepunkten.

Die sechs Ecken jedes Polygons sind folglich auch sechs Punkte eines Kegelschnittes K_o, für den H_o der Pol der Geraden h_o ist. Die Verbindungslinien von H_o

mit einem Wendepunkt und die zugehörige h. Polare sind jedesmal ein Paar seiner Polareninvolution, und da diese drei Paare für alle Kegelschnitte K_0 dieselben bleiben, so sind diese alle unter sich in doppelter Berührung für zwei Punkte der Geraden h_0.

Gehen wir jetzt speciell von einer Linie h durch den Wendepunkt J_1 aus, so besteht das ganze Polygon aus Linien h, weil jede Gerade, welche zwei Wendepunkte verbindet, nothwendig einen dritten enthalten muss. Somit gehen auch durch die Punkte J_2 und J_3 noch je eine reelle und zwei nicht reelle Linien h, welche sich mit den bereits construirten auf der h. Polaren des jedesmal anderen Wendepunktes begegnen. Der Kegelschnitt K_0 durch die Ecken des Polygons oder durch die sechs nicht reellen Wendepunkte muss nothwendig der einzig zerfallende Kegelschnitt des Büschels sein, und somit aus einem weiteren Paar von Linien h bestehen. Es ist das Paar der Doppelstrahlen der Polareninvolution am Punkte H_0.

Durch die 9 Wendepunkte gehen demnach 12 Linien h, von denen 4 reell und 8 in Paaren conjugirt imaginär sind. Sie zählen für 36 Verbindungslinien zwischen den 9 Wendepunkten und schneiden sich ausser zu vieren in diesen noch zu zweien in 12 weiteren Punkten H.

7. Mittelst des zuletzt construirten Paares von Linien h gelangen wir nun zu einer höchst einfachen Darstellung sämmtlicher Linien h. Angenommen, das Dreieck der reellen, aber nicht reell schneidenden Linien h_1, h_2, h_3 durch die reellen Punkte J_1, J_2, J_3 sei gefunden, so ist H_0 der h. Pol von h_0 bezüglich dieses Dreiecks, dessen Ecken wir mit H_1, H_2, H_3 bezeichnen, weil

die h. Polare jedes reellen Wendepunktes durch den vierten harmonischen bezüglich der beiden anderen geht. Die Verbindungslinien des Poles H_0 mit den reellen Wendepunkten J_1, J_2, J_3 seien bezeichnet mit i_1', i_2', i_3' resp.; dann sind $i_1\,i_1'$, $i_2\,i_2'$, $i_3\,i_3'$ drei Paare der quadratischen Strahleninvolution, welche das nicht reelle Linienpaar h am Punkte H_0 definiren. Es begegnet den drei Geraden h_1, h_2, h_3 in den sechs nicht reellen Wendepunkten, welche die Doppelpunkte der drei quadratischen Punktinvolutionen

$$\begin{array}{ccc} J_{11}\,J_{11}', & J_{12}\,J_{12}', & J_{13}\,J_{13}' \\ J_{21}\,J_{21}', & J_{22}\,J_{22}', & J_{23}\,J_{23}' \\ J_{31}\,J_{31}', & J_{32}\,J_{32}', & J_{33}\,J_{33}' \end{array}$$

sind. Weil ferner H_0 auf allen Seiten und an allen Ecken des Dreiseits $h_1\,h_2\,h_3$ von h_0 harmonisch getrennt ist, so sind diese Involutionen auf $h_1\,h_2$, $h_2\,h_3$ und $h_3\,h_1$ perspectivisch resp. für die Wendepunkte J_3, J_2, J_1.

Damit ist das ganze System der 12 Linien h zur Darstellung gebracht; dabei tritt zugleich in Folge der Bildung der Involution am Punkte H_0 die Existenz äquianharmonischer Gruppen aufs Neue hervor. Die 12 Linien h lassen sich auf bestimmte Weise in vier syzygetische Dreiseite zusammenfassen, von denen jedes alle 9 Wendepunkte zugleich enthält. Das erste besteht aus der Linie h_0 und den Geraden h durch H_0; das zweite aus den reellen Geraden h_1, h_2, h_3; das dritte und vierte bestehen aus den nicht reellen Linien h; ihre Seiten werden durch den Sinn leicht aus einander gehalten.

8. In Folge der harmonischen Beziehung zwischen H_0 und h_0 bezüglich des Dreieckes $H_1\,H_2\,H_3$ sind aber

nicht nur je zwei Involutionen imaginärer Wendepunkte auf den Seiten h_1, h_2, h_3 perspectivisch für einen reellen Wendepunkt, sondern ihre projicirenden Strahleninvolutionen aus zwei solchen sind zugleich perspectivisch für die h. Polare des dritten reellen Wendepunktes. Die dadurch entstehenden Punktinvolutionen bestimmen auf den Linien i_1, i_2, i_3 je ein Paar nicht reeller Punkte H, so dass auf jeder dieser Geraden vier Punkte H liegen. Die Verbindungslinie zweier Punkte H ist demnach entweder eine Linie h, wenn sie durch einen Wendepunkt geht, oder eine h. Polare i_k.

Die 66 Verbindungslinien zwischen den 12 Punkten H sind also die 12 Linien h. und die 9 harmonischen Polaren, von denen jede 6 Mal zählt. Auf den reellen Linien i_1, i_2, i_3 liegen 10 Punkte H; ein weiteres nicht reelles Paar ist dasjenige, welches durch die beiden Linien h am Punkte H_0 auf h_0 ausgeschnitten wird; also die Doppelpunkte der Involution $J_1 J_1'$, $J_2 J_2'$, $J_3 J_3'$ auf h_0. Die Verbindungslinien dieses Paares mit den drei Punkten H_1, H_2, H_3 sind also die noch fehlenden sechs nicht reellen h. Polaren, welche somit als Doppelstrahlen von drei quadratischen Involutionen

$$\begin{array}{ccc} \dot{i}_{11}\,\dot{i}_{11}' , & \dot{i}_{12}\,\dot{i}_{12}' , & \dot{i}_{13}\,\dot{i}_{13}' \\ \dot{i}_{21}\,\dot{i}_{21}' , & \dot{i}_{22}\,\dot{i}_{22}' , & \dot{i}_{23}\,\dot{i}_{23}' \\ \dot{i}_{31}\,\dot{i}_{31}' , & \dot{i}_{32}\,\dot{i}_{32}' , & \dot{i}_{33}\,\dot{i}_{33}' \end{array}$$

erscheinen. Die Involutionen an den Punkten H_1 und H_2 begegnen sich in den Punkten H auf i_3, diejenigen an H_2, H_3 und H_3, H_1 in den Paaren H auf i_1 und i_2 resp., so dass die schon vorher aufgetretenen Involutionen dieser Paare aufs Neue und mit denselben Elementen erscheinen.

Die neun harmonischen Polaren i_k befolgen also den Punkten H gegenüber genau den reciproken Zusammenhang, wie die Wendepunkte gegenüber den Linien h, d. h. sie gehen 12 Mal zu dreien durch die Punkte H. Wir werden später zeigen, dass dieser Zusammenhang Reciprocität bezüglich gewisser Polarsysteme ist.

9. Der Geraden h_0 als Ort der Pole entspricht bezüglich des Dreieckes H_1 H_2 H_3 ein diesem eingeschriebener Kegelschnitt; dem Büschel von Geraden um H_0 als Büschel von Polaren entspricht ein dem Dreieck umschriebener Kegelschnitt. Beide Kegelschnitte berühren sich in dem auf h_0 gelegenen Punktepaar H und weil die h.Polare niemals durch den Pol geht, so ist jeder der Punkte H der Pol der Verbindungsgeraden des anderen mit H_0. Da ferner die Involution der nicht reellen Paare H auf jeder reellen Linie i_k conjugirt ist zur Involution der Linienpaare h durch den Wendepunkt J_k und zudem der Sinn entgegengesetzt, wie es sein muss, so besteht der reciproke Zusammenhang auch für jedes der nicht reellen Dreiecke.

Von den vier syzygetischen Dreiecken sind somit je drei sich selbst conjugirt bezüglich des vierten.

Betrachtet man die beiden ersten Dreiecke, von denen also jedes sich selbst conjugirt bezüglich des anderen, so sind die 9 Verbindungslinien zwischen ihren Ecken die 9 h. Polaren i; somit sind die beiden ersten zugleich perspectivisch mit den beiden anderen syzygetischen Dreiecken. Es begegnen sich somit die Verbindungsgeraden der Ecken irgend zweier syzygetischer Dreiecke zu dreien in den Ecken der beiden anderen. Weil ebenso die Schnittpunkte ihrer Seiten oder die 9 Wendepunkte zu dreien in 12 Geraden liegen, so sind die Seiten irgend zweier Dreiecke zugleich die Perspectivaxen der Seiten der beiden anderen.

Offenbar können zwei reelle Dreiecke nie in eine solche Lage gebracht werden, dass jedes sich selbst conjugirt bezüglich des anderen, weil das Paar der Ecken auf der Linie h_0 niemals reell sein kann. Zwei reelle Dreiecke können daher wohl für die Ecken eines dritten Dreieckes perspectivisch gemacht werden, dagegen können die 9 übrigen Schnittpunkte auf den Verbindungsgeraden nicht in ein zweites Dreieck vereinigt werden.

10. Die 9 Wendetangenten schneiden sich ferner in 36 Punkten T, welche zu vieren auf den 9 h.Polaren liegen. Ausser den Schnittpunkten T_1, T_2, T_3 der reellen Tangenten sind noch drei Punkte T_4, T_5, T_6 der Figur reell, entsprechend den Paaren der Wendepunkte auf dem reellen syzygetischen Dreieck. Sie entstehen als Scheitel perspectivischer Involutionen; der Punkt T_5 auf i_2 beispielsweise, indem man die reelle Wendetangente in J_2 schneidet mit den nicht reellen h.Polaren am Punkte H_1 und diese Involution mit derjenigen der Wendepunkte auf h_1 verbindet.

C. System der Punkte J und Tangenten i.

11. Die h.Polaren begegnen im Weitern der Curve C_3 in 27 Punkten J, welche sich durch 351 Gerade verbinden lassen; unter diesen gehen 108 Linien k durch einen Wendepunkt, 81 andere Linien l enthalten einen weiteren Punkt J und zählen somit dreifach. Von den 27 Punkten J, in welchen die C_3 von einem Kegelschnitt sechspunktig osculirt werden kann, sind im vorliegenden Falle der

zweitheiligen Curve 9 reell; man findet aber auch leicht die 18 nicht reellen. Verbindet man einen reellen Punkt J, z. B. wie in der Figur, denjenigen des unendlichen Astes auf i_3, mit dem Paar nicht reeller Wendepunkte auf h_3, so begegnen diese Geraden dem Paare h. Polaren am Punkte H_3 in zwei Punkten J, auf einer reellen Geraden k durch den Wendepunkt J_3, der Perspectivaxe der elliptischen Involutionen, welche die genannten Geradenpaare definiren.

Auf diese Weise treten durch Verbindung der reellen Punkte J mit den Wendepunkten auf den Linien h durch den Tangentialpunkt von J an jedem reellen Wendepunkt zu den vorhandenen drei Linien noch 9 neue Linien k hinzu, von denen je drei reell und sechs imaginär sind.

Von den 108 Geraden k sind demnach 18 reell, 9 unter ihnen enthalten die reellen J, 9 andere die 18 nicht reellen, so dass durch jeden Punkt J eine reelle Gerade geht. Je zwei Involutionen auf Geraden k, die aus derselben Linie h und zwei Punkten J derselben h. Polaren abgeleitet sind, liegen perspectivisch für den dritten Punkt J der h. Polaren.

Von den 81 Verbindungslinien l der Punkte J zu dreien sind demnach nur sechs und die 3 h. Polaren reell.

Die Tangenten i in den Paaren von Punkten J auf einer Linie k begegnen sich auf der entsprechenden h. Polaren. Wird also in der Figur die Tangente im betrachteten Punkte J des unpaaren Astes mit der Involution der h. Polaren am Punkte H_3 geschnitten, so ist diese Involution perspectivisch mit der Involution auf h_3 und ergibt als Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten

J auf k je ein Perspectiv-Centrum K (und ein solches K', welche letzteren für die Figur nicht von Bedeutung sind). Von den 108 Punkten K sind also 18 reell.

12. Werfen wir einen Blick zurück auf die bis jetzt ausgeführten Constructionen, so enthält die Darstellung:

a) Die 9 Wendepunkte; die drei reellen auf der Linie h_o, die 6 nicht reellen, dargestellt in Paaren durch reelle elliptische Punktinvolutionen auf reellen Trägern h_1, h_2, h_3.

b) Die 9 h.Polaren; die 3 reellen am Punkte H_o; die 6 nicht reellen, dargestellt in Paaren durch reelle elliptische Strahleninvolutionen an reellen Scheiteln H_1, H_2, H_3.

c) Das System der 12 Linien h; die 4 reellen h_o, h_1, h_2, h_3; die 8 nicht reellen dargestellt in Paaren durch reelle Strahleninvolutionen an den reellen Scheiteln J_1, J_2, J_3, H_o.

d) Das System ihrer 12 Schnittpunkte H; die reellen H_o, H_1, H_2, H_3 und die 8 nicht reellen, dargestellt durch reelle Punktinvolutionen auf den reellen Geraden i_1, i_2, i_3, h_o.

e) Die neun Wendetangenten; nebst den 3 reellen Seiten des Dreieckes T_1 T_2 T_3 die 6 nicht reellen in Paaren dargestellt durch reelle Strahleninvolutionen an reellen Scheiteln T_4, T_5, T_6.

f) Die 27 Punkte J; nebst den 9 reellen die 18 nicht reellen, dargestellt in Paaren durch reelle Punktinvolutionen auf 9 reellen Trägern k durch die reellen Wendepunkte.

g) Ihre 27 Tangenten i; nebst den 9 reellen die 18 nicht reellen, dargestellt in Paaren durch reelle Strahleninvolutionen an 9 reellen Scheiteln K auf den reellen h.Polaren.

Die Constructionen *a)* und *b)*, *c)* und *d)*, *f)* und *g)* stehen sich dual gegenüber, weil alle auftretenden Involutionen, welche die imaginären Elemente vertreten, schliesslich durch Schnitt- und Scheinbildung aus den fundamentalen Involutionen am Punkte H_0 und auf der Geraden h_0 hervorgehen, so dass der vielfach verschlungene Zusammenhang der Gesammtfigur doch in einfacher Weise durch die Construction beherrscht und auseinander gehalten wird.

II. Planare Construction.

Die bis jetzt abgeleiteten Beziehungen gestatten nun auch eine rein planimetrische Darstellung dieser Verhältnisse, ohne auf die Raumcurve zurückzugreifen, welche wir für einige metrisch specialisirte Fälle durchführen. Die Angabe von drei reellen Wendepunkten J_1, J_2, J_3 auf der Geraden h_0 setzt fünf Bedingungen für die Curve dritter Ordnung, die Angabe des Punktes H_0 zwei weitere Bedingungen fest. Fügt man endlich noch die Linie h_1 beliebig durch den Punkt J_1 dazu, so ist damit das ganze System der 12 Linien h, ihrer Schnittpunkte H, der 9 Wendepunkte und ihrer 9 h.Polaren, d. h. ein bestimmtes syzygetisches Curvenbüschel dritter Ordnung bestimmt.

D. Metrische Specialfälle.

13. Nimmt man Fig. 2, speciell J_1 auf h_0 unendlich fern und den Punkt H_0 so an, dass die Involution harmo-

nischer Polaren an ihm eine Rechtwinkelinvolution wird, sowie h_1 als die unendlich ferne Gerade der Ebene, so hat man dadurch ein Büschel syzygetischer Curven mit den Kreispunkten als Paar von Wendepunkten festgesetzt. In Folge des äquianharmonischen Doppelverhältnisses bilden die Linien h_2 und h_3 mit h_0 Winkel von 30^0; und ebenso wie die drei reellen h.Polaren unter sich Winkel von 60^0. Jeder Punkt der Ebene bestimmt ein Individuum des Büschels und zugleich ein sofort angebbares Sechseck von Punkten der C_3 auf dem Kegelschnitt K_0, in einem Büschel von solchen mit gemeinsamem Brennpunkt und gemeinschaftlicher Directrix. Liegt der bestimmende Punkt auf einer h.Polaren, so fallen jene 6 Punkte paarweise zusammen; man kennt also dann ein Dreieck von Punkten J nebst ihren Tangenten.

Auch die weiteren sechs reellen Punkte J sind leicht zu finden. Das Curvenbüschel dritter Ordnung begegnet der Geraden i_1 in einer cubischen Involution, welche durch die vier syzygetischen Dreiecke vollständig bestimmt ist. Der Punkt H_0 bildet als Doppelelement mit dem Schnitt von h_0 die eine Gruppe, H_1 als Doppelelement mit dem Schnitt auf h_1 eine zweite Gruppe. Projicirt man diese beiden Gruppen aus J_3 auf einen durch J_2, J_3, H_0 gehenden Hülfskreis, so geht durch die Schnittpunkte desselben mit den Doppelstrahlen ein zweiter Kreis von gleichem Radius, der mit dem Hülfskreis in der Beziehung steht, dass jeder unendlich viele Trippel harmonischer Pole des anderen enthält.

Die auf dem Hülfskreis liegende Serie von solchen ist die verlangte cubische Involution, mit Hülfe derer man (Tripel X_1 X_2 X_3 der Figur) die beiden anderen Punkte J auf i_1 und damit auch auf i_2 und i_3

findet. Jeder Wendepunkt ist mit einem der drei Punkte J auf seiner h. Polaren Fundamentalpunkt für den Vierschluss; in der quadratischen Involution am Wendepunkt findet man somit als entsprechenden zum gemeinsamen Strahl nach J die Wendetangente t; inbesondere die reelle Asymptote der Curve. Der auf i_1 liegende Punkt T ist zugleich der eine reelle Brennpunkt der Curve C_3, während i_1 den reellen degenerirten Brennkreis darstellt. Seine drei weiteren reellen Brennpunkte sind drei Punkte K, oder die symmetrischen zu den Punkten K, bezüglich der verticalen Tangenten i, weil die sich in ihnen begegnenden Curventangenten i durch die Wendepunkte auf der unendlich fernen Geraden h_1 gehen müssen. Die Figur enthält zwei derselben, sowie die zu dem im Innern des Ovals liegenden Brennpunkte K gehörende Linie k, welche man als Verbindungsgerade der Berührungspunkte J seiner Tangente seine Directrix bezüglich der Curve dritter Ordnung nennen könnte.

Wir kommen aber bei anderer Gelegenheit noch auf die Construction der Brennpunkte einer circularen Curve C_3 zurück, und ziehen hier keine weiteren Consequenzen.

Durch das reelle Dreiseit $h_1 h_2 h_3$ werden die zweitheiligen Curven des Büschels von den eintheiligen getrennt. Die für die zweitheilige Curve C_3 abgeleiteten Wendepunktseigenschaften bleiben somit im Wesentlichen auch für die eintheiligen bestehen.

14. Das Dreieck der reellen Linien h_1, h_2, h_3 in Fig. 3 sei ferner ein gleichseitiges; der Punkt H_0 der Mittelpunkt desselben, somit h_0 die unendlich ferne Gerade; die Involution an H_0 ist rechtwinklig, die Kreispunkte bilden ein Paar von Punkten H, demnach sind auch die Involutionen der h. Polaren an H_1, H_2, H_3 Rechtwinkelinvolu-

tionen. Das Büschel der Kegelschnitte K_0 ist ein Büschel concentrischer Kreise; die auf ihnen liegenden Sechsecke der Curve bestehen aus zwei regulären Dreiecken von Fundamentalpunkten des Sechsschlusses. Durch eines dieser Sechsecke oder ein Dreieck von Punkten J nebst Tangenten ist die Curve bestimmt; ist sie zweitheilig, so werden die sechs weiteren reellen Punkte J wie vorher mittelst des dem Dreieck H_1 H_2 H_3 umschriebenen Hülfskreises bestimmt.

Auch das Asymptotendreiseit bestimmt sich analog wie früher. Von den Punkten K ist in der Figur ein reelles Dreieck, von den Linien k das entsprechende Dreiseit angegeben.

15. Gibt man bloss (Figur 4) die Richtungen der drei reellen Wendepunkte auf h_0, sowie den Punkt H_0, dagegen nicht das reelle Dreiseit h_1 h_2 h_3, so gehören zweifach unendlich viele Curven zum System; man kann demnach zwei Dreiecke von Punkten J auf den h. Polaren willkürlich festsetzen, und erhält durch ihre Verbindungslinien das dritte reelle Dreieck dieser Punkte. Statt dieser Dreiecke kann man auch je ein Sechseck auf zwei beliebigen Kreisen K_0 geben; ihre Verbindungsgeraden begegnen sich dann in zwei neuen Sechsecken der Curve, durch deren Verbindung wieder ein neues Paar von solchen entsteht. Ebenso führt die Combination irgend zweier dieser neuen Sechsecke zu einer fortlaufenden Reihe von solchen Paaren, so dass man auf diese Weise beliebig viele Punkte der Curve mit dem Lineal erzeugen kann.

16. Fallen die beiden ersten Dreiecke zusammen, d. h. gibt man die sechs Tangenten des ersten Sechseckes, so schneiden sie die Gegenseiten in einem zweiten, deren Tangenten die zugehörigen Seiten in einem dritten

Sechseck u. s. f. Man erhält eine fortlaufende Reihe von Sechsecken, so dass jedes das Tangentialsechseck des vorhergehenden ist. Wir wollen die Frage, wann diese Reihe von Sechsecken sich schliesst, nur für den einfachsten Fall durch Construction erledigen, d. h. für zwei Sechsecke, von denen jedes das Tangentialsechseck des anderen ist.

Beide Sechsecke bestehen aus zwei regulären Dreiecken, von der Eigenschaft, dass die Tangente in jeder Ecke der Gegenseite in ihrem dritten Schnittpunkt mit der Curve C_3 begegnen. Setzt man das erste Sechseck, welches aus den Dreiecken $A_1\ B_1\ C_1$ und $A_1'\ B_1'\ C_1'$ besteht, als reguläres voraus, so ist das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ der zweiten Gruppe so auf den Seiten $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ des ersten anzunehmen, dass seine Seiten resp. durch die Ecken $A_1' B_1' C_1'$ gehen. Dies ist der Fall, wenn die Seite $A_2 B_2$ durch den Schnitt der h. Polaren i_2 mit dem Kreise K_o des regulären Sechseckes geht. Von den vier Dreiecken $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_1' B_1' C_1'$, $A_2' B_2' C_2'$ ist jedes das Tangentialdreieck des vorhergehenden; es entstehen dadurch vier geschlossene Tangentenpolygone $A_1 A_2 A_1' A_2'$, $B_1 B_2 B_1' B_2'$, $C_1 C_2 C_1' C_2'$, welche mit den Wendepunkten J_3, J_2, J_1, resp. zusammen die reellen Punkte einer Gruppe von Fundamentalpunkten für den Steiner'schen Zehnschluss und je mit jedem der beiden anderen Wendepunkte für den Dreissigschluss bilden. Die Verbindungslinie zweier bekannten Punkte der Curve enthält stets einen dritten bekannten Punkt derselben.

17. Von zahlreichen anderen Specialfällen sei nur noch erwähnt, dass wenn die h. Polare i_1 zur unendlich fernen Geraden gemacht wird, also J_1 in der Mitte von

J_2 und J_3, sowie H_0 unendlich fern ist, jede Curve C_3 des Systems den Punkt J_1 zum Mittelpunkt hat. In diesem Falle sind also zwei h. Polaren, sowie zwei reelle Linien h parallel.

E. Curvenbüschel und Curvenschaar.

18. Die besprochene Configuration in der Ebene bestimmt aber nicht nur ein Büschel von Curven dritter Ordnung, deren Basispunkte die Wendepunkte sind, sondern auch eine Schaar von Curven dritter Classe mit den neun h. Polaren als gemeinschaftlichen Rückkehrtangenten. Der Uebergang vom Curvenbüschel zur Curvenschaar und damit die dualen Uebersetzungen der Eigenschaften des Systems, die schon hervorgetreten sind, wird vermittelt durch sechs Gruppen von Polarsystemen, welche durch die Linien h und ihre Schnittpunkte H bestimmt sind. Lässt man nämlich in Figur 3 den Ecken des ganz reellen syzygetischen Dreieckes die Gegenseiten desselben, dem Punkte H_0 die unendlich ferne Gerade h_0 als zusammengehörige Elemente entsprechen, so bestimmen sie ein circulares Polarsystem mit nicht reeller Directrix, welche sich durch einen leicht angebbaren Symmetriekreis ersetzen lässt.

In diesem Polarsystem entsprechen den Ecken der beiden betrachteten syzygetischen Dreiecke ihre Seiten; dagegen den Ecken jedes der beiden nicht reellen Dreiecke aus Linien h die Seiten des anderen; den drei reellen Wendepunkten entsprechen ferner die drei reellen h. Polaren; den nicht reellen Wendepunkten auf den drei reellen Linien h die Paare nicht reeller h. Polaren an den reellen Ecken H_1 H_2 H_3; also jeder Curve dritter Ordnung des Büschels eine bestimmte Curve dritter Classe der genannten Schaar. Aus jedem Paar syzygetischer Dreiecke entspringen auf diese Weise zwei Gruppen von je drei Directrixkegelschnitten K_1 und K_2 eben so vieler Polarsysteme. Die Kegelschnitte K_1 der ersten Gruppe sind in Figur 3 ein nicht reeller Kreis und ein Paar conjugirt imaginärer Parabeln; diejenigen K_2 der zweiten Gruppe drei gleichseitige Hyperbeln. Jeder Kegelschnitt geht durch ein Paar von Punkten H und besitzt in diesen eine Linie h als Tangente. Die Eigenschaften dieser 6 Kegelschnitte lassen sich kurz so aussprechen:

a) Jeder der drei Kegelschnitte einer Gruppe enthält unendlich viele Tripel harmonischer Pole der beiden anderen; je zwei von ihnen begegnen sich daher in vier Punkten einer äquianharmonischen Gruppe; der eine Schnittpunkt ist je ein Punkt H, die drei anderen enthalten die durch ihn gehenden h. Polaren.

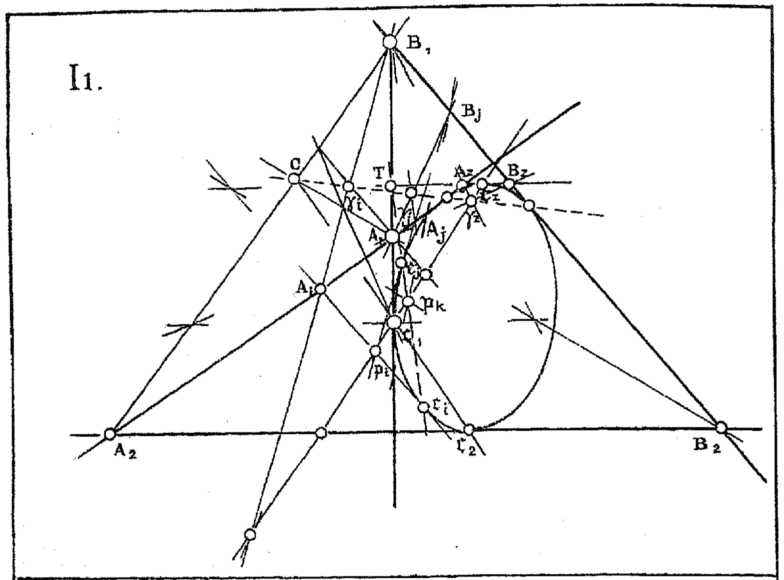
b) Jeder Kegelschnitt K_1 ist sich selbst polarreciprok (also in doppelter Berührung) bezüglich jedes der drei Kegelschnitte K_2 und umgekehrt; die h. Polaren sind die 9 gemeinsamen Berührungssehnen, die Wendepunkte die gemeinsamen Pole.

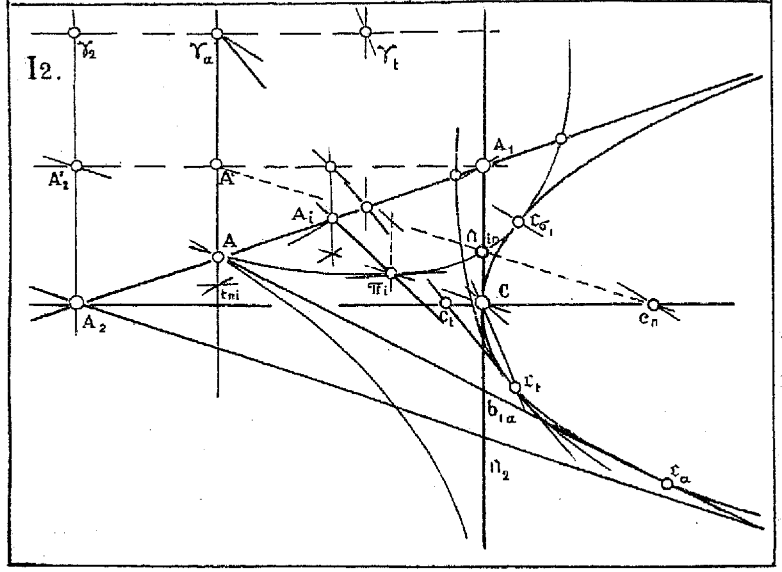
Oder in Zusammenfassung beider Eigenschaften: Jedem Kegelschnitt sind bezüglich der beiden anderen seiner Gruppe unendlich viele Dreiecke harmonischer Pole aufgeschrieben und unendlich viele Dreiseite harmonischer Polaren umgeschrieben. Weil je zwei Polarsysteme auf einer h. Polaren dieselbe Polinvolution haben und durch einen einzigen Punkt J auf einer solchen Geraden eine Curve dritter Ordnung bestimmt ist, so folgt sofort, dass jeder

Curve dritter Ordnung des syzygetischen Büschels dieselbe Curve dritter Classe der Schaar entspricht in allen sechs Polarsystemen.

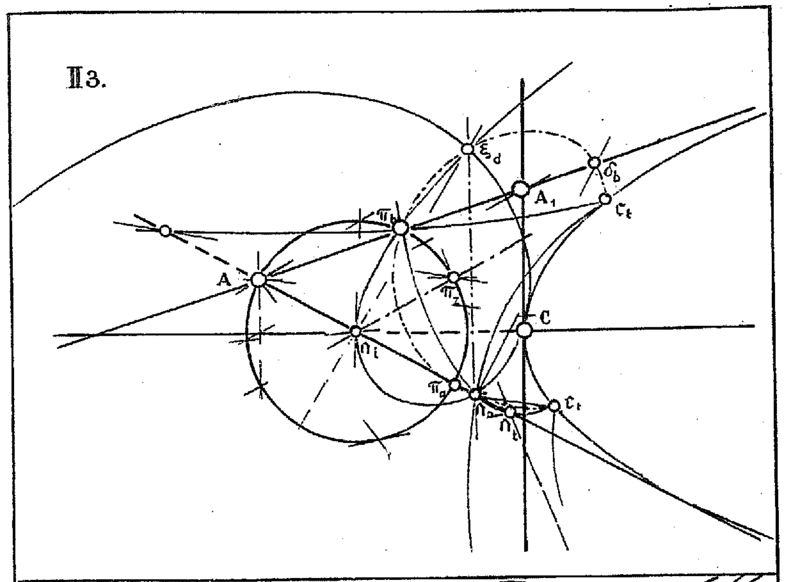
Aus den sechs Paaren syzygetischer Dreiecke entstehen sechs Gruppen von Polarsystemen, durch welche, man den Uebergang vom Büschel zur Schaar gewinnt; wir begnügen uns aber an dieser Stelle bloss auf diesen Zusammenhang hinzuweisen und erinnern nur noch, dass die genannten Directrixkegelschnitte je ein bestimmtes Steiner'sches Sechseck aus jeder Curve dritter Ordnung schneiden. Bezüglich des Dreieckes $H_1 H_2 H_3$ als fundamental, für H_0 als Einheitspunkt und h_0 als Einheitslinie sind aber die sechs Ecken jedes Steiner'schen Sechseckes für ein Paar reeller Wendepunkte als Fundamentalpunkte sechs Punkte permutirter Coordinaten. Es liegt darin ein natürlicher Anknüpfungspunkt der analytischen an die geometrische Methode, um die Resultate der Construction auch auf dem Wege der Rechnung zu bestätigen.

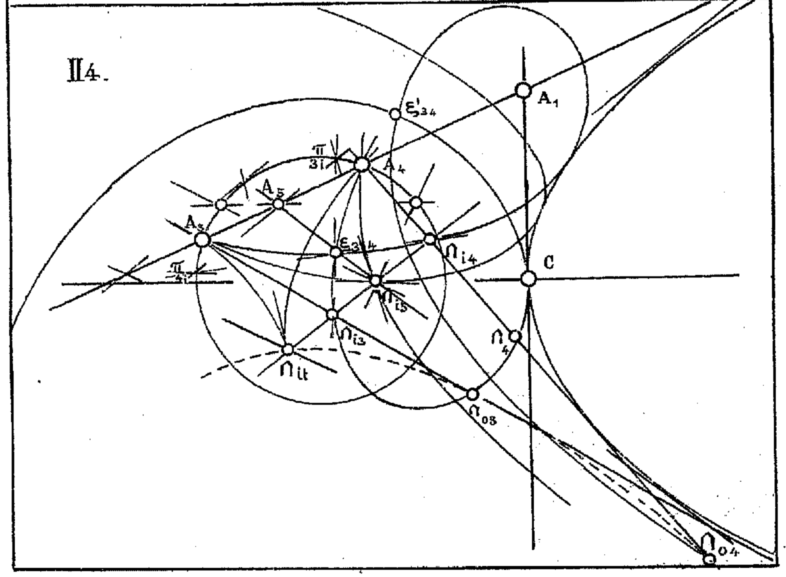
Maßregale.





Berührgliederung.





Ueberblick.