Ueber den Cauchy'schen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Von

F. Rudio.

Die algebraischen Beweise des Cauchy'schen Fundamentalsatzes (siehe z. B. Serret's Handbuch der höheren Algebra, deutsch von Wertheim, 2. Aufl. Bd. 1, Seite 97—107) enthalten eine Lücke, welche auszufüllen der Zweck der folgenden Zeilen ist.

Ich will zunächst kurz den Satz und seinen Beweis skizzieren.

Es sei

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = P + Qi$$

eine ganze rationale Funktion der komplexen Variabeln $z = x + yi$. Die Koefficienten a_i sind beliebige komplexe Zahlen, P und Q reelle ganze Funktionen der reellen Veränderlichen x, y. In der xy-Ebene sei ein beliebiges Flächenstück G gegeben, begrenzt durch eine geschlossene Kurve, die der einzigen Bedingung unterworfen sein soll, keinen Wurzelpunkt zu enthalten, d. h. keinen Punkt (x, y), für welchen P und Q gleichzeitig verschwinden. Durchläuft jetzt der Punkt $z = x + yi$ die Begrenzungslinie im positiven Sinne, bis er wieder zu der Ausgangsstelle zurückkehrt, so werden P, Q und folglich auch der Quotient $\frac{P}{Q}$ verschiedene Werte annehmen; insbesondere wird $\frac{P}{Q}$ allemal verschwinden, wenn P gleich Null wird.

Es möge nun bei dieser Wanderung von z der Quotient $\frac{P}{Q}$ beim Verschwinden k_1 mal vom Positiven zum Negativen und k_2 mal vom Negativen zum Positiven übergehen. Dann sagt der Cauchy'sche Satz:

Die Differenz $k_1 - k_2$, welche man den Excess nennt, ist allemal positiv und doppelt so gross als die Anzahl der im Innern des umlaufenen Flächenstückes G befindlichen Wurzeln der algebraischen Gleichung $f(z) = 0$.

Zum Beweise zeigt man zunächst, dass, wenn der Satz für zwei längs eines gemeinsamen Linienstückes zusammenstossende Gebiete gilt, er auch für das durch Entfernung dieses gemeinsamen Stückes entstehende Gesamtgebiet besteht; woraus sich dann sofort ergibt, dass der Cauchy'sche Satz für das ursprüngliche Flächengebiet G sicherlich dann als erwiesen angesehen werden darf, wenn man dasselbe derart in Teilgebiete zerlegen kann, dass für jedes derselben der Satz gültig ist. Nun lassen sich zunächst um die in dem Gebiete G etwa vorhandenen Wurzelpunkte der Gleichung $f(z) = 0$ Kreise K_i beschreiben, von denen keine zwei einander schneiden und welche überdies so klein sind, dass im Innern und auf der Peripherie eines jeden derselben jeweilen kein zweiter Wurzelpunkt auftritt. Für jede dieser Kreisflächen kann man dann leicht den Cauchy'schen Satz beweisen.

Das nach Ausschluss dieser kleinen Kreisflächen K_i von dem gegebenen Flächenstücke G übrig bleibende Gebiet G' enthält jetzt keine Wurzelpunkte mehr.

Von diesem Gebiete G' wird nun bei den üblichen Beweisen (s. Serret pag. 105—106) behauptet, es könne stets in Teilgebiete G_1', G_2', . . , zerlegt werden von folgender Beschaffenheit:

Enthält eines dieser Teilgebiete G_i' im Innern oder auf seiner Begrenzung auch nur einen einzigen Punkt, für welchen P verschwindet, so enthält es weder im Innern noch auf seiner Begrenzung einen Punkt, für welchen Q gleich Null ist.

Wird die Möglichkeit dieser Zerlegung zugegeben — und über diese Möglichkeit gehen die Beweise stets als über eine selbstverständliche hinweg — so folgt dann allerdings sofort, dass für das aus diesen Teilgebieten G_i' und jenen Kreisflächen K_i zusammengesetzte Gebiet G der Cauchy'sche Satz richtig ist.

Aber die Zerlegbarkeit des Gebietes G' in solche Teilgebiete G_i' ist nicht nur keine selbstverständliche, sondern sie lässt sich sogar, so lange die Natur der Funktionen P und Q nicht in Rechnung gezogen wird, gar nicht einmal erweisen, ebenso wenig, als sich etwa allgemein eine untere Grenze ohne weiteres als ein Minimum erweisen lässt. In der That ist es ein leichtes, Beispiele zu bilden, bei welchen jene Zerlegung unmöglich ist.

Die Zerlegung des Gebietes G' in die Gebiete G_i' repräsentiert vielmehr den eigentlichen transcendenten Teil in dem Beweise des Cauchy'schen Satzes und berührt somit den Nerv desselben. Da sich nämlich auf den Cauchy'schen Satz ohne weiteres der Fundamentalsatz der Algebra aufbauen lässt, so ist jener, wie dieser, zu den sogenannten Existenztheoremen zu rechnen. Die Beweise solcher Theoreme aber, welche auf die Existenz allgemeiner Zahlgrössen hinzielen, erfordern ihrer Natur nach in letzter Instanz notwendig transcendente Betrachtungen. Beweise, die nicht in letzter Instanz auf solchen Betrachtungen sich aufbauen, können nicht als ausreichend angesehen werden. Von dem in diesen Worten enthaltenen

Vorwurf kann, um ein Beispiel zu geben, der erste Gauss'sche Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra nicht freigesprochen werden. Denn indem Gauss den Inbegriff der etwa vorhandenen Punkte (x, y), für welche P (oder Q) verschwindet, ohne weiteres als eine algebraische Kurve anspricht, also implicite annimmt, dass die algebraische Gleichung $P = 0$ für jedes x eine Wurzel y besitze, setzt er eigentlich den zu beweisenden Fundamentalsatz der Algebra als schon bewiesen voraus.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehe ich nun zu der besprochenen Zerlegung des Gebietes G' über.

Nach Voraussetzung verschwindet $f(z)$ für keinen Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von G'. Infolge dessen ist die untere Grenze k, welche der absolute Betrag R von $f(z)$ nämlich:

$$|f(z)| = R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

für die genannten Punkte von G' annimmt, eine von Null verschiedene positive Grösse. Wegen der Stetigkeit von $R = R(x, y)$ muss es nämlich nach dem Weierstrass-schen Satze im Gebiete G' eine Stelle (x_0, y_0) geben, derart, dass $R(x_0, y_0) = k$ ist. Diese Stelle liegt notwendigerweise auf der Begrenzung von G', weil man sonst nach dem bekannten Argand'schen Satze (Annales de Gergonne, T. V.) in nächster Umgebung von (x_0, y_0), also ebenfalls im Innern von G', Punkte finden könnte, für welche R kleiner wäre als k. Für jeden Punkt (x, y) im Innern oder auf der Begrenzung von G' ist also:

$$\sqrt{P^2 + Q^2} \geqq k > 0.$$

Verschwindet daher für einen solchen Punkt die Funktion P, so muss für denselben notwendigerweise $|Q| \geqq k$ sein. Nun ist aber die Funktion Q (wie auch P) in dem Gebiete G' gleichmässig stetig. Infolge dessen kann man das ganze Gebiet G' derart mit einem Gitter, gebildet aus gleich grossen Quadraten, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen, überdecken — an der Grenze von G' werden natürlich nur Stücke von Quadraten auftreten — dass in jedem dieser Quadrate oder Quadratstücke die sogenannte Schwankung der Funktion Q kleiner ist als $\frac{k}{2}$. Greifen wir eines dieser Quadrate oder Quadratstücke — es heisse G_i' — heraus. Angenommen, für einen Punkt (x_1, y_1) im Innern oder auf der Begrenzung von G_i' verschwinde P. Dann folgt aus $P(x_1, y_1) = 0$ nach dem obigen, dass:

$$1) \qquad |Q(x_1, y_1)| \geqq k$$

sein muss. Nun ist aber für G_i' die Schwankung von Q kleiner als $\frac{k}{2}$, d. h. für jeden Punkt (x_2, y_2) im Innern oder auf der Grenze von G_i' ist:

$$2) \qquad |Q_1(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)| < \frac{k}{2}.$$

Aus 1) und 2) aber folgt:

$$3) \qquad |Q(x_2, y_2)| > \frac{k}{2}.$$

Wir sehen also:

Jedes dieser Teilgebiete G_i' hat die Eigenschaft, dass, wenn es im Innern oder auf seiner Begrenzung auch nur einen einzigen Punkt enthält, für welchen P verschwindet, es weder im Innern noch auf seiner Begrenzung einen Punkt enthalten kann, für welchen Q gleich Null wird. Damit ist aber die Zerlegbarkeit des Gebietes G' in Teilgebiete G_i' der geforderten Beschaffenheit bewiesen.

Zürich, 9. Dezember 1894.
