Bestimmung der Art eines durch fünf Punkte definierten Kegelschnittes.

Von

G. Stiner in Frauenfeld.

Mit Hülfe einer involutorischen Transformation dritter Ordnung ergab sich folgendes Kriterium zur Bestimmung der Art eines durch 5 Punkte definierten Kegelschnittes[1]): Die 5 Punkte seien in irgend einer Reihenfolge bezeichnet durch $A_1 \ldots A_5$. Der Kreis durch $A_1 A_2 A_3$ schneide die Gerade $A_5 A_3$ zum zweiten Mal in A_3'; der Kreis durch $A_1 A_2 A_4$ schneide die Gerade $A_5 A_4$ zum zweiten Mal in A_4'. Der Kegelschnitt ist dann Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem der Kreis durch $A_3' A_4' A_5$ die Gerade $A_1 A_2$ schneidet, berührt oder nicht schneidet. Zweck dieser Mitteilung ist, diesen Satz direkt elementar zu beweisen und die praktische Anwendung desselben zu zeigen.

1. O, A_1, A_2 seien 3 beliebige feste Punkte eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$; A_i sei ein veränderlicher Punkt desselben. Durch $A_1 A_2 A_i$ legt man einen Kreis und schneidet denselben mit der Geraden $O A_i$ zum zweiten Mal in A_i'. Es ist zunächst der Ort von A_i' zu suchen, wenn A_i den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durchläuft.

---

[1]) Man vergl.: „Zwei invol. Transf. mit Anwendungen" pag. 317 dieses Jahrgangs der Vierteljahrsschrift.

O sei Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Durch passende Drehung des Systems um O kann man bewirken, dass in der Gleichung des Kegelschnittes die Glieder mit x^2 und y^2 denselben Koeffizienten erhalten; die Gleichung hat also dann die Form:

$$a_{11}(x^2+y^2)+a_{12}\,xy+a_{13}\,x+a_{23}\,y=0.$$

Die Verbindungslinie g der Punkte A_1 und A_2 sei gegeben durch die Gleichung:

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0.$$

Ein beliebiger Kreis K durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ und g hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} &a_{11}(x^2+y^2)+a_{12}\,xy+a_{13}\,x+a_{23}\,y \\ &-\frac{a_{12}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha x+\beta y+\gamma)(\beta x+\alpha y+\lambda)=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Durch Variation von λ ergeben sich sämtliche Kreise des Büschels. Der Kreis K und der gegebene Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ haben 4 Punkte gemein. 2 Schnittpunkte sind A_1 und A_2; die 2 weitern seien A_i und A_{i1}. Letztere Punkte liegen auf der Geraden:

$$\beta x+\alpha y+\lambda=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Gleichung des Linienpaares, welches A_i und A_{i1} mit O verbindet, muss sich in folgender Form darstellen lassen:

$$\begin{aligned} &a_{11}(x^2+y^2)+a_{12}\,xy+a_{13}\,x+a_{23}\,y \\ &-(\beta x+\alpha y+\lambda)(a x+b y+c)=0, \end{aligned}$$

wo a, b und c 3 noch zu bestimmende Koeffizienten sind. Weil in dieser Gleichung nur quadratische Glieder vorkommen dürfen, so muss sein:

$$a=\frac{a_{13}}{\lambda},\ b=\frac{a_{23}}{\lambda},\ c=0$$

und die Gleichung des Linienpaares ist:

$$a_{11}(x^2+y^2)+a_{12}\,xy+a_{13}\,x+a_{23}\,y$$
$$-\frac{1}{\lambda}(\beta x+\alpha y+\lambda)(a_{13}\,x+a_{23}\,y)=0, \quad . \quad (3)$$

oder:

$$a_{11}(x^2+y^2)+a_{12}\,xy$$
$$-\frac{1}{\lambda}(\beta x+\alpha y)(a_{13}\,x+a_{23}\,y)=0 \quad . \quad . \quad (4)$$

Subtrahiert man (3) von (1), so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\lambda}(\beta x+\alpha y+\lambda)(a_{13}\,x+a_{23}\,y)$$
$$-\frac{a_{12}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha x+\beta y+\gamma)(\beta x+\alpha y+\lambda)=0,$$

d. h. die Punkte A_i' und A_{i1}' liegen auf der Geraden:

$$\frac{1}{\lambda}(a_{13}\,x+a_{23}\,y)-\frac{a_{12}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha x+\beta y+\gamma)=0 \quad (5)$$

Durch Elimination von λ aus (5) und (4) oder aus (5) und (1) ergiebt sich nach Abscheidung eines nicht wesentlichen Faktors:

$$a_{11}(x^2+y^2)+a_{12}\,xy$$
$$-\frac{a_{12}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha x+\beta y+\gamma)(\beta x+\alpha y)=0.$$

Dies ist die Gleichung eines durch O gehenden Kreises $\mathfrak{K}'$. Sie ist erfüllt für:

$$a_{11}(x^2+y^2)+a_{12}\,xy=0 \text{ und } \alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

d. h. der Kreis geht durch die Schnittpunkte der Geraden g mit dem Linienpaar, welches die unendlich fernen Punkte des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ mit O verbindet. Je nachdem also $\mathfrak{K}$ Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist, muss $\mathfrak{K}'$ die Linie g schneiden, berühren oder nicht schneiden.[1])

[1]) Der rein geometrische Beweis kann nach den analogen Gesichtspunkten geführt werden. Die einzige dabei auftretende

2. Für die praktische Verwendung des Satzes ist noch eine wichtige Bemerkung zu machen. Zur Bestimmung der Punkte A_3' und A_4' ist das Zeichnen der Umkreise der Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $A_1 A_2 A_4$ nicht notwendig; es genügt die Anwendung eines Lineals und eines rechten Winkels.

Es handelt sich in beiden Fällen um folgende Aufgabe: Durch die Ecke X eines Dreiecks XYZ ist eine beliebige Gerade g gezogen. Man konstruiere den zweiten Schnittpunkt von g mit dem Umkreis des Dreiecks XYZ. Die Lösung der Aufgabe ist, wie sich mit Hülfe des Peripheriewinkelsatzes leicht einsehen lässt, folgende: Man errichte in X die Senkrechte zu g bis zum Schnittpunkt mit YZ, ebenso in Y die Senkrechte auf YZ bis zum Schnittpunkt mit g. Zur Verbindungslinie der erhaltenen Schnittpunkte zieht man durch Z die Parallele; letztere schneidet g in dem gesuchten Punkt.

Schwierigkeit bietet wohl der Nachweis der Eigenschaft, dass die Linien $b_i' = A_i' A_{i1}'$ ein Büschel bilden, welches zum Büschel der Linien $b_i = A_i A_{i1}$ projektiv ist (Gleichungen (2) und (5)). Der Strahl b_i' kann nun so konstruiert werden: Ist s_i die Polare von O in Bezug auf den Kreis K, zu welchem b_i und b_i' gehören, so geht b_i' durch den Schnittpunkt $b_i s_i$ und ist der vierte harmonische Strahl zu b_i in Bezug auf s_i und die Verbindungslinie mit O. Die Polaren s_i für alle Kreise des Büschels bilden ein Strahlbüschel vom Scheitel S; durch die Kreise des Büschels sind die Polaren s_i den Geraden b_i projektiv zugeordnet. Der Schnittpunkt $b_i s_i = B_i$ beschreibt daher einen Kegelschnitt. Letzterer geht durch S, O und den Punkt R_∞, die gemeinsame Richtung der Linien b_i. Die Linien b_i' gehen also durch den vierten harmonischen Punkt dieses Kegelschnittes zu R_∞ in Bezug auf S und O und sind durch diesen Kegelschnitt den Linien b_i projektiv zugeordnet.

Zur Konstruktion der Punkte A_3' und A_4' hat man also bloss 3 Mal in einem Punkt zu einer Geraden die Senkrechte und 2 Mal durch einen Punkt zu einer Geraden die Parallele zu ziehen.

Zu bemerken ist noch, dass das eingangs aufgestellte Kriterium einfache Lösungen für verwandte Aufgaben liefert, z. B. Bestimmung der Axenrichtungen der Parabeln durch 4 Punkte, Bestimmung der Asymptotenrichtungen der Hyperbeln durch 4 Punkte mit vorgeschriebenem Asymptotenwinkel.