Der Einfluss der Schienenstösse auf die gaukelnden Bewegungen der Lokomotiven.

Von

A. Fliegner.

Mit der Benennung der „gaukelnden Bewegungen“ bezeichnet man die regelmässigen Schwingungen, welche der in den Federn hängende Oberbau der Lokomotiven während der Fahrt ausführt. Diese Bewegungen haben verschiedene Veranlassungen, nämlich: 1) die Zugkraft und den Zugwiderstand, die am Oberbau in verschiedenen Höhen angreifen, 2) die Normalpressungen zwischen den Kreuzköpfen und den Führungslinealen, 3) bei geneigter Lage der Cylinderachsen die vertikalen Komponenten des Dampfdruckes gegen die Deckel und Böden der Cylinder und endlich 4) die Einwirkungen von Unstetigkeiten und der Elasticität der Schienen. Ausserdem werden die gaukelnden Bewegungen noch wesentlich durch die zwischen den Achsen und dem Oberbau eingeschalteten Federn beeinflusst.

Da die Federn so angeordnet sind, dass durch sie nur Kräfte in vertikaler Richtung auf den Oberbau übertragen werden können, so können an ihm auch nur Bewegungen in dieser Richtung auftreten. Es sind daher nur drei Arten von gaukelnden Bewegungen möglich: 1) vertikale Schwingungen des Schwerpunktes, das Wogen, 2) Oscillationen um eine horizontale Querachse durch den Schwerpunkt, das Galoppieren, Nicken oder Stampfen und 3) Oscillationen um eine horizontale Längenachse, das Wanken oder Schwanken.

Die gaukelnden Bewegungen sind zuerst von Redtenbacher genauer untersucht worden; er hat aber seine sonst richtigen Gleichungen falsch verwertet. Auf diesen Fehler ist schon durch

E. Zech [1]) bei Gelegenheit einer Besprechung von Redtenbacher's „Gesetzen des Lokomotivbaues“ aufmerksam gemacht worden. Zech giebt dabei in einer Anmerkung eine richtige Gleichung für die Bewegung des Wankens, aber mit einer unendlichen Reihe. Die gleiche Bewegung hat dann Zeuner [2]) ausführlich und in anderer Form, mit endlichen Ausdrücken, untersucht. Schliesslich sind noch sämtliche gaukelnde Bewegungen von Einbeck [3]) behandelt worden; die Gleichungen für das Wogen und Galoppieren erscheinen bei ihm aber nicht in der allgemeinsten möglichen Gestalt.

In fast allen diesen Untersuchungen wird der Einfluss des Geleises auf die gaukelnden Bewegungen unberücksichtigt gelassen. Nur Redtenbacher führt ihn „durch periodisch wiederkehrende Funktionen der Zeit“ ein, und zwar in zwei Ausdrücken von der Form:

$$A\,(\sin \lambda t + \cos \lambda t) \text{ und } B\,(\sin \mu t + \cos \mu t),$$

den einen für die senkrechten Stösse an den Schienenverbindungen, den anderen für die seitlichen Verschiebungen durch Unebenheiten der Bahn. Ganz abgesehen von der analytischen Gestalt der beiden Ausdrücke ist gegen diese Auffassung doch das Bedenken zu erheben, dass durch seitliche Verschiebungen der Räder auf den Schienen keine senkrechten Bewegungen des Oberbaues hervorgerufen werden können. Diese seitlichen Verschiebungen beeinflussen vielmehr die schlingernde Bewegung der ganzen Lokomotive. Ausserdem führt Redtenbacher diese Glieder nur bei der Untersuchung des Wankens ein, und gerade dort fällt, wie ich noch später nachweisen werde, der allein übrig bleibende Einfluss der Schienenstösse ganz fort, wenigstens bei den jetzt gebräuchlichen Anordnungen des Geleises.

Zeuner sagt umgekehrt: „Der Einfluss dieser regelmässig wiederkehrenden, kurzen Stösse auf die Schwingungen des in den Federn hängenden Baues entzieht sich bis jetzt vollständig der analytischen Behandlung“. Das ist auch richtig, wenn es sich um

[1]) Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines 1857, S. 97—106.

[2]) Programm des eidgenössischen Polytechnikums in Zürich für das Jahr 1861/62.

[3]) Theoretische Untersuchung der Konstruktionssysteme des Unterbaues von Lokomotiven. Leipzig, Leopold Voss, 1875.

eine genaue, namentlich zahlenmässige Berechnung dieses Einflusses handeln sollte. Begnügt man sich dagegen mit einer allgemeineren Beantwortung der Frage, so lässt sich der Einfluss des Geleises auf die gaukelnden Bewegungen doch bis zu einem gewissen Grade auf dem Wege der Rechnung verfolgen.

Da aber eine genaue Entwickelung ausgeschlossen ist, so sollen der folgenden Untersuchung von vornherein einige vereinfachende Annahmen zu Grunde gelegt werden, damit die Formeln nicht gar zu schwülstig ausfallen. Die eine dieser Vereinfachungen ist die, dass eine Lokomotive mit nur zwei Achsen vorausgesetzt werden soll, die an der vorderen Achse zwei Längsfedern, an der hinteren dagegen eine Querfeder besitzt. Der Oberbau ist dadurch in nur drei Punkten unterstützt, eine Anordnung, wie sie sich z. B. bei einer Anzahl von Lokomotiven der Schweizerischen Nordostbahn ausgeführt findet. Diese Annahme verkleinert nur die Anzahl der Glieder der Formeln, hat aber keine wesentlichen Aenderungen zur Folge. Ferner sollen die Cylinderachsen genau horizontal vorausgesetzt werden, so dass der Dampfdruck gegen die Böden und Deckel der Cylinder keine vertikale Komponente besitzt. Andere, weitergehende Annäherungen werden zweckmässiger erst im Verlaufe der folgenden Entwickelungen eingeführt.

Da ich nicht voraussetzen kann, dass die Litteratur über die gaukelnden Bewegungen überall zur Hand ist, und da ich ausserdem andere Bezeichnungen und eine von den Vorgängern abweichende Darstellungsweise benutze, so bin ich genötigt, die ganze Formelentwickelung von Anfang an durchzuführen. Ich fasse mich dabei aber möglichst kurz.

Zunächst muss ich die verschiedenen Kräfte einzeln besprechen, die bei den gaukelnden Bewegungen mitwirken.

§ 1. Zugkraft und Zugwiderstand.

Die Zugkraft der Lokomotiven kommt zu stande durch das Zusammenwirken des Dampfes in den Cylindern und der Reibung zwischen den Triebrädern und den Schienen.

Um zunächst die Einwirkung des Dampfes in die Formeln einführen zu können, muss man sich die angenäherte Annahme gestatten, dass sich der veränderliche Ueberdruck des Dampfes auf den Kolben mit dem Beharrungsvermögen der hin- und hergehenden Massen zu einer während des ganzen Kolbenhubes konstanten Kraft P vereinigt. Gleichzeitig muss man voraussetzen, dass diese Kraft P stets auf beiden Seiten nicht nur jedes Cylinders, sondern auch der Lokomotive gleich gross sei.

Die Kraft P pflanzt sich durch die Kolbenstange bis an den Kreuzkopfzapfen fort und zerlegt sich dort in zwei Komponenten, die eine:

$$N' = P \operatorname{tang} \alpha \tag{1}$$

senkrecht zu den Führungslinealen und die andere:

$$K = \frac{P}{\cos \alpha} \tag{2}$$

in der Richtung der Kurbelstange, wo α den Winkel bezeichnet, den die Richtung der Kurbelstange mit der Achsrichtung des Cylinders einschliesst. N' wirkt bei Erzeugung der Zugkraft nicht mit, sondern nur K, das sich durch die Kurbelstange bis an die Kurbelwarze fortpflanzt. Transportiert man K von dort unter Anbringung einer Gegenkraft an die Achse des Triebrades, so zerlegt sich die transportierte Kraft in N' senkrecht abwärts, die von der Schiene aufgenommen wird, und in P horizontal, die mit dem Dampfdrucke auf den Boden oder Deckel des Cylinders den Rahmen der Lokomotive auf Druck oder Zug beansprucht.

Als Einwirkung der Dampfkraft auf Bewegung der Lokomotive bleibt also nur das Kräftepaar der K übrig. Sein Moment wird, wenn r die Länge des Kurbelradius bezeichnet und wenn man den Drehwinkel φ der Kurbel nach jedem toten Punkte frisch von Null an zu zählen beginnt:

$$P r \frac{\sin (\varphi \mp \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Dabei gilt das obere Vorzeichen für den oberen, das untere für den unteren Halbkreis der Kurbel. Betrachtet man die Lokomotive von ihrer rechten Seite und setzt Fahrt nach vorwärts voraus, so wirkt dieses Kräftepaar während der ganzen Umdrehung im Sinne des Uhrzeigers.

Der durch das Kräftepaar der Dampfkraft erstrebten Drehung des Rades wirkt der Reibungswiderstand zwischen Radumfang und

Schiene entgegen, indem er am tiefsten Punkte des Rades eine horizontale, nach vorwärts zu gerichtete Kraft Z' hervorruft. Wenn man diese auch nach der Achse transportiert, so entsteht ein dem Kräftepaare der Dampfkraft gleiches, aber entgegengesetztes Kräftepaar, und an der Achse des Rades bleibt die transportierte, horizontal nach vorn wirkende Kraft Z' übrig. Bezeichnet man den Halbmesser des Rades mit R, so wird aus der Gleichheit der Kräftepaare:

$$Z' = P \frac{r}{R} \frac{\sin(\varphi \mp \alpha)}{\cos \alpha} = P \frac{r}{R} (\sin \varphi \mp \cos \varphi \operatorname{tang} \alpha),$$

und das ist die Zugkraft der Lokomotive, soweit sie auf einer Seite erzeugt wird.

Hier muss man nun eine weitere Annäherung zulassen. Der Winkel α zwischen der Richtung der Kurbelstange und der Achse des Dampfcylinders bleibt, namentlich bei Lokomotiven, stets sehr klein, da die Länge l der Kurbelstange kaum mehr unter dem Sechsfachen der Länge r des Kurbelradius ausgeführt wird. Man kann daher angenähert setzen:

$$\operatorname{tang} \alpha \backsim \sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \varphi. \tag{3}$$

Das giebt nach einfacher Umformung für die Zugkraft:

$$Z' = P \frac{r}{R} \left(\sin \varphi \mp \frac{r}{2\,l} \sin 2\,\varphi\right). \tag{4}$$

Hat die Lokomotive mehrere Triebachsen, so verteilt sich diese Zugkraft auf alle, ihr Gesamtwert bleibt aber gleich Z' aus Gleichung (4). Dabei ist allerdings vorausgesetzt, die Triebachsen seien genügend belastet, so dass ein Schleudern der Lokomotive mit Sicherheit ausgeschlossen bleibt.

Z' ist die Zugkraft auf einer Seite der Lokomotive. Auf der anderen Seite wirkt eine gleiche Zugkraft, nur mit verschobenen Phasen, da die beiden Kurbeln gegenseitig einen rechten Winkel einschliessen. Um die beidseitigen Zugkräfte mit einander vereinigen zu können, ist es besser, Z' so umzuformen, dass der Winkel φ in jedem Quadranten frisch von Null an bis 90^0 gezählt wird. Dabei sollen die Quadranten jeder Kurbel als hinten-oben, oben-vorn, vorn-unten und unten-hinten durch die Indices *ho*, *ov*, *vu* und *uh* unterschieden werden. Man erhält so Z'_{ho} und

Z'_{vu} unmittelbar aus Gleichung (4) für das obere oder untere Vorzeichen des zweiten Gliedes, Z'_{ov} und Z'_{uh} dagegen, indem man φ durch $90^0 + \varphi$ ersetzt. Das giebt:

$$(5) \quad \begin{cases} Z'_{ho} = P\frac{r}{R}\left(\sin\varphi - \frac{r}{2\,l}\sin 2\,\varphi\right), \\ Z'_{ov} = P\frac{r}{R}\left(\cos\varphi + \frac{r}{2\,l}\sin 2\,\varphi\right), \\ Z'_{vu} = P\frac{r}{R}\left(\sin\varphi + \frac{r}{2\,l}\sin 2\,\varphi\right), \\ Z'_{uh} = P\frac{r}{R}\left(\cos\varphi - \frac{r}{2\,l}\sin 2\,\varphi\right). \end{cases}$$

Die weitere Entwickelung gestaltet sich nun am einfachsten, wenn man die ganze Zugkraft der Lokomotive darstellt in Funktion der Richtung der Halbierungslinie des rechten Winkels zwischen den beiden Kurbeln. Dabei muss φ von den unter 45^0 gegen die Horizontale und Vertikale geneigten Linien gezählt werden, und die vier Quadranten der Halbierungslinie sind der hintere, h, der obere, o, der vordere, v, und der untere, u. Die ganze Zugkraft der Lokomotive ist stets die Summe der beidseitigen einzelnen Zugkräfte, und man erhält sie, indem man je zwei benachbarte Ausdrücke aus den Gleichungen (5) addiert. Als Index muss man den hinzufügen, der in beiden Summanden gleichzeitig auftritt. So findet sich:

$$(6) \quad \begin{cases} Z_h = P\frac{r}{R}\left(\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{r}{l}\sin 2\,\varphi\right), \\ Z_o = Z_u = P\frac{r}{R}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right), \\ Z_v = P\frac{r}{R}\left(\cos\varphi + \sin\varphi + \frac{r}{l}\sin 2\,\varphi\right). \end{cases}$$

In dieser Weise dargestellt wird die ganze Zugkraft unabhängig davon, welche der beiden Kurbeln der andern voreilt.

Der Wert von Z lässt sich für alle Quadranten gemeinschaftlich durch einen einzigen Ausdruck darstellen, wenn man die Ordnungsnummer n der Quadranten einführt und dabei für den unteren Quadranten der Halbierungslinie mit $n = 0$ zu zählen bebeginnt. Man muss dann in dem Gliede mit $\sin 2\,\varphi$ noch den Faktor $\sin n\pi/2$ hinzufügen und erhält:

$$Z = P\frac{r}{R}\left(\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{r}{l}\sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi\right). \tag{7}$$

Weiterhin soll nun angenommen werden, dass die Eigenwiderstände der eigentlichen Maschine und ausserdem auch noch die rollende Reibung der Triebräder auf den Schienen als angenähert konstanter Rückdruck am Kolben bei P schon abgezogen seien. Dann wird Z wirklich von den Triebrädern in ihrer Achshöhe auf den in den Federn hängenden Oberbau der Lokomotive übertragen. Und da die Triebachsen stets tiefer liegen, als der Schwerpunkt des Oberbaues, so übt die Kraft Z auf diesen ein Drehmoment um seine horizontale Querachse aus, das bei Fahrt nach vorwärts den vorderen Teil der Lokomotive zu heben sucht. Z beeinflusst also die Bewegung des Galoppierens.

Wesentlich gleichartig wirkt der Zugwiderstand. Diesen führen nun Redtenbacher und Einbeck einfach als konstante, horizontal nach rückwärts gerichtete Kraft ein. Das halte ich aber nicht für richtig.

Der Zugwiderstand, soweit er auf den Oberbau der Lokomotive einwirkt, setzt sich aus zwei verschiedenen Teilen zusammen. Der eine ist der auf den Oberbau entfallende Luftwiderstand, der unbedenklich konstant angenommen werden darf. Der andere Teil ist der durch den ganzen übrigen Zug verursachte Widerstand am Zughaken der Lokomotive, und dieser ist in Wirklichkeit nicht konstant. Wenn nämlich die veränderliche Zugkraft z. B. gerade grösser ist, als ihr Mittelwert, so wird die Lokomotive dem übrigen Zuge etwas voreilen. Dadurch wird aber die stets elastische Kuppelung zwischen der Lokomotive und dem nächsten Wagen etwas angezogen und also der Widerstand am Zughaken der Lokomotive vergrössert. Ist umgekehrt die Zugkraft kleiner als ihr Mittelwert, so bleibt die Lokomotive infolge ihrer grösseren Eigenwiderstände gegenüber den Wagen etwas zurück, wodurch die Anspannung der Kuppelung gelockert wird. Wenn man diese Verhältnisse genauer rechnerisch verfolgen wollte, so müsste man die Massen der einzelnen Fahrzeuge des Zuges und die Elasticitätsverhältnisse der einzelnen Zugvorrichtungen kennen. Bei der vorliegenden Untersuchung spielt aber die Veränderlichkeit der Zugkraft eine untergeordnete Rolle, und es soll daher zur Vereinfachung der Formeln angenommen werden, dass der Luftwiderstand auf den Oberbau der Lokomotive genügend klein bleibt, um gegenüber den anderen Kräften vernachlässigt werden zu dürfen, und dass sich der Widerstand am Zughaken der Lokomotive in jedem Augenblicke gleich der Zugkraft einstellt, dass also diese beiden Kräfte ein veränderliches Kräftepaar bilden. Ist dann h die Höhe des Zughakens über den Triebachsen, so wird das Moment dieses Paares:

$$\mathfrak{N}_1 = P \frac{r h}{R} \left(\cos \varphi + \sin \varphi - \frac{r}{l} \sin n \frac{\pi}{2} \sin 2 \varphi\right). \tag{8}$$

So lange dieses Moment positiv ist, wirkt es auf Heben des vorderen Teiles der Lokomotive.

Die beiden anderen gaukelnden Bewegungen sind von der Zugkraft und dem Zugwiderstande ganz unabhängig.

§ 2. Die Linealpressungen.

Die gaukelnden Bewegungen der Lokomotiven werden namentlich hervorgerufen durch die senkrecht zu den Führungslinealen gerichteten Kräfte N', die sich in Gleichung (1) bei Zerlegung des Dampfüberdruckes P am Kreuzkopfe ergeben hatten. Man kann aber mit dem genauen Ausdrucke für N' nicht weiter rechnen, muss vielmehr auch hier die schon in Gleichung (3) eingeführte Annäherung zulassen. Damit wird:

$$N' = P \frac{r}{l} \sin \varphi. \tag{9}$$

In den toten Punkten der Kurbel ändern P und $\sin \varphi$ gleichzeitig ihr Vorzeichen, wenn man φ von Null bis 2π zählt; N ändert also sein Vorzeichen nicht und wirkt bei Fahrt nach vorwärts ununterbrochen nach aufwärts.

Um die beidseitigen Linealpressungen zusammensetzen zu können, muss man auch hier den Ausdruck für N' so umformen, dass φ in jedem Quadranten frisch von Null bis 90^0 gezählt wird. Das giebt mit den früheren Bezeichnungen zunächst für jede Seite der Lokomotive:

$$\left\{\begin{aligned} N'_{ho} &= N'_{vu} = P \frac{r}{l} \sin \varphi, \\ N'_{ov} &= N'_{uh} = P \frac{r}{l} \cos \varphi. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Diese Kräfte müssen von beiden Seiten unter Anbringung von Gegenkräften nach dem Schwerpunkte des in den Federn hängenden Teiles der Lokomotive transportiert werden. Dabei sollen die resultierenden Kraftwirkungen wieder auf die Richtung der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden Kurbeln bezogen werden. Dann ergeben zunächst die transportierten Kräfte im Schwerpunkte eine nach oben gerichtete Kraft gleich der Summe je zweier benachbarter Werte von N' aus den Gleichungen (10), also:

$$(11) \qquad N_h = N_o = N_v = N_u = P \frac{r}{l} (\cos \varphi + \sin \varphi) \equiv N.$$

Bei dem Transporte der N an den Schwerpunkt des Oberbaues entstehen Kräftepaare, die in vertikalen, aber gegenüber der Lokomotive schrägen und veränderlichen Ebenen wirken. Es ist daher besser, sie in je zwei bequemer liegende Paare zu zerlegen, und zwar in ein Paar, das um die horizontale Querachse und in ein anderes, das um die horizontale Längenachse der Lokomotive dreht. Das erste Paar erzeugt das Galoppieren, das zweite das Wanken.

Das Moment des ersten, um die Querachse drehenden Paares wird für eine Seite der Lokomotive, wenn s_2 den horizontalen Abstand der hinteren, der Haupttriebachse hinter dem Schwerpunkte des Oberbaues bezeichnet:

$$\mathfrak{N}' = N' (l \cos \alpha \mp r \cos \varphi - s_2).$$

Das doppelte Vorzeichen des zweiten Gliedes gilt wieder für die beiden Halbkreise der Kurbel. Hier ist zunächst nötig, angenähert:

$$\cos \alpha \backsim 1$$

zu setzen. Führt man dann noch N' aus Gleichung (9) ein, so folgt, wenn man gleich $\sin \varphi / l$ in die Klammer hineinnimmt:

$$(12) \qquad \mathfrak{N}' = P r \left(\frac{l - s_2}{l} \sin \varphi \mp \frac{r}{2\,l} \sin 2\,\varphi\right).$$

In diesem Ausdrucke tritt der Winkel φ gleich auf, wie in Gleichung (4) für die Zugkraft Z'. Zählt man ihn jetzt hier auch in jedem Quadranten frisch, bildet die beidseitigen Werte von $\mathfrak{N}'$, wie in den Gleichungen (5) und addiert dann je zwei benachbarte, so erhält man für das ganze Moment, bezogen auf die Richtung der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden Kurbeln, ähnlich wie in Gleichung (8):

$$(13)\quad \mathfrak{N}_2 = Pr\left[\frac{l-s_2}{l}(\cos\varphi+\sin\varphi) - \frac{r}{l}\sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi\right].$$

Das zweite beim Transporte der Linealpressungen entstehende Kräftepaar dreht um die horizontale Längenachse der Lokomotive. Um sein Moment berechnen zu können, muss man die beiden Seiten der Lokomotive unterscheiden, und das soll hier so geschehen, dass sie vom Führerstande aus gesehen als linke und rechte mit dem Index l und r bezeichnet werden. Ist dann c der Abstand der Cylinderachsen von der vertikalen Längensymmetrieebene der Lokomotive, so wird das im Sinne des Uhrzeigers positiv gerechnete Moment:

$$\mathfrak{M}' = (N_l - N_r)\,c.$$

Für N_l und N_r sind hier stets die Werte von zwei benachbarten Quadranten einzusetzen, von welchen, hängt aber von der Reihenfolge der Kurbeln ab. Es soll nun angenommen werden, die linke Kurbel eile der rechten nach, dann ist N_l immer für den N_r folgenden Quadranten zu nehmen. Setzt man die N aus den Gleichungen (10) ein und bezieht das Moment wieder auf die Richtung der Halbierungslinie des Winkels zwischen den Kurbeln, so findet man:

$$\mathfrak{M}_h = \mathfrak{M}_v = P\frac{r}{l}(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

$$\mathfrak{M}_o = \mathfrak{M}_u = P\frac{r}{l}(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Beide Ausdrücke kann man in den einen zusammenfassen:

$$(14)\qquad \mathfrak{M}_2 = \pm P\frac{r}{l}(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Die Annahme, dass die linke Kurbel voreilt, hätte das Vorzeichen in $\mp$ geändert.

Der absolute Wert des Momentes $\mathfrak{M}$ verläuft also in allen Quadranten gleich, nur tritt jedesmal, wenn eine der Kurbeln einen ihrer toten Punkte überschreitet, ein Vorzeichenwechsel auf.

§ 3. Die Federung.

Die Masse des in den Federn hängenden Oberbaues der Lokomotive sei M, sein Gewicht also Mg. Davon trage die vordere Achse den Teil $M_1 g$, die hintere $M_2 g$. Sind dann s_1 und s_2 die horizontal gemessenen Abstände der Achsen vom Schwerpunkte des Oberbaues, so bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

$$(15) \qquad M_1 g + M_2 g = Mg, \;\; M_1 g s_1 = M_2 g s_2.$$

Das Gewicht $M_1 g$ verteilt sich, wie man unbedingt annehmen darf, zu gleichen Teilen auf die beiden vorderen Längsfedern, so dass also auf jede $\frac{1}{2} M_1 g$ kommt. $M_2 g$ wird dagegen ganz von der hinteren Querfeder aufgenommen. Diese Lastverteilung gilt aber nur für die ruhende Lokomotive. Dabei biegen sich die Federn gegenüber dem unbelasteten Zustande um einen gewissen Betrag ein, und es soll nun hier die vereinfachende Annahme gemacht werden, dass diese Einbiegungen bei allen drei Federn gegenseitig gleich gross seien. Sie mögen mit f bezeichnet werden.

Da die Federn nur innerhalb der Elasticitätsgrenze beansprucht werden, so kann man zwischen den Belastungen der Ruhe und den zugehörigen Einsenkungen die Gleichungen aufstellen:

$$(16) \qquad \frac{1}{2} M_1 g = \varepsilon_1 f, \quad M_2 g = \varepsilon_2 f,$$

worin ε_1 und ε_2 Elasticitätskoefficienten der Federn bedeuten. Setzt man diese Werte in die Gleichungen (15) ein, so erhält man:

$$(17) \qquad (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) f = Mg,$$

$$(18) \qquad 2\varepsilon_1 s_1 = \varepsilon_2 s_2.$$

Für die weitere Entwickelung soll ein festes Koordinatensystem eingeführt werden. Sein Anfangspunkt möge mit dem Schwerpunkte des Oberbaues bei ruhender Lokomotive zusammenfallen, die x-Achse vertikal nach aufwärts, die y-Achse horizontal nach rechts, die z-Achse horizontal nach vorn gerichtet sein. In einem beliebigen Augenblicke habe sich durch die gaukelnden Bewegungen der Schwerpunkt um x aus seiner Ruhelage gehoben, sei die vertikale Symmetrieebene des Oberbaues um den Winkel χ von rückwärts gesehen im Sinne des Uhrzeigers geneigt, während sich die Längenachse vorn gehoben habe, so dass sie mit der Horizontalen einen Winkel ψ einschliesst. Durch diese Lagenänderung des Oberbaues ändern sich die Einbiegungen der Federn, also auch die Pressungen, die sie auf den Oberbau ausüben. Diese geänderten Pressungen, sollen mit X bezeichnet und durch die zugehörigen, schon benutzten Indices unterschieden werden. Die genauen Ausdrücke für die X würden aber trigonometrische Funktionen der Winkel χ und ψ enthalten. Will man diese vermeiden, um überhaupt für die gaukelnden Bewegungen auf integrabele Ausdrücke zu kommen, so muss man annehmen, dass die Winkelausschläge genügend klein bleiben, um den sin durch den Bogen ersetzen zu dürfen. Bezeichnet man noch die horizontalen Abstände der vorderen Längsfedern von der vertikalen Längensymmetrieebene der Lokomotive mit e, so findet man für die Kräfte X:

$$(19) \qquad \begin{cases} X_{1,r} = \varepsilon_1 \, (f - x + e\chi - s_1\psi), \\ X_{1,l} = \varepsilon_1 \, (f - x - e\chi - s_1\psi), \\ X_2 = \varepsilon_2 \, (f - x + s_2\psi). \end{cases}$$

Transportiert man diese Kräfte an den Schwerpunkt des Oberbaues der Lokomotive, so erhält man dort als ihre algebraische Summe eine nach aufwärts gerichtete Kraft X, die unter Berücksichtigung der Gleichungen (17) und (18) und mit der kürzeren Bezeichnung:

$$(20) \qquad 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$$

den Wert annimmt:

$$(21) \qquad X = Mg - \varepsilon x.$$

Beim Transport der Kräfte X entsteht zunächst ein Kräftepaar, das den Oberbau um eine horizontale Querachse zu drehen strebt. Die gleichartig drehenden Kräftepaare sind früher als positiv eingeführt worden, wenn sie auf ein Heben des vorderen Teiles der Lokomotive wirken. Daher wird hier:

$$\mathfrak{N}_3 = (X_{1,r} + X_{1,l})\, s_1 - X_2\, s_2.$$

Setzt man die X aus den Gleichungen (19) ein und berücksichtigt Gleichung (18), so fällt $f-x$ ganz weg, und man erhält mit Einführung einer einfacheren Bezeichnung:

$$\mathfrak{N}_3 = -(2\varepsilon_1 s_1^2 + \varepsilon_2 s_2^2)\,\psi \equiv -\xi^2\psi. \tag{22}$$

Das zweite Kräftepaar dreht um die horizontale Längenachse des Oberbaues. Rechnet man es, wie früher, positiv, wenn es vom Führerstande aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers dreht, so wird sein Moment:

$$\mathfrak{M}_3 = (X_{1,l} - X_{1,r})\,e.$$

X_2 kommt hier nicht in Betracht, weil es in der Mitte der Breite der Lokomotive angreift. Mit den Gleichungen (19) wird $\mathfrak{M}_3$:

$$\mathfrak{M}_3 = -2\varepsilon_1 e^2 \chi. \tag{23}$$

§ 4. Die Schienenstösse.

Die Schienenstösse und andere Unregelmässigkeiten der Schienen und des Geleises können die gaukelnden Bewegungen nur dann beeinflussen, wenn sie Bewegungen der Räder und Achsen in vertikaler Richtung hervorrufen. Solche Bewegungen übertragen sich durch die Achsbüchsen auf die Federn und ändern deren Einbiegungen und Spannungen und damit die auf den Oberbau wirkenden Kräfte. Man muss also das Gesetz der Vertikalbewegungen der Räder aufsuchen. Dabei soll zunächst angenommen werden, die Schienen seien auf Langschwellen verlegt und diese so gut mit Schotter unterstopft, dass eine eigentliche Durchbiegung der Schienen und des ganzen Bahnoberbaues ausgeschlossen ist. Trotzdem findet infolge der Elasticität der Materialien eine Gestaltsänderung statt, indem sich das Rad an der Berührungsstelle etwas abplattet, während die Schiene an ihrem Kopfe eine Eindrückung erfährt. Das in Wirklichkeit belastete Rad steht also tiefer, als wenn es ganz unbelastet wäre, und zwar um so tiefer, je stärker es belastet ist. Diese Belastung ändert sich nun während der Fahrt ununterbrochen, veranlasst durch die Kräfte, die bei den gaukelnden Bewegungen beteiligt sind und ferner durch die Gegengewichte an den Triebrädern. Die ersten Einwirkungen bleiben aber stets klein und dürfen daher hier unbedenklich vernachlässigt werden, die Centrifugalkräfte der Gegengewichte können dagegen gelegentlich sehr gross ausfallen. Um aber keine zu verwickelten Formeln zu erhalten, soll ausdrücklich angenommen werden, dass die Lokomotive für Unveränderlichkeit der Belastung der Triebräder balanciert ist, eine Anordnung, die sich auch ausgeführt findet, wenn auch selten. Dann bleibt also der Raddruck konstant.

Von den übrigen Grössen, von denen die Gestaltsänderungen abhängen, sind zwei, nämlich der Raddurchmesser und die Elasticität der Materialien, an und für sich konstant, während die dritte, die Geschwindigkeit der Fahrt, auch als konstant angenommen werden muss, da alle solche Untersuchungen nur für gleichförmigen Beharrungszustand durchgeführt werden können. Dabei ist die Geschwindigkeit deswegen von Einfluss, weil die Ausbildung der vollständigen Gestaltsänderungen stets eine gewisse Zeit erfordert.

Steht nun ein belastetes Rad zunächst ruhig auf einer Schiene, und zwar hinreichend weit von jedem Endpunkte der Schiene entfernt, so wird sich eine Gestaltsänderung ausbilden, welche die Senkrechte vom Mittelpunkte des Rades auf die Richtung der Schiene zur Symmetrieachse hat, und man wird auch annehmen dürfen, dass die neuen Profilkurven beidseitig tangierend in die alten übergehen. Die Berührung zwischen Rad und Schiene erreicht dabei eine endliche Länge. Weiterhin soll aber doch von einem Berührungspunkte gesprochen und darunter der Fusspunkt des Perpendikels verstanden werden, das man von dem Mittelpunkte des Rades auf den gemeinschaftlichen Teil beider Profilkurven fällen kann.

Bewegt sich das Rad auf der Schiene fort, so hat in irgend einem Augenblicke die Gestaltsänderung vor dem Rade noch nicht die nötige Zeit gehabt, sich vollständig auszubilden, dahinter ist sie umgekehrt noch nicht wieder ganz zurückgegangen. Die neuen Profilkurven müssen folglich vorn steiler, hinten flacher gestaltet sein, als bei ruhendem Rade; sie sind also unsymmetrisch, und zwar so, dass der Berührungspunkt etwas vorrückt.

So lange nun das Rad so weit von dem Ende der Schiene entfernt ist, dass der vordere Endpunkt der Eindrückung, in dem sie die geradlinige Oberkante der Schiene berührt, noch auf die Schiene fällt, so wird sich die Eindrückung, sich selbst kongruent, mit dem Rade fortbewegen. Während dieser ganzen Zeit ändert sich die Achshöhe des Rades nicht, und es bleiben daher die gaukelnden Bewegungen von den Schienen unbeeinflusst.

Hat sich dagegen das Rad dem Ende der Schiene so weit genähert, dass der vordere Endpunkt der Eindrückung nicht mehr auf die Schiene fällt, so ist vor dem Rade nicht mehr genügendes Material vorhanden, um den Raddruck in der bisherigen Weise aufzunehmen; die Eindrückung muss dort zunehmen, und die Radachse anfangen, sich zu senken. Dabei bleibt der Berührungspunkt des Rades mit der Schiene relativ zurück, und es hängt von den Dimensionsverhältnissen ab, ob er überhaupt bis an den Endpunkt der Schiene vorrückt. Die Senkung der Radachse dauert fort, bis das Rad den Anfang der folgenden Schiene trifft. Von diesem Augenblicke an beginnt diese Schiene, einen Teil des Raddruckes aufzunehmen, und die erste Schiene wird daher immer mehr entlastet, so dass ihre Eindrückung abnimmt. Die Folge davon ist ein Wiederheben der Radachse, das so lange andauert, bis sich der Raddruck auf die beiden benachbarten Schienen zu gleichen Teilen verteilt. Bei weiterer Fortbewegung stützt sich das Rad immer stärker auf die zweite Schiene, so dass diese immer mehr eingedrückt wird und das ganze Rad wieder sinkt. In seiner tiefsten Lage wird es in dem Augenblicke angelangt sein, in welchem es gerade aufhört, die erste Schiene zu berühren. Das weitere Auflaufen auf die zweite Schiene erfolgt dann angenähert gleich, nur natürlich im umgekehrten Sinne, wie das Ablaufen von der ersten. Die Eindrückung auf der zweiten Schiene ist auch zunächst einseitig ausgebildet, ihr Berührungspunkt mit dem Rade liegt also anfangs tiefer und weiter vorn. Allmählich nimmt aber die Eindrückung ihre normale Gestalt an, worauf sich die Radachse wieder in konstanter Höhenlage weiter bewegt.

Bei jedem Uebergange über einen Schienenstoss vollzieht also ein Rad zwei Schwingungen in senkrechter Richtung mit stetiger Aenderung der Höhenlage, um sich dann wieder auf dem weitaus grössten Teil der Schienenlänge in unveränderlicher Höhe weiter zu bewegen. Die Doppelschwingung erfolgt allerdings sehr rasch, so dass man sie als einen „Stoss“ des Rades gegen die zweite Schiene bezeichnen muss, aber sie vollzieht sich doch nicht in einer Zeit gleich Null, sondern sie braucht eine endliche Zeit. Könnte man die Gestaltsänderungen genau berechnen und namentlich angeben, in welchen Abständen von den Schienenenden die normale

Eindrückung aufhört und wieder anfängt, so wäre auch die Zeit für diese Doppelschwingung bestimmbar.

Trotz der Unmöglichkeit, die Vertikalbewegungen der Radachsen rechnerisch weiter zu verfolgen, kann man ihren Einfluss auf die gaukelnden Bewegungen doch analytisch in die Formeln einführen. Allerdings muss man dazu noch die weitere, selbstverständliche Annahme machen, dass alle Schienen und auch alle Schienenzwischenräume unter sich je gleich lang sind. Da die Fahrgeschwindigkeit auch unveränderlich angenommen werden musste, so werden sich die Schwingungen nach je gleichen Zeiten kongruent wiederholen. Die Vertikalbewegung der Radachsen wird daher eine periodische, stetige Funktion der Zeit und bleibt es auch, wenn den Hauptschwingungen vielleicht noch einige nachträgliche abnehmende Schwingungen folgen sollten, da man diese ebenfalls für alle Schienen gleich annehmen darf und muss. Eine solche periodische, stetige Funktion, sie mag sonst beschaffen sein, wie sie will, kann man nun stets analytisch durch eine Fourier'sche Reihe darstellen.

Bis jetzt wurde angenommen, dass die Schienen nur eine oberflächliche Eindrückung, dagegen keine eigentliche Einbiegung erfahren. Liegen sie aber auf Querschwellen, so werden nur diese sorgfältig mit Schotter unterstopft, während die Schienen zwischen den Schwellen nicht fest unterstützt sind, so dass sie sich einbiegen können. Diese Einbiegung hängt nicht nur von der Belastung und der augenblicklichen Stellung des untersuchten Rades auf der Schiene ab, sondern, da eine Schiene als kontinuierlicher Träger aufzufassen ist, von der Belastung und Stellung aller übrigen Räder der Lokomotive und der ihr folgenden Fahrzeuge, soweit diese Räder gleichzeitig auf einer Schienenlänge Platz haben. Eine genauere Rechnung würde also eigentlich für jede besondere Zusammensetzung des Zuges getrennt durchgeführt werden müssen. Hier genügt es jedoch, festzustellen, dass durch diese Einbiegungen der Schiene jedes Rad wiederholt etwas sinken und darauf wieder steigen wird. Und da die Schwellen unter allen Schienen gleichartig verteilt sind, so würde das auch periodische und stetige Vertikalbewegungen der Radachse ergeben, die sich auf jeder Schiene kongruent wiederholen und die man daher durch die frühere Fourier'sche Reihe mit dargestellt denken kann.

Der Einfluss zufälliger schlechter Stellen der Bahn entzieht sich dagegen der Berechnung vollständig.

Die durch die Reihen dargestellten Vertikalbewegungen der Radachsen erzeugen gleich grosse Aenderungen in der Einbiegung der Tragfedern der Lokomotive und damit proportionale Aenderungen der von den Federn auf den Oberbau ausgeübten Pressungen. Diese erhält man, indem man die Fourier'schen Reihen mit dem Elasticitätskoeffizienten der Federn multipliziert. Ist dann m die Ordnungsnummer der Glieder, so wird die von einem Rade auf den Oberbau nach aufwärts zu ausgeübte Kraft, die mit Q bezeichnet werden möge:

$$Q = \varepsilon \sum_{m=o}^{m=\infty} (a_m \cos m\Theta + b_m \sin m\Theta).$$

$m = o$ giebt das konstante Glied a_o der Reihe. Beim Durchlaufen der Strecke zwischen den gleichliegenden Endpunkten zweier benachbarter Schienen wächst die Bogenzahl Θ um 2π.

Θ muss noch durch den Drehwinkel φ der Kurbel ausgedrückt werden. Da bei gleichförmiger Fahrt der Lokomotive Θ und φ proportional mit der Zeit wachsen, so wachsen beide Grössen auch unter sich proportional, man kann also:

$$d\Theta = \sigma d\varphi$$

setzen, wo die Konstante σ angiebt, wieviel Schienenlängen mit Einschluss des Schienenzwischenraumes die Lokomotive bei einer Umdrehung der Triebräder vorwärts kommt. Bei den heutigen Schienenlängen ist allerdings stets $\sigma < 1$. Für die Integration soll die Zählung von Θ am Anfange einer Schiene beginnen, während φ für jeden der toten Punkte einer der Kurbeln Null ist. Von $\Theta = o$ anfangend, muss sich dann die Triebachse zunächst um einen gewissen Winkel δ drehen, bis die Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden Kurbeln in den unteren Quadranten eintritt, der die Ordnungsnummer $n = o$ hat. Nach jedem Quadranten kommt dann ein Drehwinkel $\pi/2$ hinzu, und endlich, wenn die Halbierungslinie im n^{ten} Quadranten steht, noch φ. Daher ist:

$$\Theta = \sigma \left(\delta + n \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

in die Fourier'sche Reihe einzusetzen, so dass diese wird:

$$Q = \varepsilon \sum_{m=o}^{m=\infty} \left[a_m \cos m\sigma \left(\delta + n \frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_m \sin m\sigma \left(\delta + n \frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right].$$

Für die beiden angenommenen Achsen der Lokomotive sind jedenfalls die Werte von δ verschieden und im allgemeinen auch die Konstanten a und b. Dagegen ist für die beiden Räder einer Achse der Wert von δ der nämliche, wenigstens wenn, wie es allgemein der Fall ist, die Schienenstösse der beiden Stränge eines Geleises nebeneinander liegen. Man erhält daher für die beiden vorderen Federn der Lokomotive unter sich gleiche Werte von Q, nämlich:

(24) $$Q_{1,r} = Q_{1,l}$$

$$= \varepsilon_1 \sum_{m=o}^{m=\infty} \left[a_{1,m} \cos m\sigma \left(\delta_1 + n \frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_{1,m} \sin m\sigma \left(\delta_1 + n \frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right],$$

für die hintere Achse dagegen wegen der dortigen Querfeder eine einzige in der vertikalen Längensymmetrieebene angreifende Kraft:

(25) $$Q_2 = \varepsilon_2 \sum_{m=o}^{m=\infty} \left[a_{2,m} \cos m\sigma \left(\delta_2 + n \frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_{2,m} \sin m\sigma \left(\delta_2 + n \frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right].$$

Durch den Transport dieser Kräfte nach dem Schwerpunkte des Oberbaues ergeben sich dort eine vertikal nach aufwärts wirkende Kraft:

(26) $$Q = Q_{1,r} + Q_{1,l} + Q_2$$

und ein um die horizontale Querachse drehendes Kräftepaar:

(27) $$\mathfrak{N}_4 = (Q_{1,r} + Q_{1,l})\, s_1 - Q_2\, s_2,$$

während das um die horizontale Längenachse drehende Paar

(28) $$\mathfrak{M}_4 = (Q_{1,l} - Q_{1,r})\, e = o$$

wird, weil angenommen wurde, dass die Stösse der beiden Schienenstränge nebeneinander liegen.

§ 5. Die Differentialgleichungen der gaukelnden Bewegungen.

In den drei hier allein in Frage kommenden Bewegungsgleichungen treten die zweiten Derivierten von x, ψ und χ nach der Zeit auf. Diese muss durch den Drehwinkel φ der Kurbeln ersetzt werden. Das ist möglich, wenn man die als konstant anzunehmende Winkelgeschwindigkeit:

$$(29) \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$$

einführt. Damit schreibt sich z. B.:

$$(30) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{d\varphi^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega^2\frac{d^2x}{d\varphi^2}.$$

Für die beiden andern Derivierten gilt die gleiche Umformung.

Um nun die Gesetze der gaukelnden Bewegungen entwickeln zu können, muss man alle dabei mitwirkenden Kräfte unter Anbringung von Gegenkräften nach dem Schwerpunkte des Oberbaues der Lokomotive transportieren, wie das mit den einzelnen Kräften schon früher geschehen ist.

Die transportierten vertikalen Kräfte erzeugen die senkrecht auf- und abgehende Bewegung des Wogens. Sie werden unterstützt durch das im Schwerpunkte nach abwärts zu wirkende Gewicht Mg des Oberbaues. Da die übrigen Kräfte nach aufwärts positiv eingeführt worden sind, so fällt dieses $-Mg$ gegen $+Mg$ in Gleichung (21) weg. Bildet man die algebraische Summe aller übrigen vertikal wirkenden Kräfte nach den Gleichungen (11), (21), (24) und (25), so erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (30) als Differentialgleichung für das Wogen:

$$(31) \qquad M\omega^2\frac{d^2x}{d\varphi^2} = P\frac{r}{l}(\cos\varphi + \sin\varphi) - \varepsilon x$$

$$+ 2\varepsilon_1\sum_{m=o}^{m=\infty}\left[a_{1,m}\cos m\sigma\left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_{1,m}\sin m\sigma\left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right]$$

$$+ \varepsilon_2\sum_{m=o}^{m=\infty}\left[a_{2,m}\cos m\sigma\left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_{2,m}\sin m\sigma\left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right].$$

Für drehende Bewegungen um eine der Koordinatenachsen gilt die allgemeine Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \sum m\varrho^2 \frac{d\vartheta}{d} = \sum \text{ aller Drehmomente.}$$

Hierin bedeutet m die Masse der einzelnen materiellen Punkte des bewegten Körpers, ϱ ihren Abstand von der festen Drehachse, ϑ den Winkel von ϱ mit einer der beiden anderen Achsen. Bei den gaukelnden Bewegungen des Oberbaues einer Lokomotive ändert sich nun ϱ ununterbrochen. Da aber alle Bewegungen eigentlich unendlich klein vorausgesetzt worden sind, so bleiben auch die Aenderungen der ϱ unendlich klein. Man kann daher die ϱ konstant annehmen und erhält dann zunächst in:

$$\sum m\varrho^2 \equiv J$$

das Trägheitsmoment des Oberbaues in Bezug auf eine feste Achse, die durch den Schwerpunkt der ruhenden Lokomotive hindurchgeht. Damit und nach Analogie von Gleichung (30) wird die Differentialgleichung für eine drehende Bewegung:

$$J \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = J\,\omega^2 \frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = \sum \text{ aller Drehmomente.} \tag{32}$$

Will man diese Gleichung zunächst auf die galoppierende Bewegung einer Lokomotive anwenden, so muss man unter

$$\sum \text{ aller Drehmomente}$$

die mit $\mathfrak{N}$ bezeichneten, in den Gleichungen (8), (13), (22) und (27) angegebenen Momente zusammenfassen. Das giebt, wenn man das Trägheitsmoment in Bezug auf die horizontale Querachse einfach mit J bezeichnet, als Differentialgleichung für das Galoppieren nach leichter Umformung:

$$J\omega^2 \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \tag{33}$$

$$= Pr\left[\left(\frac{h}{R} + \frac{l - s_2}{l}\right)(\cos\varphi + \sin\varphi) - \frac{r}{l}\sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi\right] - \xi^2\psi$$

$$+ 2\varepsilon_1 s_1 \sum_{m=o}^{m=\infty}\left[a_{1,m}\cos m\sigma\left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_{1,m}\sin m\sigma\left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right]$$

$$- \varepsilon_2 s_2 \sum_{m=o}^{m=\infty}\left[a_{2,m}\cos m\sigma\left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_{2,m}\sin m\sigma\left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right].$$

Für das Wanken endlich erhält man mit den Momenten $\mathfrak{M}$ aus den Gleichungen (14) und (23) und wenn J_z das Trägheitsmoment in Bezug auf die horizontale Längenachse bezeichnet:

$$(34) \qquad J_z \omega^2 \frac{d^2 \chi}{d\varphi^2} = \pm P \frac{r}{l} (\cos \varphi - \sin \varphi) - 2\varepsilon_1 e^2 \chi.$$

Die Schienenstösse üben also auf das Wanken keinerlei Einfluss aus, weil die daher rührenden Kraftwirkungen auf beiden Seiten der Lokomotive gleichartig verlaufen.

Von den hier entwickelten Gleichungen für die gaukelnden Bewegungen stimmt die letzte für das Wanken durchaus mit der schon von Redtenbacher dafür gegebenen überein, abgesehen von der abweichenden Schreibweise. Die Gleichungen für das Wogen und Galoppieren unterscheiden sich aber wesentlich von den Redtenbacher'schen. Sie enthalten hier mehr die von den Schienenstössen herrührenden Fourier'schen Reihen, dagegen fehlt ihnen je ein dort auftretendes Glied. Dieses Fortfallen rührt von der vereinfachenden Annahme her, dass sich alle Federn vom unbelasteten Zustande bis zur Belastung durch die ruhende Lokomotive gegenseitig gleich stark einbiegen. Ohne diese Annahme wäre in der Gleichung (31) für das Wogen ein Glied:

$$-(2\varepsilon_1 s_1 - \varepsilon_2 s_2)\, \psi$$

und in der Gleichung (33) für das Galoppieren ein Glied:

$$(2\varepsilon_1 s_1 - \varepsilon_2 s_2)(f - x)$$

stehen geblieben. Dann wären aber in jeder der beiden Gleichungen beide Veränderliche aufgetreten, was die Integration bedeutend verwickelter gemacht hätte.

Da die Gleichung für das Wanken von den Schienenstössen nicht beeinflusst wird, und da diese Bewegung schon von Zeuner und Einbeck erschöpfend untersucht worden ist, so hätte es keinen Zweck, die gleiche Untersuchung noch einmal zu wiederholen. Von den beiden anderen Gleichungen hat die für das Galoppieren insofern die allgemeinere Gestalt, als in ihr auch noch $\sin 2\varphi$ auftritt. Daher soll hier nur diese Gleichung integriert werden.

§ 6. Integration der Gleichung für das Galoppieren.

Um weiterhin einfachere Ausdrücke zu erhalten, sollen die konstanten Faktoren der Glieder:

$$\cos\varphi + \sin\varphi \text{ und } \sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi$$

in Gleichung (33) kurz mit T und U bezeichnet werden. Nimmt man dann noch das Glied $\xi^2\psi$ nach links, so erhält diese Gleichung die Gestalt:

$$(35)\qquad J\omega^2\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \xi^2\psi = T(\cos\varphi + \sin\varphi) - U\sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi$$

$$+ 2\varepsilon_1 s_1 \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[a_{1,m}\cos m\sigma\left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_{1,m}\sin m\sigma\left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right]$$

$$- \varepsilon_2 s_2 \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[a_{2,m}\cos m\sigma\left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + b_{2,m}\sin m\sigma\left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right].$$

Eine Differentialgleichung, in der die gesuchte Funktion und ihre Differentialquotienten additiv auftreten, wird nun stets befriedigt entweder durch Exponentialgrössen oder durch Sinus und Cosinus. Da aber die rechte Seite der Gleichung (35) nur periodische Funktionen enthält, so sind hier Exponentialgrössen ausgeschlossen. In dem Ausdrucke für ψ müssen dann jedenfalls die cos und sin aller der Winkel auftreten, die schon in der Differentialgleichung stehen. Dazu können aber noch im allgemeinen cos und sin eines passend gewählten Vielfachen von φ, $\equiv \varkappa\varphi$, hinzukommen. Das Integral der Gleichung (35) muss also die Gestalt haben:

$$(36)\qquad \psi = A(\cos\varphi + \sin\varphi) - B\sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi + C\cos\varkappa\varphi + D\sin\varkappa\varphi$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[E_m\cos m\sigma\left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + F_m\sin m\sigma\left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right]$$

$$- \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[G_m\cos m\sigma\left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + H_m\sin m\sigma\left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right].$$

Dieser Ausdruck ist dann das vollständige Integral der Differentialgleichung (35), wenn sich alle darin vorkommenden Konstanten, mit Ausnahme von zweien, aus der Bedingungsgleichung bestimmen lassen. Die beiden nicht bestimmbaren sind die beiden Integrationskonstanten der doppelten Integration und hängen von den Anfangsbedingungen ab.

Zur Bestimmung der Konstanten braucht man die beiden ersten Differentialquotienten von ψ nach φ. Diese sind:

$$(37)\qquad \frac{d\psi}{d\varphi} = A\,(-\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$-2\,B \sin n\frac{\pi}{2}\cos 2\varphi + \varkappa\,(-C\sin\varkappa\varphi + D\cos\varkappa\varphi)$$

$$+\sum_{m=o}^{m=\infty}\Big[-m\sigma E_m \sin m\sigma\,(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + m\sigma F_m \cos m\sigma\,(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\Big]$$

$$-\sum_{m=o}^{m=\infty}\Big[-m\sigma G_m \sin m\sigma\,(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + m\sigma H_m \cos m\sigma\,(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\Big].$$

$$(38)\qquad \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = -A\,(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$+4\,B\sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi - \varkappa^2\,(C\cos\varkappa\varphi + D\sin\varkappa\varphi)$$

$$-\sum_{m=o}^{m=\infty}\Big[m^2\sigma^2 E_m \cos m\sigma(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + m^2\sigma^2 F_m \sin m\sigma\,(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\Big]$$

$$+\sum_{m=o}^{m=\infty}\Big[m^2\sigma^2 G_m \cos m\sigma\,(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + m^2\sigma^2 H_m \sin m\sigma\,(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\Big].$$

Setzt man die Ausdrücke von ψ aus Gleichung (36) und $d^2\psi/d\varphi^2$ aus Gleichung (38) in die Differentialgleichung (35) ein, so erhält man einen Ausdruck, der für alle beliebigen Werte von φ identisch befriedigt werden muss. Das kann aber nur geschehen, wenn die Koeffizienten der cos und der sin derselben Winkel auf beiden Seiten gleich sind oder, wenn der Winkel nur auf einer Seite der Gleichung auftritt, verschwinden. Das giebt zur Berechnung der Konstanten folgende Gleichungen: als Faktoren

$$(39)\qquad \text{von } \cos\varphi + \sin\varphi:\ (\xi^2 - J\omega^2)\,A = T,$$

$$(40)\qquad \text{von } \sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi:\ (\xi^2 - 4\,J\omega^2)\,B = U,$$

$$(41)\qquad \text{von } \cos\varkappa\varphi:\ (\xi^2 - \varkappa^2 J\omega^2)\,C = o,$$

$$(42)\qquad \text{von } \sin\varkappa\varphi:\ (\xi^2 - \varkappa^2 J\omega^2)\,D = o,$$

$$(43)\qquad \text{von } \cos m\sigma\,(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi):\ (\xi^2 - m^2\sigma^2 J\omega^2)\,E_m = 2\,\varepsilon_1 s_1 a_{1,m},$$

$$(44)\qquad \text{von } \sin m\sigma\,(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi):\ (\xi^2 - m^2\sigma^2 J\omega^2)\,F_m = 2\varepsilon_1 s_1 b_{1,m},$$

(45) von $\cos m\sigma\left(\delta_2 + n\,\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$: $(\xi^2 - m^2\sigma^2 J\omega^2)\,G_m = \varepsilon_2 s_2 a_{2,m}$,

(46) von $\sin m\sigma\left(\delta_2 + n\,\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$: $(\xi^2 - m^2\sigma^2 J\omega^2)\,H_m = \varepsilon_2 s_2 b_{2,m}$.

Aus den Gleichungen (39), (40) und (43) bis (46) lassen sich die Koeffizienten A, B, E_m, F_m, G_m und H_m eindeutig berechnen, während zur Bestimmung von C, D und $\varkappa$ nur die zwei Gleichungen (41) und (42) vorhanden sind. Da nun nicht anzunehmen ist, dass C und D gleichzeitig verschwinden, so wird man diesen beiden Gleichungen zweckmässiger dadurch genügen, dass man die in beiden gleiche Klammer:

(47) $$\xi^2 - \varkappa^2 J\omega^2 = 0$$

werden lässt. Dann gehen C und D aus den Gleichungen gar nicht mehr zu berechnen. Man muss daher C und D als die beiden Integrationskonstanten ansehen, die aus Anfangsbedingungen bestimmt werden müssten.

Aus Gleichung (47) folgt, wenn man noch ξ^2 nach Gleichung (22) einsetzt, dass die bei der Integration eingeführte Konstante $\varkappa$ den Wert:

(48) $$\varkappa = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\varepsilon_1 s_1^2 + \varepsilon_2 s_2^2}{J}}$$

annehmen muss. Dabei genügt es, von den beiden eigentlich vorhandenen Werten $+\varkappa$ und $-\varkappa$ nur $+\varkappa$ zu benutzen. Durch Einführung auch von $-\varkappa$ würde sich nämlich das Glied:

$$C \cos \varkappa\varphi$$

überhaupt gar nicht ändern. Das Glied:

$$D \sin \varkappa\varphi$$

erhielte nur das entgegengesetzte Vorzeichen. Da aber D eine der Integrationskonstanten ist, so würde es sein Vorzeichen nicht ändern, und ψ behielte doch denselben Wert wie für $+\varkappa$.

Da bei der Entwickelung der Kraftwirkungen, die die gaukelnden Bewegungen beeinflussen, der Winkel φ in jedem Quadranten frisch von 0 bis 90° gezählt wurde, so müssen die Integrationskonstanten C und D in jedem Quadranten neue Werte annehmen. Das hat bekanntlich Redtenbacher bei seinen Untersuchungen übersehen, wodurch er zu unrichtigen Schlussfolgerungen gelangt ist.

Die Integrationskonstanten C und D müssen natürlich für irgend einen Quadranten, z. B. den n^{ten}, bekannt, oder aus gegebenen Anfangsbedingungen bestimmbar sein. Dann lassen sie sich für je den folgenden, $(n+1)^{ten}$ Quadranten berechnen. Zu diesem Zwecke ist zu beachten, dass sich weder der Winkelausschlag ψ des Galoppierens noch seine Winkelgeschwindigkeit:

$$d\psi/dt,$$

also auch nicht der erste Differentialquotient:

$$d\psi/d\varphi,$$

sprungweise ändern können. Daher müssen beide Grössen für den:

$$n^{ten} \text{ Quadranten und } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

die gleichen Werte annehmen, wie für den:

$$(n+1)^{ten} \text{ Quadranten und } \varphi = 0.$$

Bildet man diese Ausdrücke, so wird zunächst in den Fourier'schen Reihen:

$$\delta + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \delta + (n+1)\frac{\pi}{2} + 0,$$

und diese Reihen fallen daher bei Bestimmung der Konstanten C und D weg. Es bleibt nur aus Gleichung (36) für ψ:

$$A + C_n \cos\varkappa\frac{\pi}{2} + D_n \sin\varkappa\frac{\pi}{2} = A + C_{n+1}$$

und aus der Gleichung (37) für $d\psi/d\varphi$:

$$-A + 2B\sin n\frac{\pi}{2} - \varkappa C_n \sin\varkappa\frac{\pi}{2} + \varkappa D_n \cos\varkappa\frac{\pi}{2}$$
$$= A - 2\mathrm{B}\sin(n+1)\frac{\pi}{2} + \varkappa D_{n+1}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, wenn man noch:

$$\sin(n+1)\frac{\pi}{2} = \cos n\frac{\pi}{2}$$

einführt:

$$(49)\quad \begin{cases} C_{n+1} = C_n \cos \varkappa \frac{\pi}{2} + D_n \sin \varkappa \frac{\pi}{2}, \\ D_{n+1} = -C_n \sin \varkappa \frac{\pi}{2} + D_n \cos \varkappa \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\varkappa} A \\ \qquad + \frac{2}{\varkappa} B \left(\cos n \frac{\pi}{2} + \sin n \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Dabei ist der trigonometrische Faktor des Gliedes mit B gleich $+1$ oder -1; er ändert nach je 2 Quadranten sein Vorzeichen.

Nimmt man nun an, die Werte von C und D seien als C_0 und D_0 für den Quadranten bekannt, der die Ordnungsnummer:

$$n = 0$$

hat, das ist also nach früher für die Lage der Halbierungslinie des Winkels zwischen den Kurbeln in ihrem unteren Quadranten, so kann man nach den Gleichungen (49) die Werte von C und D nacheinander für alle folgenden Quadranten berechnen. Man erhält auf diese Weise schliesslich für den allgemeinen, n^{ten} Quadranten:

$$(50)\quad \begin{cases} C_n = C_0 \cos n\varkappa \frac{\pi}{2} + D_0 \sin n\varkappa \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\varkappa} A \left[\sin \varkappa \frac{\pi}{2} + \sin 2\varkappa \frac{\pi}{2} \right. \\ \qquad \left. + \cdots + \sin (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}\right] + \frac{2}{\varkappa} B \left[\sin (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2} \right. \\ \qquad + \sin (n-2) \varkappa \frac{\pi}{2} - \sin (n-3) \varkappa \frac{\pi}{2} - \sin (n-4) \varkappa \frac{\pi}{2} \\ \qquad \left. + \cdots \pm \sin \varkappa \frac{\pi}{2}\right]. \\ D_n = -C_0 \sin n\varkappa \frac{\pi}{2} + D_0 \cos n\varkappa \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\varkappa} A \left[1 + \cos \varkappa \frac{\pi}{2} \right. \\ \qquad \left. + \cos 2\varkappa \frac{\pi}{2} + \cdots + \cos (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}\right] + \frac{2}{\varkappa} B \left[\cos (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2} \right. \\ \qquad + \cos (n-2) \varkappa \frac{\pi}{2} - \cos (n-3) \varkappa \frac{\pi}{2} - \cos (n-4) \varkappa \frac{\pi}{2} \\ \qquad \left. + \cdots \pm \cos \varkappa \frac{\pi}{2} \pm 1\right]. \end{cases}$$

In den Koeffizienten von B sind in beiden Ausdrücken die beiden ersten Glieder stets positiv, weiterhin wechselt das Vorzeichen nach je zwei Gliedern; das Vorzeichen des letzten Gliedes ergiebt sich dann von selbst.

Aus den Gleichungen (50) folgt, dass sich die Integrationskonstanten C und D in der That von Quadrant zu Quadrant ändern. Soweit sie von C_0 und D_0 abhängig sind, bleiben sie aber endlich, wenigstens, wenn man C_0 und D_0 selbst als endlich voraussetzt, was selbstverständlich nötig ist. In den Faktoren von A und B wird bei einem beliebigen Werte von $\varkappa$ im allgemeinen ein regelmässiger Vorzeichenwechsel nach je einer Reihe von Gliedern auftreten. Dadurch werden sich die Werte von C_n und D_n während der nämlichen Reihe aufeinanderfolgender Quadranten je im gleichen Sinne ändern; nach einer bestimmten Reihe von Quadranten wechselt aber der Sinn der Aenderung immer wieder. Die Schwankungen von C_n und D_n können dabei allerdings vorübergehend verhältnismässig gross werden, aber doch nicht bis in's Unendliche wachsen. Daher bleibt dann auch der Winkelausschlag des Galoppierens endlich gegenüber seinen der ganzen Rechnung zu Grunde gelegten eigentlich unendlich kleinen Werten, also jedenfalls klein.

Dagegen giebt es auch eine Anzahl bestimmter Werte von $\varkappa$, für die in den Faktoren von A und B kein Vorzeichenwechsel auftritt, so dass die absoluten Werte dieser Glieder und daher auch die von C_n und D_n schliesslich von Quadrant zu Quadrant immer grösser werden. Das Gleiche gilt dann auch von den Winkelausschlägen des Galoppierens, die dabei eine für die Sicherheit der Fahrt „gefährliche" Grösse erreichen können. Die eine Gruppe dieser gefährlichen Werte von $\varkappa$ ist:

$$\varkappa = 4, 8, 12, \ldots.$$

für welche bei D_n in dem Faktor von A alle cos gleich $+1$ werden. Die zweite Gruppe ist

$$\varkappa = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

weil für sie bei C_n und D_n in den Faktoren von B zwar die eine Hälfte der Glieder verschwindet, die andere dagegen den Wert 1 mit überall dem gleichen Vorzeichen annimmt. Von diesen gefährlichen Werten fällt allerdings der Wert:

$$\varkappa = 1$$

hier zunächst fort, da für ihn, wie später noch nachgewiesen werden wird, Gleichung (36) gar nicht mehr das Integral der Differentialgleichung (35) ist. Das Vorhandensein der übrigen gefährlichen Werte von $\varkappa$ ist übrigens schon von Einbeck nachgewiesen worden.

Nach Gleichung (48) hängt $\varkappa$ ab von der Winkelgeschwindigkeit ω und von den Konstanten der Lokomotive ε_1, ε_2, s_1, s_2 und J. Ein bestimmter Wert von $\varkappa$ geht also nur durch eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit zu erreichen. Um zu sehen, wie gross die gefährlichen Geschwindigkeiten ausfallen, soll eine bestimmte Lokomotive zahlenmässig nachgerechnet werden. Da es mir hier aber nur auf eine angenäherte Feststellung der Grössenordnung dieser Winkelgeschwindigkeit ankommt, so runde ich die Zahlenwerte von vornherein ab. Der in den Federn hängende Oberbau wiegt rund 24^t, die sich mit je 12^t auf die beiden Achsen verteilen, da beide Triebachsen sind. Beträgt die Einbiegung der Federn bei dieser Belastung gegenüber dem unbelasteten Zustande 50^{mm}, so ist nach den Gleichungen (16) für jede der beiden vorderen Längsfedern:

$$6000 = \varepsilon_1 \cdot 0{,}05,$$

für die hintere Querfeder:

$$12000 = \varepsilon_2 \cdot 0{,}05.$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon_1 = 120\,000 \text{ und } \varepsilon_2 = 240\,000.$$

Der Radstand ist:

$$2{,}8^m \backsim 2\sqrt{2},$$

daher wird:

$$s_1 = s_2 = \sqrt{2}$$

und:

$$\xi^2 = 2\varepsilon_1 s_1^2 + \varepsilon_2 s_2^2 = 2 \cdot 120000 \cdot 2 + 240\,000 \cdot 2 = 960\,000.$$

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes J in Bezug auf die horizontale Querachse soll die Lokomotive einfach als homogene materielle Gerade von der Länge $L \backsim 5^m$ angesehen werden; dann ist es auch zulässig $g \backsim 10$ einzuführen. Das giebt:

$$J = \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{24000}{10} \cdot 25 = 5000.$$

Hiermit wird nach Gleichung (48) das Produkt:

$$\varkappa\omega = \sqrt{\frac{2\varepsilon_1 s_1^2 + \varepsilon_2 s_2^2}{J}} = \sqrt{\frac{960\,000}{5000}} = \sqrt{192} \sim 14.$$

Da der kleinste gefährliche Wert von $\varkappa$ gleich 3 gefunden wurde, so folgt die grösste gefährliche Winkelgeschwindigkeit zu:

$$\omega' = 4^2/_3;$$

alle übrigen gefährlichen Werte von ω sind kleiner. Bei der normalen Fahrt auf der Strecke erreichen nun solche Lokomotiven eine Winkelgeschwindigkeit von etwas über 20, so dass also sämtliche gefährliche Geschwindigkeiten wirklich vorkommen. Jedenfalls werden sie beim Anfahren erreicht. Dort dauern sie aber nicht an und haben daher keine Zeit zu einer gefährlichen Steigerung der Schwingungen. Gelegentlich könnten sie sich auch beim Manövrieren auf Bahnhöfen für längere Zeit einstellen. Wenn das aber überhaupt der Fall ist, so lehrt die Erfahrung, dass die gaukelnden Bewegungen dabei doch keinen gefährlichen Betrag erreichen.

Es muss noch untersucht werden, welche wesentliche Bedeutung die gefährlichen Werte von $\varkappa$ haben. Dazu ist es nötig, die Zeiten für die Perioden der einzelnen Teilschwingungen zu berechnen, aus denen sich die ganze Bewegung des Galoppierens zusammensetzt. Bezeichnet man diese Zeiten mit t und dem Faktor von φ in Gleichung (36) als Index, so berechnet sich die Zeit für eine Umdrehung der Kurbeln aus:

$$\omega t_1 = 2\pi,$$

die übrigen Zeiten aus:

$$2\,\omega t_2 = 2\pi,\ \varkappa\omega t_\varkappa = 2\pi \text{ und } m\sigma\omega t_m = 2\pi.$$

Daraus folgt:

(51) $$t_1 = 2\,t_2 = \varkappa t_\varkappa = m\sigma t_m.$$

Die Faktoren der drei letzten Zeiten geben hiernach an, wie viel ganze Schwingungen der einzelnen Teilbewegungen auf eine Umdrehung der Triebachse kommen. Insbesondere $\varkappa$ hängt nach Gleichung (48) nur von Längen- und Massenverhältnissen der Lokomotive ab und von den elastischen Konstanten ε_1 und ε_2 der Federn.

Daher muss $t_\varkappa$ die Zeit einer ganzen Federschwingung beim Galoppieren sein, und die gefährlichen Werte von $\varkappa$ sind die, bei denen eine ganze Anzahl von Federschwingungen, aber doch nur 3, 5, 7 ... und 4, 8, 12, ... auf eine Umdrehung der Triebachsen kommen. Dann fallen die durch die Linealpressungen hervorgerufenen Kraftwirkungen stets auf die gleichen Phasen der Federschwingungen und verstärken diese immer wieder. Ist aber $\varkappa$ gross, so liegt zwischen je zwei solchen gleichartigen Antrieben eine grössere Anzahl von Schwingungen der Federn, und während dieser haben die Reibungswiderstände Zeit gehabt, die gaukelnden Bewegungen wieder zu verkleinern, so dass sie keinen gefährlichen Betrag erreichen können.

Weiter gehe ich auf diese Erörterungen hier nicht ein, da der Einfluss der Linealpressungen und der Zugkraft auf die gaukelnden Bewegungen schon in den eingangs aufgeführten Veröffentlichungen ausführlich untersucht worden ist. Ausserdem erscheinen auch meine Gleichungen in dieser Richtung nicht in ihrer allgemeinsten Gestalt.

§ 7. Einfluss der Schienenstösse auf das Galoppieren.

Setzt man zur Untersuchung dieses Einflusses ξ^2 nach Gleichung (22) in die Gleichungen (43) bis (46) ein und berücksichtigt Gleichung (18), so kommt man nach einfacher Umformung auf:

$$(52)\qquad \frac{E_m}{a_{1,m}} = \frac{F_m}{b_{1,m}} = \frac{G_m}{a_{2,m}} = \frac{H_m}{b_{2,m}} = \frac{1}{s_1 + s_2 - \frac{m^2 \sigma^2 J \omega^2}{\varepsilon_2 s_2}}.$$

Die Quotienten aus den Koefficienten der Reihen für ψ dividiert durch die Koefficienten je der gleich hohen Glieder der Reihen für die Vertikalbewegung der Achsen sind also konstant. Hieraus folgt zunächst, dass, soweit das Galoppieren von den Schienenstössen abhängt, die Teilwellen, aus denen es sich zusammensetzt, gegenüber den Teilwellen der Vertikalbewegung der Achsen nicht verschoben sind. Trotzdem verlaufen beide Arten von Bewegungen nicht gleichartig, weil sich der Wert der Quotienten in Gleichung (52) mit m in eigentümlicher Weise ändert.

Der ganze Radstand der Lokomotiven, $s_1 + s_2$, beträgt immer einige Meter; für das vorige Zahlenbeispiel waren es $2{,}8^m$. Daher ist für $m = 0$:

$$\frac{E_0}{a_{1,0}} = \frac{1}{s_1 + s_2} < 1.$$

Die konstanten Glieder der abgeleiteten Reihen haben also das gleiche Vorzeichen, sind aber kleiner, als die der ursprünglichen Reihen. Dasselbe gilt auch noch für die Koefficienten der ersten Glieder der Reihen, nur nimmt der Zahlenwert des Quotienten mit m ununterbrochen zu, bleibt aber im allgemeinen doch kleiner als die Einheit. Sowie aber m den Grenzwert:

$$(53) \qquad m \equiv \mu = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 s_2 (s_1 + s_2)}{\sigma^2 J \omega^2}} = \frac{\xi}{\sigma\omega \sqrt{J}}$$

überschritten hat, ändern die Quotienten ihr Vorzeichen bleibend, und ihr Zahlenwert nimmt mit wachsendem m immer rascher ab, um für:

$$m = \infty$$

ganz zu verschwinden. Man wird hieraus den Schluss ziehen dürfen, dass die Schienenstösse auf die galoppierende Bewegung gewöhnlich keinen besonders grossen Einfluss ausüben. Doch sind Ausnahmen möglich.

Eine dieser Ausnahmen scheint aufzutreten, wenn der Grenzwert μ in Gleichung (53) grade eine ganze Zahl wird. Für die Glieder mit:

$$m = \mu$$

verschwindet dann der Nenner auf der rechten Seite von Gleichung (52), und die zugehörigen Koefficienten werden:

$$E_\mu = F_\mu = G_\mu = H_\mu = \infty,$$

so dass es scheint, diese Teilschwingungen wären unendlich gross. Nun ist der Fall:

$$m = \mu$$

allerdings gefährlich, aber nicht aus dem hier entwickelten Grunde, denn es ist einer der Ausnahmefälle, für welche Gleichung (36) gar nicht das Integral der Differentialgleichung (35) ist. Diese Ausnahmefälle werden am Schlusse noch kurz besprochen werden.

Ist μ zwar keine ganze Zahl, aber doch nur verhältnismässig wenig von einer ganzen Zahl verschieden, so kann der Nenner in Gleichung (52) für den μ am nächsten gelegenen Wert von m immerhin sehr klein werden, auch bedeutend kleiner, als die Einheit. Dann müssen die diesem m zugehörenden Teilschwingungen in den Vordergrund treten. Doch bleiben die Koefficienten dieser Glieder gegenüber denen der ursprünglichen Reihen immer noch endlich, und da diese eigentlich unendlich klein vorausgesetzt worden sind, so ist anzunehmen, dass man es hier doch nicht mit gefährlich grossen Schwingungen zu thun habe.

Es muss noch untersucht werden, ob bei den Lokomotiven gewisse Konstruktionsverhältnisse vorhanden sind, durch welche der Einfluss der Schienenstösse auf das Galoppieren möglichst verkleinert wird. Bei den Fourier'schen Reihen nehmen die Zahlenwerte der Koefficienten mit wachsendem m im allgemeinen ab, wenn auch nicht stetig. Dazu kommt, dass, wenn m den Grenzwert μ überschritten hat, der Nenner in Gleichung (52) proportional mit dem Quadrat von m, also rasch wächst, so dass die Quotienten $E_m/a_{1,m}$ u. s. w. dann rasch abnehmen. Es ist daher zu erwarten, dass die Grösse des Ausschlagswinkels ψ namentlich von den ersten Gliedern der Reihen abhängt. Damit nun für diese die Koeffizienten E_m u. s. w. möglichst klein ausfallen, ist es nötig, s_1, s_2 und ε_2, also auch ε_1 gross, σ und J klein zu machen. Die Lokomotive sollte also grossen Radstand, starre Federn, kleine Triebräder gegenüber der Länge der Schienen und ein kleines Trägheitsmoment J in Bezug auf die horizontale Querachse erhalten.

Wenn μ nur wenig kleiner ist, als eine ganze Zahl, so wird der Zahlenwert des ersten negativen Nenners in Gleichung (52) klein. Die zugehörige Teilschwingung ist dann verhältnismässig gross und liefert den Hauptanteil an die galoppierende Bewegung. Soll nun diese Teilschwingung möglichst klein bleiben, so muss der Zahlenwert des Nenners, der jetzt:

$$\frac{m^2\sigma^2 J\omega^2}{\varepsilon_2 s_2} - (s_1 + s_2)$$

ist, möglichst gross werden, und dazu wäre es nötig, σ und J gross, dagegen s_1, s_2 und die ε klein zu machen. Das ist aber gerade das Gegenteil von dem, was vorhin für diese Grössen gefunden wurde.

Je nach dem Zahlenwerte von μ, je nachdem also die Lokomotive gerade mit grösserer oder kleinerer Geschwindigkeit fährt, erhält man hiernach zur Verkleinerung des Einflusses der Schienenstösse genau entgegengesetzte Forderungen. Es ist daher unmöglich, aus diesen Untersuchungen irgend welche Konstruktionsregeln herzuleiten.

§ 8. Ausnahmefälle.

Die bisherigen Entwickelungen über das Galoppieren der Lokomotiven hören auf zu gelten, sobald $\varkappa$ einen Zahlenwert annimmt, der als Faktor des Winkels φ auf der rechten Seite der Differentialgleichung (35) auftritt, also für:

$$\varkappa = 1 \text{ oder } 2 \text{ oder } m\sigma.$$

Für diese Werte von $\varkappa$ lassen sich die betreffenden Glieder mit den Gliedern:

$$C \cos \varkappa\varphi + D \sin \varkappa\varphi$$

zusammenziehen, und man erhält bei der Berechnung der Konstanten:

$$C = D = \infty,$$

während die übigen Konstanten ihre eindeutig bestimmten, endlichen Werte beibehalten. Dadurch verschwinden aber die von den Anfangsbedingungen abhängigen beiden Integrationskonstanten aus der Gleichung (36) für ψ, so dass diese Gleichung nicht mehr das vollständige Integral der Differentialgleichung (35) sein kann. Für alle diese Fälle muss vielmehr in dem Ausdrucke für ψ je ein Glied auftreten, das den Winkel φ als Faktor enthält.

Die Fälle $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ sind schon von Einbeck genauer untersucht worden. Es soll also hier nur ganz kurz erwähnt werden, was sich dabei ergiebt.

Für $\varkappa = 1$ tritt an die Stelle des Gliedes:

$$A (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

in Gleichung (36) das Glied:

$$A \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi).$$

C und D bleiben die beiden Integrationskonstanten. Sie ändern sich auch hier von Quadrant zu Quadrant, aber so, dass:

$$C_{n+4} = C_n + 4B, \quad D_{n+4} = D_n + 4B$$

wird. Beide Konstanten wachsen also nach jeder Umdrehung der Kurbel um je $4B$; $\varkappa = 1$ ist daher gefährlich.

Für $\varkappa = 2$ ist das mit B multiplizierte Glied durch:

$$B\varphi \sin n\frac{\pi}{2} \sin 2\varphi$$

zu ersetzen. Die beiden Integrationskonstanten C und D ändern sich auch nach jedem Quadranten, aber so, dass:

$$C_{n+4} = C_n, \quad D_{n+4} = D_n$$

wird. Hier hat man es also mit Schwingungen zu thun, die sich nach jeder ganzen Umdrehung der Kurbeln kongruent wiederholen, so dass $\varkappa = 2$ nicht gefährlich ist.

Eine ausführlichere Behandlung erfordert der Fall:

$$\varkappa = m\sigma,$$

weil es sich dabei um den sonst noch nicht untersuchten Einfluss der Schienenstösse auf das Galoppieren handelt. Der Wert von m, für den $\varkappa = m\sigma$ wird, soll auch mit μ bezeichnet werden. Um die Differentialgleichung (35) für diesen Fall integrieren zu können, muss man aus den Fourier'schen Reihen die Glieder mit:

$$m = \mu$$

ausscheiden. Der übrige Teil der Reihen soll dann kurz so bezeichnet werden, dass hinter dem Summationszeichen $(-\mu)$ als Index hinzugefügt wird. Es bedeutet also:

$$\sum_{m=0(-\mu)}^{m=\infty}{}' \left[\,\cdot\;\cdot\,\right] = \sum_{m=0}^{m=\mu-1}{}' \left[\,\cdot\;\cdot\,\right] + \sum_{m=\mu+1}^{m=\infty}{}' \left[\,\cdot\;\cdot\,\right].$$

Mit dieser Ausscheidung, und da in den ausgeschiedenen Gliedern $m\sigma$ durch $\varkappa$ ersetzt werden kann, schreibt sich die Differentialgleichung (35) auch:

$$
(54)\quad J\omega^2 \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \xi^2\psi = T(\cos\varphi + \sin\varphi) - U\sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi
$$

$$
+ 2\varepsilon_1 s_1 \left[a_{1,\mu}\cos\varkappa(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + b_{1,\mu}\sin\varkappa(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\right]
$$

$$
- \varepsilon_2 s_2 \left[a_{2,\mu}\cos\varkappa(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + b_{2,\mu}\sin\varkappa(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\right]
$$

$$
+ 2\varepsilon_1 s_1 \sum_{m=o(-\mu)}^{m=\infty} \Big[a_{1,m}\cos m\sigma(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)
$$

$$
+ b_{1,m}\sin m\sigma(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\Big] - \varepsilon_2 s_2 \sum_{m=o(-\mu)}^{m=\infty} \Big[a_{2,m}\cos m\sigma(\delta_2
$$

$$
+ n\frac{\pi}{2} + \varphi) + b_{2,m}\sin m\sigma(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\Big].
$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$
(55)\quad \psi = A(\cos\varphi + \sin\varphi) - B\sin n\frac{\pi}{2}\sin 2\varphi + C\cos\varkappa\varphi
$$

$$
+ D\sin\varkappa\varphi + \varphi\Big[E_\mu\sin\varkappa(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + F_\mu\cos\varkappa(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)
$$

$$
+ G_\mu\sin\varkappa(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + H_\mu\cos\varkappa(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\Big]
$$

$$
+ \sum_{m=o(-\mu)}^{m=\infty}\left[E_m\cos m\sigma(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + F_m\sin m\sigma(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\right]
$$

$$
- \sum_{m=o(-\mu)}^{m=\infty}\left[G_m\cos m\sigma(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + H_m\sin m\sigma(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)\right].
$$

Die beiden ersten Differentialquotienten von ψ werden:

$$
(56)\quad \frac{d\psi}{d\varphi} = -A(\sin\varphi - \cos\varphi) - 2B\sin n\frac{\pi}{2}\cos 2\varphi
$$

$$
- \varkappa(C\sin\varkappa\varphi - D\cos\varkappa\varphi) + E_\mu\sin\varkappa(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)
$$

$$
+ F_\mu\cos\varkappa(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + G_\mu\sin\varkappa(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)
$$

$$
+ H_\mu\cos\varkappa(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + \varkappa\varphi\Big[E_\mu\cos\varkappa(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)
$$

$$
- F_\mu\sin\varkappa(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi) + G_\mu\cos\varkappa(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi)
$$

$$- H_\mu \sin \varkappa \left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\Big]$$

$$- \sum_{m=o\,(-\mu)}^{m=\infty} \left[m\sigma E_m \sin m\sigma \left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - m\sigma F_m \cos m\sigma \left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right]$$

$$+ \sum_{m=o\,(-\mu)}^{m=\infty} \left[m\sigma G_m \sin m\sigma \left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - m\sigma H_m \cos m\sigma \left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right].$$

$$(57) \qquad \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = - A\,(\cos\varphi + \sin\varphi) + 4B \sin n\frac{\pi}{2} \sin 2\varphi$$

$$- \varkappa^2 (C \cos \varkappa\varphi + D \sin \varkappa\varphi) + 2\varkappa \Big[E_\mu \cos \varkappa \left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$- F_\mu \sin \varkappa \left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + G_\mu \cos \varkappa \left(\beta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$- H_\mu \sin \varkappa \left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\Big] - \varkappa^2 \varphi \Big[E_\mu \sin \varkappa \left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$+ F_\mu \cos \varkappa \left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + G_\mu \sin \varkappa \left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$+ H_\mu \cos \varkappa \left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\Big]$$

$$- \sum_{m=o\,(-\mu)}^{m=\infty} \left[m^2\sigma^2 E_m \cos m\sigma \left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + m^2\sigma^2 F_m \sin m\sigma \left(\delta_1 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right]$$

$$+ \sum_{m=o\,(-\mu)}^{m=\infty} \left[m^2\sigma^2 G_m \cos m\sigma \left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + m^2\sigma^2 H_m \sin m\sigma \left(\delta_2 + n\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right].$$

Setzt man die Werte von ψ und $d^2\psi/d\varphi^2$ aus den Gleichungen (55) und (57) in die Differentialgleichung (54) ein, so erhält man wieder eine Beziehung, die nur dann für alle beliebigen Werte von φ identisch erfüllt sein kann, wenn die Faktoren der cos und sin gleicher Winkel je gleich sind. Das giebt zur Berechnung der eingeführten Konstanten zunächst die ganze frühere Gleichungsgruppe (39) bis (46), nur dass in den vier letzten Gleichungen m nicht gleich μ gesetzt werden darf. An ihre Stelle treten für die aus den Fourier'schen Reihen ausgeschiedenen vier Glieder mit $m = \mu$ die vier Gleichungen:

$$(58)\qquad \begin{cases} J\omega^2\varkappa\, E_\mu = \varepsilon_1 s_1 a_{1,\mu}, \\ J\omega^2\varkappa\, F_\mu = \varepsilon_1 s_1 b_{1,\mu}, \\ 2\, J\omega^2\varkappa\, G_\mu = \varepsilon_2 s_2 a_{2,\mu}, \\ 2\, J\omega^2\varkappa\, H_\mu = \varepsilon_2 s_2 b_{2,\mu}. \end{cases}$$

Die mit φ multiplicierten Glieder heben sich bei diesem Einsetzen weg, was nötig ist, da die in ihnen auftretenden Koefficienten schon durch die Gleichungsgruppe (58) bestimmt sind. Aus allen Gleichungen lassen sich der Wert von $\varkappa$ und alle eingeführten Koefficienten mit Ausnahme der beiden C und D eindeutig berechnen, so dass Gleichung (55) das vollständige Integral der Gleichung (54) ist.

Für $\varkappa$ erhält man den alten Wert aus Gleichung (47), und da $\varkappa = \mu\sigma$ vorausgesetzt wurde, so folgt:

$$(59)\qquad \mu = \frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{\xi}{\sigma\omega\sqrt{J}}.$$

Das ist aber der schon in Gleichung (53) eingeführte Grenzwert von m, der nur hier eine ganze Zahl werden muss.

Die beiden Integrationskonstanten C und D müssen wieder für jeden Quadranten frisch bestimmt werden. Das geschieht, wie früher, aus der Bedingung, dass sich die Werte von ψ und $d\psi/d\varphi$ beim Uebergange von einem Quadranten zum folgenden nicht ändern. Man erhält zunächst allgemein:

$$\begin{aligned} C_{n+1} = C_n \cos\varkappa\frac{\pi}{2} + D_n \sin\varkappa\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Big[& E_\mu \sin\varkappa\left(\delta_1 + \frac{n+1}{2}\pi\right) \\ & + F_\mu \cos\varkappa\left(\delta_1 + \frac{n+1}{2}\pi\right) + G_\mu \sin\varkappa\left(\delta_2 + \frac{n+1}{2}\pi\right) \\ & + H_\mu \cos\varkappa\left(\delta_2 + \frac{n+1}{2}\pi\right)\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{n+1} = & - C_n \sin\varkappa\frac{\pi}{2} + D_n \cos\varkappa\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\varkappa} A + \frac{2}{\varkappa} B \left(\sin\frac{n}{2}\pi\right. \\ & \left. + \sin\frac{n+1}{2}\pi\right) + \frac{\pi}{2}\Big[E_\mu \cos\varkappa\left(\delta_1 + \frac{n+1}{2}\pi\right) - F_\mu \sin\varkappa\left(\delta_1 + \frac{n+1}{2}\pi\right) \\ & + G_\mu \cos\varkappa\left(\delta_2 + \frac{n+1}{2}\pi\right) - H_\mu \sin\varkappa\left(\delta_2 + \frac{n+1}{2}\pi\right)\Big]. \end{aligned}$$

Wenn man in beiden eckigen Klammern die cos und sin der Summen auflöst und die kürzeren Bezeichnungen:

$$
(60)\quad \begin{cases}
K \equiv \frac{\pi}{2}\Big[E_\mu \sin \varkappa\left(\delta_1+\frac{\pi}{2}\right)+F_\mu \cos \varkappa\left(\delta_1+\frac{\pi}{2}\right) \\
\qquad +G_\mu \sin \varkappa\left(\delta_2+\frac{\pi}{2}\right)+H_\mu \cos \varkappa\left(\delta_2+\frac{\pi}{2}\right)\Big], \\
L \equiv \frac{\pi}{2}\Big[E_\mu \cos \varkappa\left(\delta_1+\frac{\pi}{2}\right)-F_\mu \sin \varkappa\left(\delta_1+\frac{\pi}{2}\right) \\
\qquad +G_\mu \cos \varkappa\left(\delta_2+\frac{\pi}{2}\right)-H_\mu \sin \varkappa\left(\delta_2+\frac{\pi}{2}\right)\Big],
\end{cases}
$$

einführt, so folgt für den Zusammenhang der Integrationskonstanten:

$$
(61)\quad \begin{cases}
C_{n+1}=C_n \cos \varkappa \frac{\pi}{2}+D_n \sin \varkappa \frac{\pi}{2}+K \cos n \frac{\pi}{2}+L \sin n \frac{\pi}{2}, \\
D_{n+1}=-C_n \sin \varkappa \frac{\pi}{2}+D_n \cos \varkappa \frac{\pi}{2}-\frac{2}{\varkappa} A \\
\qquad +\frac{2}{\varkappa} B\left(\sin \frac{n}{2} \pi+\sin \frac{n+1}{2} \pi\right)-K \sin n \frac{\pi}{2}+L \cos n \frac{\pi}{2}.
\end{cases}
$$

Diese Ausdrücke stimmen in ihren ersten Teilen mit den in den Gleichungen (50) für den allgemeinen Fall gefundenen überein, dazu kommen aber hier noch die Glieder mit K und L. Geht man nun wieder von dem Quadranten mit der Ordnungsnummer $n=0$ aus und sieht für ihn C_0 und D_0 als bekannt an, so folgt:

$$
(62)\quad \begin{cases}
C_n=C_0 \cos n \varkappa \frac{\pi}{2}+D_0 \sin n \varkappa \frac{\pi}{2} \\
\qquad -\frac{2}{\varkappa} A\left[\sin \varkappa \frac{\pi}{2}+\sin 2 \varkappa \frac{\pi}{2}+\cdots+\sin (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}\right] \\
\qquad +\frac{2}{\varkappa} B\left[\sin (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}+\sin (n-2) \varkappa \frac{\pi}{2}-\cdots \pm \sin \varkappa \frac{\pi}{2}\right] \\
\qquad +n\left[K \cos (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}+L \sin (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}\right]. \\
D_n=-C_0 \sin n \varkappa \frac{\pi}{2}+D_0 \cos n \varkappa \frac{\pi}{2} \\
\qquad -\frac{2}{\varkappa} A\left[1+\cos \varkappa \frac{\pi}{2}+\cos 2 \varkappa \frac{\pi}{2}+\cdots+\cos (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}\right] \\
\qquad +\frac{2}{\varkappa} B\left[\cos (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}+\cos (n-2) \varkappa \frac{\pi}{2}-\cdots \pm \cos \varkappa \frac{\pi}{2} \pm 1\right] \\
\qquad -n\left[K \sin (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}-L \cos (n-1) \varkappa \frac{\pi}{2}\right].
\end{cases}
$$

Ueber den Vorzeichenwechsel in den mit B multiplizierten eckigen Klammern gilt das Gleiche, wie früher für die Gleichungen (50).

In den neu hinzugekommenen Gliedern mit K und L schwankt der Zahlenwert der eckigen Klammern für die verschiedenen Quadranten zwischen:

$$\pm\sqrt{(K^2 + L^2)}.$$

Da aber noch die Ordnungsnummer n des Quadranten als Faktor dieser Glieder auftritt, so nehmen sie doch im Mittel mit n zu. Daher müssen auch die Integrationskonstanten C_n und D_n schliesslich bis ins Unendliche wachsen, so dass der Fall $\varkappa = m\sigma$ als gefährlich zu bezeichnen ist.

Es wäre auch möglich, dass $\varkappa = m\sigma$ gleichzeitig 1 oder 2 werden könnte. Das hätte den gleichen Einfluss, wie wenn $\varkappa = 1$ oder 2, aber $\varkappa \gtreqless m\sigma$ wäre. Im Integral würden dann zwei Glieder auftreten, die φ als Faktor enthalten, ausser dem in Gleichung (55) schon vorhandenen noch:

$$A\varphi\,(\sin\varphi - \cos\varphi) \text{ oder } B\varphi \sin n\,\frac{\pi}{2}\,\sin 2\,\varphi.$$

Bei C_n und D_n würden aber die Glieder mit K und L ungeändert bleiben, so dass dieser Fall auch gefährlich wäre.

Vervollständigt man die Gleichungen (51) für die Zeiten der Teilschwingungen noch für den Grenzwert $m = \mu$, so wird:

$$t_1 = \varkappa t_\varkappa = \mu\sigma t_\mu. \tag{63}$$

Und da hier ausdrücklich $\varkappa = \mu\sigma$ vorausgesetzt ist, so folgt es als gefährlich, wenn die Zeit $t_\varkappa$ für eine Federschwingung gleich wird der Zeit t_μ für eine Teilschwingung der durch die Schienenstösse veranlassten Vertikalbewegung der Achsen und Räder. Dabei muss:

$$\mu = \frac{\varkappa}{\sigma} \tag{64}$$

eine ganze Zahl sein. Nun giebt $\varkappa$ an, wieviel ganze Schwingungen der Federn beim Galoppieren auf eine Umdrehung der Triebräder kommen, während σ die Anzahl der Schienenlängen bedeutet, um welche die Lokomotive auch bei jeder Umdrehung der Triebräder vorrückt. Der Quotient $\varkappa/\sigma$ ist daher die Anzahl der Federschwingungen zwischen dem Uebergange eines Rades über zwei benachbarte Schienenstösse. Und die letzten Entwickelungen zeigen, dass der Ausschlag des Galoppierens dann im Mittel ununterbrochen zunimmt, wenn die Schienenstösse stets nach einer ganzen Anzahl von Federschwingungen auftreten, wenn sie also immer auf die gleiche Phase der Schwingungen treffen.

Zum Eintritte eines solchen gefährlichen Ganges ist eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit der Triebachsen nötig, die sich für die schon früher zahlenmässig untersuchte Lokomotive folgendermassen findet: Ihre Triebräder haben einen Durchmesser von $1{,}58^m$, somit einen Umfang von $4{,}9637^m$. Rechnet man die Schienenlänge zu 12 bis 18^m, wie sie neuerdings bei den preussischen Staatsbahnen ausgeführt wird [1], so folgt:

$$\sigma = 4{,}9637/12 \text{ bis } 4{,}9637/18 = 0{,}4136 \text{ bis } 0{,}2758,$$

und damit berechnet sich die gefährliche Winkelgeschwindigkeit nach Gleichung (59) zu:

$$\omega = \frac{33{,}50}{\mu} \text{ bis } \frac{50{,}25}{\mu},$$

also zu 33,50 bis 50,25 oder einem ganzen Bruchteile dieser Zahlen. Am gefährlichsten ist dabei natürlich der Wert für $\mu = 1$, weil dann auf jede Federschwingung ein Schienenstoss kommt. Wiederholt sich der Stoss dagegen für $\mu > 1$ erst nach mehreren Schwingungen, so werden die Ausschläge dazwischen durch die Widerstände wieder verkleinert, und das um so mehr, je grösser μ ist. Die untersuchte Lokomotive fährt nun mit einer normalen Winkelgeschwindigkeit von etwas über 20. Bei bestimmter Schienenlänge kann also bei dieser Lokomotive die gefährliche Geschwindigkeit für $\mu = 2$ längere Zeit andauern, so dass sich das Galoppieren gelegentlich stärker ausbilden könnte.

Die Untersuchungen über das Galoppieren, so weit es von den Schienenstössen abhängt, gelten nicht nur für die Lokomotiven, sondern auch für alle übrigen Eisenbahnfahrzeuge, nur haben bei diesen die massgebenden Grössen andere Zahlenwerte. Gegenüber den Lokomotiven ändern sie sich aber gegenseitig so, dass man gefährliche Geschwindigkeiten von ähnlicher Grössenordnung zu

---

[1] Stahl und Eisen, 1896, Seite 9.

erwarten hat. Nun giebt es in der That Eisenbahnfahrzeuge, deren Oberbau auf gewissen Strecken bei bestimmten Fahrgeschwindigkeiten in sehr starke Schwingungen gerät, die man nur dem Einflusse der Schienenstösse zuschreiben kann. Bei einer ganz geringen Aenderung der Geschwindigkeit läuft der Wagen aber sofort wieder ruhig. Doch stellen sich die stärkeren Schwingungen nur bei einer grossen Geschwindigkeit ein, also bei einem kleinen Werte von μ, während man bei grösserem μ keine stärkeren Schwingungen beobachtet.

Aehnliches hat man auch bei den Lokomotiven zu erwarten, und man wird daher als hauptsächlichste gefährliche Geschwindigkeit die für $m = \mu = 1$ ansehen müssen, also nach Gleichung (53):

$$\omega_g = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon_2 s_2 (s_1 + s_2)}{J}}. \tag{65}$$

Um eine Gefahr zu beseitigen, muss man die Lokomotive so anordnen, dass die normale Winkelgeschwindigkeit $\omega_n \gtrless \omega_g$ wird. Da aber die Maschine auch gelegentlich anhaltend mit unternormalen Geschwindigkeiten fahren kann, so ist es sicherer $\omega_n < \omega_g$ zu halten, oder nach Gleichung (65):

$$\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon_2 s_2 (s_1 + s_2)}{J}} > \omega_n \tag{66}$$

zu machen. Das wird aber um so leichter gehen, je grösser der Radstand, je stärker die Federn, je länger die Schienen gegenüber den Triebraddurchmessern und je kleiner das Trägheitsmoment J der Lokomotive genommen werden. Ein kleineres J müsste durch Vergrösserung des Kesseldurchmessers und dafür Verkürzung des Kessels erreicht werden. Man erhält also keine eigentlichen Konstruktionsregeln, sondern nur Grenzbedingungen.

Die vorstehenden Entwickelungen bestätigen auch für den Einfluss der Schienenstösse das, was schon Zeuner über die Untersuchungen der gaukelnden Bewegungen der Lokomotiven gesagt hat: dass sie keine für die praktische Anwendung wichtigen Ergebnisse liefern. Nachweisbar ist eigentlich nur das Vorhandensein unendlich vieler sogenannter gefährlicher Geschwindigkeiten, bei denen die Schwingungen, abgesehen von den Widerständen, ununterbrochen zunehmen und schliesslich bis zu einem hohen Betrage anwachsen könnten. Diese gefährlichen Geschwindigkeiten treten dann auf, wenn die Zeit für eine Federschwingung gleich oder ein ganzes Vielfaches von der Zeit ist, die eine Achse für das Durchfahren einer Schienenlänge nötig hat. Dass solche Geschwindigkeiten gefährlich sind, erscheint aber auch ohne Rechnung als selbstverständlich. Ebenso müsste man allerdings auch erwarten, dass alle ganzzahligen Werte von $\varkappa$ gefährlich wären. Es ist auffallend, dass bei den Werten von $\varkappa$, die das doppelte einer ungeraden Zahl sind, keine Zunahme der Schwingungen eintritt.

Eigentliche Konstruktionsregeln, die man bei den Lokomotiven einhalten müsste, um den Einfluss der Schienenstösse auf die gaukelnden Bewegungen möglichst zu verkleinern, liessen sich aus den Entwickelungen nicht herleiten, sondern nur gewisse Grenzbedingungen.

Dagegen zeigen die vorstehenden Untersuchungen, dass man ganz wohl im stande ist, die Schienenstösse analytisch zu berücksichtigen. Man muss nur die Auffassung verlassen, dass es sich dabei um Kraftwirkungen handle, die gar keine Zeitdauer haben. Solche Kraftwirkungen könnten, wenn sie, wie in Wirklichkeit immer, endlich bleiben, bei einer endlichen Masse überhaupt keine Bewegungsänderung hervorbringen. Dazu sind vielmehr Kraftwirkungen von endlicher Zeitdauer nötig. Die den vorstehenden Entwickelungen zu Grunde liegenden Anschauungen stehen auch durchaus im Einklange mit den sonst bei den Untersuchungen über den vollkommen elastischen Stoss üblichen, wonach der gegenseitige Druck zwischen zwei zusammenstossenden Körpern und ihre durch ihn hervorgerufenen Gestaltsänderungen von Null beginnend stetig bis zu einem gewissen endlich bleibenden Maximum wachsen, um darauf wieder stetig bis Null abzunehmen. Solche stetige Aenderungen sind aber der analytischen Behandlung zugänglich.

Zürich, März 1896.