Die konjugierten Kernflächen des Pentaeders.

Von

C. F. Geiser.

Zu einer algebraischen Fläche n^{ten} Grades Φ gehören zwei konjugierte Kernflächen, von denen die eine S (die Steineriana) vom Grade $4(n-2)^3$ als Ort der Punkte P auftritt, deren erste Polare nach Φ einen Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ besitzt, während die andere $\mathfrak{H}$ (die Hessiana) vom Grade $4(n-2)$ der Ort dieser Punkte $\mathfrak{P}$ ist; die beiden Kernflächen sind, abgesehen von singulären Stellen, durch die sich entsprechenden Punkte P und $\mathfrak{P}$ eindeutig und reziprok auf einander bezogen. Aus der Gleichung von Φ lässt sich die Gleichung von $\mathfrak{H}$ sofort herstellen, hingegen ist die Gleichung von S das Resultat eines Eliminationsprozesses, der sich nur in den einfachsten Fällen durchführen lässt. Ist $n = 3$, so fallen $\mathfrak{H}$ und S in die Steinersche Kernfläche (den Ort der reziproken Pole) der Fläche dritten Grades zusammen. Für $n = 4$ hat Clebsch [1]) nach einem von Hesse herrührenden Verfahren die Gleichung 32^{ten} Grades von S bilden gelehrt.

Schliesst man den Fall, wo Φ eine Kegelfläche oder Spezialfall einer solchen ist, aus, so ist $\mathfrak{H}$ immer eine vollkommen bestimmte Fläche $4(n-2)^{ten}$ Grades, die sich allerdings unter bestimmten Umständen in Teile niedrigerer Ordnung auflöst, hingegen kann es vorkommen, dass die gegebene Definition von S nicht mehr ausreicht und durch eine andere ersetzt werden muss. Hat Φ einen dreifachen Punkt Π, so erscheint derselbe in der ersten Polaren jedes beliebigen Punktes im Raume als Doppelpunkt und $\mathfrak{H}$ wird

[1]) Crelles Journal Bd. 59: „Über die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung“, § 1.

zum Ort derjenigen Punkte $\mathfrak{P}$, welche als zweite Doppelpunkte in diesen Polaren möglich sind. Als Fläche S aber, der nach der ursprünglichen Definition jeder beliebige Punkt des Raumes angehören müsste, kann man jetzt den Ort der Punkte P auffassen, deren erste Polare neben Π noch einen zweiten Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ besitzt. In gleicher Weise sind die ursprünglichen Festsetzungen zu modifizieren, wenn in Φ irgend welche μ-fachen Punkte oder μ-fachen Kurven ($\mu > 2$) enthalten sind. Die Bezeichnungen: konjugierte Kernflächen, Hessiana, Steineriana, entsprechende Punkte können auch in allen derartigen Ausnahmefällen beibehalten werden.

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse diene als einfachster Fall die Steinersche Römerfläche

$$\Phi_4 = \eta^2\zeta^2 + \zeta^2\xi^2 + \xi^2\eta^2 - 2\,\xi\eta\zeta\tau = 0$$

mit dem dreifachen Punkte ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$) und den drei in ihm sich schneidenden Doppelgeraden ($\eta = 0$, $\zeta = 0$; $\zeta = 0$, $\xi = 0$; $\xi = 0$, $\eta = 0$). Ihre Hessiana wird durch die Gleichung gegeben:

$$\mathfrak{H}_8 = \mathfrak{y}^4\mathfrak{z}^4 + \mathfrak{z}^4\mathfrak{x}^4 + \mathfrak{x}^4\mathfrak{y}^4 - (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{t}^2)\,\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2 = 0.$$

Die erste Polare des Punktes P (x, y, z, t) nach Φ_4 ist

$$K_3 - \tau\,K_2 = 0 \quad \text{für}$$

$$K_3 = x \cdot \xi\,(\eta^2 + \zeta^2) + y \cdot \eta\,(\zeta^2 + \xi^2) + z \cdot \zeta\,(\xi^2 + \eta^2) - t \cdot \xi\eta\zeta$$
$$K_2 = x \cdot \eta\zeta + y \cdot \zeta\xi + z \cdot \xi\eta;$$

sie hat in ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$) einen Doppelpunkt. Ein zweiter Doppelpunkt tritt ein, wenn die beiden konzentrischen Kegel $K_3 = 0$ und $K_2 = 0$ sich längs einer Kante berühren, oder auch, indem man

$$\xi = \frac{1}{\xi'}, \quad \eta = \frac{1}{\eta'}, \quad \zeta = \frac{1}{\zeta'},$$

setzt und $\xi'\eta'\zeta'$ als homogene Dreiseitskoordinaten in einer Ebene betrachtet: wenn die Kurve dritten Grades

$$C_3' = x \cdot \xi'\,(\eta'^2 + \zeta'^2) + y \cdot \eta'\,(\zeta'^2 + \xi'^2) + z \cdot \zeta'\,(\xi'^2 + \eta'^2) - t \cdot \xi'\eta'\zeta' = 0$$

von der Geraden $G' = x \cdot \xi' + y \cdot \eta' + z \cdot \zeta' = 0$ berührt wird. In diesem Falle wird P ein Punkt der eigentlichen Steineriana von Φ_4, zu deren Gleichung man also gelangt, wenn man C_3' aus Punktkoordinaten in Linienkoordinaten überführt. Man findet für diese

Gleichung $S_{10} = 0$, wo S_{10} eine symmetrische Determinante 4^{ten} Grades ist[1]), deren Entwicklung die x, y, z, t im zehnten Grade enthält.

Ein anderes Beispiel, das in mannigfachen Beziehungen zu dem Sylvesterschen Pentaeder[2]) der Fläche dritten Grades, insbesondere der Clebschschen Diagonalfläche[3]) steht, soll im Nachfolgenden ausführlicher behandelt werden.

I.

Fünf Ebenen $E_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5$), die voneinander unabhängig sind, bilden ein Pentaeder, das als Spezialfall einer Fläche 5^{ten} Grades Φ_5 aufgefasst werden kann. Die zehn Kanten $G_{\alpha\beta} = (E_\alpha, E_\beta)$ sind Doppelgeraden, die zehn Ecken $E_{\lambda\mu\nu} = (E_\lambda, E_\mu, E_\nu)$ sind dreifache Punkte von Φ_5. Die ersten Polaren φ_4 nach Φ_5 sind also für beliebige Punkte des Raumes Flächen 4^{ten} Grades, welche die Geraden $G_{\alpha\beta}$ einfach enthalten und die zehn Punkte $E_{\lambda\mu\nu}$ zu Doppelpunkten besitzen. Liegt der Pol P in der Ebene E_1, so zerfällt φ_4 in E_1 und eine Fläche 3^{ten} Grades, für welche die Ecken des Tetraeders $E_2 E_3 E_4 E_5$ Doppelpunkte sind. Ist P ein Punkt der Kante G_{12}, so besteht φ_4 aus den Ebenen $E_1 E_2$ und einem Kegel zweiten Grades, welcher dem von $E_3 E_4 E_5$ gebildeten Trieder umschrieben ist. Für die Ecke E_{123} setzt sich φ_4 aus dem Trieder $E_1 E_2 E_3$ und der Polarebene von E_{123} nach dem als Fläche 2^{ten} Grades aufgefassten Ebenenpaar $E_4 E_5$ zusammen.

Zur analytischen Darstellung bedient man sich am besten der auf die $E_\varkappa$ bezogenen Pentaederkoordinaten, zwischen denen man die identische Relation voraussetzt:

$$\Sigma \xi = \xi + \eta + \zeta + \tau + \omega \equiv 0.$$

Dann ist das Pentaeder selbst durch

$$\Phi_5 = \xi \eta \zeta \tau \omega = 0$$

gegeben. Für die Hessiana dieser Fläche ergibt sich

$$\mathfrak{H}_{12} = \mathfrak{x}^2 \mathfrak{y}^2 \mathfrak{z}^2 \mathfrak{t}^2 \mathfrak{w}^2 (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{t}^2 + \mathfrak{w}^2) = 0 \qquad (\Sigma \mathfrak{x} = 0),$$

wo nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{w}$ als laufende Koordinaten eingeführt sind. $\mathfrak{H}_{12}$

---

[1]) Vergl. z. B. Schläfli, „Beitrag zur Theorie der Elimination". Denkschriften der Wiener Akademie 1852, pag. 67.

[2]) Salmon, „Analytic Geometry of three dimensions". 3. ed. pag. 459 etc.

[3]) „Das Fünfseit und die Gleichung 5^{ten} Grades". Math. Annalen IV, 284.

besteht also aus den doppelt gelegten Pentaederebenen und einer Fläche 2^{ten} Grades

$$\mathfrak{H}_2 = \Sigma \mathfrak{x}^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{t}^2 + \mathfrak{w}^2 = 0,$$

welche im Nachfolgenden als eigentliche Hessiana des Pentaeders betrachtet werden soll.

$\mathfrak{H}_2$ hat mit G_{12} zwei Punkte gemein, welche mit E_{123}, E_{124}, E_{125} je eine äquianharmonische Gruppe bilden; auf den zehn Kanten gibt es im Ganzen zwanzig solcher Punkte C. Die Ebene E_5 schneidet aus $\mathfrak{H}_2$ den „Kegelschnitt der vierzehn Punkte“, der zu dem Vierseit G_{15}, G_{25}, G_{35}, G_{45} gehört; er geht durch die auf den Seiten desselben gelegenen acht Punkte C. Auf einer Diagonale d des Vierseits liegen zwei Punkte des Kegelschnitts, welche gleichzeitig harmonisch sind zu dem Paare der auf d gelegenen Ecken und zu dem Schnittpunktenpaar mit den beiden anderen Diagonalen; es liegen dreissig solcher Punkte D auf $\mathfrak{H}_2$.

Ein Punkt $\mathfrak{P}$ $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}, \mathfrak{w})$ auf $\mathfrak{H}_2$ ist — neben den zehn $E_{\lambda\mu\nu}$ — elfter Doppelpunkt in einer ersten Polaren φ_4 von Φ_5. Zwischen den Koordinaten von $\mathfrak{P}$ und denjenigen des zugehörigen Pols $P(x, y, z, t, w)$ von φ_4 existieren Bedingungsgleichungen, welche erfüllt sind für

$$x : y : z : t : w = \mathfrak{x}^2 : \mathfrak{y}^2 : \mathfrak{z}^2 : \mathfrak{t}^2 : \mathfrak{w}^2$$

oder

$$\sqrt{x} : \sqrt{y} : \sqrt{z} : \sqrt{t} : \sqrt{w} = \mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} : \mathfrak{t} : \mathfrak{w}.$$

Hieraus ergibt sich

$$S = \Sigma \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{t} + \sqrt{w} = 0.$$

Die Unbestimmtheit der Wurzelzeichen wird, abgesehen von Ausnahmefällen, gehoben und damit die eindeutige und reziproke Beziehung zwischen $\mathfrak{P}$ und P hergestellt durch die Bedingung $\Sigma x = 0$. Die Gleichung $S = 0$ liefert die eigentliche Steineriana des Pentaeders.

Zu dieser Gleichung gelangt man auch durch Betrachtungen über den Tangentialkegel, welcher von einem ihrer mehrfachen Punkte aus an eine algebraische Fläche gelegt werden kann. Für den vorliegenden Fall dienen die Untersuchungen Kummers[1]) über

---

[1]) „Über die algebraischen Strahlensysteme.“ Abhandlungen der Berliner Akademie 1866. Vergl. auch Salmon l. c. pag. 508.

die Singularitäten der Brennflächen der Strahlensysteme zweiter Ordnung als Ausgangspunkt.

Die Gleichung der ersten Polaren von P nach Φ_5 lautet:

$$\varphi_4 = \frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} + \frac{t}{\tau} + \frac{w}{\omega} = 0$$

wo die ξ, η, .. ω laufende Koordinaten sind. Der Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ ist Doppelpunkt von φ_4 und der in ihm sich anschmiegende Kegel wird gegeben durch

$$K_6 = \{(x\eta\zeta + y\zeta\xi + z\xi\eta)\,(\xi + \eta + \zeta) + (t - w)\,\xi\eta\zeta\}^2$$
$$- 4\,t\xi\eta\zeta\,(\xi + \eta + \zeta)\,(x\eta\zeta + y\zeta\xi + z\xi\eta) = 0$$

oder für $(x\eta\zeta + y\zeta\xi + z\xi\eta)\,(\xi + \eta + \zeta) = Q_3$, $\xi\eta\zeta = P_3$

$$K_6 = Q_3^2 - 2\,(t + w)\,Q_3\,P_3 + (t - w)^2\,P_3^2 = 0.$$

K_6 zerfällt in zwei Kegel dritten Grades, die dem aus P_3 und Q_3 gebildeten Büschel angehören. Die neun Grundkanten des Büschels (von denen dreimal zwei zusammenfallen) gehen nach den neun übrigen Doppelpunkten von φ_4. Soll φ_4 einen elften Doppelpunkt enthalten, so muss K_6 einen zehnten Doppelstrahl besitzen, d. h. es muss einer der beiden Kegel dritten Grades

$$K_3 = Q_3 - (\sqrt{t} \pm \sqrt{w})^2\,P_3 = 0$$

einen Doppelstrahl haben.

Man fasse für einen Augenblick (ξ, η, ζ) als homogene Dreiseitskoordinaten in der Ebene auf, so stellt

$$\frac{a}{\xi} + \frac{b}{\eta} + \frac{c}{\zeta} + \frac{d}{\tau} = 0 \quad (\xi + \eta + \zeta + \tau \equiv 0)$$

eine Kurve dritten Grades dar[1]). Soll dieselbe eine eigentliche Kurve dritten Grades mit Doppelpunkt sein, so besteht die Relation

$$\pm\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \pm \sqrt{d} = 0.$$

Wendet man dies auf die Kegel K_3 an, so erscheint wieder die Gleichung $S = 0$ der eigentlichen Steineriana.

---

[1]) Man vergleiche: Berzolari, „Sulla lemniscata projettiva“. Rendiconti del R. Istituto Lombardo 1904, wo die hier für das Pentaeder gegebenen Entwicklungen für das ebene Vierseit durchgeführt sind.

Um dieselbe rational zu machen, hat man die Norm N von

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{t}+\sqrt{w}$$

zu bestimmen. Unter Benutzung von $\Sigma x = 0$ erhält man

$$S_8 = \{(\Sigma x y)^2 - 4\,\Sigma x y z t\}^2 - 64\,x y z t w \cdot \Sigma x y z = 0$$

wo die Σ in bekannter Weise symmetrische Funktionen der $x y z t w$ anzeigen. Die eigentliche Steineriana des Pentaeders ist also eine Fläche achten Grades.

II.

Die Fläche S_8 wird von der Pentaederebene w längs der Kurve berührt, die auf $w = 0$ von der Fläche vierten Grades

$$(\Sigma x y)^2 - 4\,x y z t = 0$$

ausgeschnitten wird. Hiebei bezieht sich Σ nur noch auf die Veränderlichen $x y z t$. Oder auch: die irrationale Gleichung für S_8 wird für $w = 0$ zu

$$\pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} \pm \sqrt{t} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer auf ihre singulären Tangentialebenen bezogenen Römerfläche. Es wird also S_8 von jeder Pentaederebene längs einer Unikursalkurve vierten Grades berührt, für welche die Schnittgeraden mit den vier andern Pentaederebenen Doppeltangenten sind. Die fünf Berührungskurven liegen auf der Fläche vierten Grades

$$(\Sigma x y)^2 - 4\,\Sigma x y z t = 0,$$

wo die Σ sich wieder auf alle fünf Veränderlichen beziehen.

S_8 und irgend eine Pentaederkante begegnen sich in Punkten, für welche $(\Sigma x y)^4 = 0$ ist; es sind also die vierfach zu zählenden Schnittpunkte der Kante mit der Fläche zweiten Grades $\Sigma x y = 0$, welche aber wegen $\Sigma x = 0$ identisch mit $\mathfrak{H}_2$ ist [1]). Die Steineriana hat also mit den Pentaederkanten die vierfach zu zählenden 20 Punkte C der Hessiana gemein. Da man das Polynom S_8 in die Form setzen kann

$$S_8 = \frac{1}{16}\,\mathfrak{H}_2^4 - 2\,x y z\,(t + w)\,\mathfrak{H}_2^2 + 64\,x^2 y^2 z^2\,(t - w)^2,$$
$$+ \text{ Glieder höherer Ordnung in } t \text{ und } w,$$

[1]) Die Schnittpunkte von $t = 0$, $w = 0$ mit S_8 liegen auch auf dem Kegel zweiten Grades $\pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 0$, welcher die Pentaederebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ berührt.

so sind die C uniplanare Doppelpunkte der Fläche S_8; je zwei der nämlichen Kante angehörige geben die nämliche Uniplanarebene (für $t=0$, $w=0$ ist sie $t-w=0$).

Bei passender Anordnung der 16 Faktoren, aus denen die Norm von $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{t}+\sqrt{w}$ zu bilden ist, ergibt sich

$$N = P \cdot E^2 + R \cdot K_2^2,$$

wo $\quad E = x - y,\ K_2 = z^2 + t^2 + w^2 - 2\,tw - 2\,wz - 2\,zt$

und P und R ganze Funktionen der $xyztw$ sind.

Es folgt daraus, dass S_8 einen Doppelkegelschnitt $E=0$, $K_2=0$ besitzt, welcher die beiden auf der Kante $(x=0,\ y=0)$ gelegenen Punkte C enthält; er werde mit K_{xy} bezeichnet. Durch Vertauschung der Koordinaten gegeneinander erhält man im ganzen zehn solcher Doppelkegelschnitte.

Die drei Ebenen, in denen K_{yz}, K_{zx}, K_{xy} liegen, haben die Gerade $x=y=z$ gemein; auf dieser schneiden die drei Kegelschnitte das nämliche Punktenpaar aus [1]), das zugleich auf dem Ebenenpaar gelegen ist:

$$4\,t^2 - tw + 4\,w^2 = 0.$$

Die beiden Punkte des Paares sind dreifache Punkte der S_8, die Steineriana hat also 20 dreifache Punkte A, die zugleich dreifache Punkte in der aus den zehn Kegelschnitten bestehenden Doppelkurve der Fläche sind.

Zwei Kegelschnitte K, die in der gewählten Bezeichnung der Indices einen Buchstaben gemein haben, schneiden sich in einem Paare der Punkte A, durch welches noch ein dritter K geht. Auf einem K liegen sechs A (z. B. auf K_{xy} die durch K_{xz}, K_{xt}, K_{xw} ausgeschnittenen Paare, die resp. zugleich auf K_{yz}, K_{yt}, K_{yw} liegen). Zwei K, die keinen Index gemein haben, schneiden sich nur in einem einzigen Punkte; dieser ist ein Doppelpunkt in der Doppelkurve der S_8 und liegt in einer Pentaederebene (K_{yz} und K_{tw} haben den Punkt $x=0$, $y-z=0$, $t-w=0$ gemein). Es gibt fünfzehn solcher Schnittpunkte B: in jeder Pentaederebene drei, die Diagonalpunkte des in ihr von den vier andern ausge-

---

[1]) Die Gerade hat mit S_8 noch die beiden Punkte gemein, die zugleich dem Ebenenpaar $4\,t^2 + 7\,tw + 4\,w^2 = 0$ angehören.

schnittenen Vierseits. Jeder Kegelschnitt K enthält drei derselben, z. B. K_{xy} diejenigen, in welchen er von K_{tw}, K_{wz}, K_{zt} getroffen wird.

Durch 55 Punkte ist im allgemeinen eine Fläche fünften Grades unzweideutig bestimmt. Setzt man voraus, dass die Gruppen $20\,A + 15\,B + 20\,C$ zur Bestimmung von F_5 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen liefern, so wird F_5 mit jedem K elf Punkte: $6\,A + 3\,B + 2\,C$ gemein haben, demnach ihn seiner ganzen Ausdehnung nach enthalten. Unter dem gemachten Vorbehalt gilt also der Satz: Durch die Doppelkurve der Steineriana S_8 geht eine unzweideutig bestimmte Fläche fünften Grades; sie hat die 20 Punkte A zu Doppelpunkten.

Zu den Doppelkegelschnitten und den dreifachen Punkten von S_8 gelangt man auch mit Hülfe des Kegels K_6, der in einer Pentaederecke sich einer ersten Polaren φ_4 von Φ_5 anschliesst. Unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungsweisen und Interpretationen bemerke man zunächst, dass die Kurve dritten Grades

$$\frac{a}{\xi} + \frac{b}{\eta} + \frac{c}{\zeta} + \frac{d}{\tau} = 0$$

zwei Doppelpunkte besitzt (in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt), wenn zweimal zwei der Koeffizienten a, b, c, d einander gleich werden. Soll also einer der beiden in

$$K_3 = Q_3 - (\sqrt{t} \pm \sqrt{w})^2 \cdot P_3 = 0$$

oder
$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} - \frac{(\sqrt{t} \pm w)^2}{\xi + \eta + \zeta} = 0$$

enthaltenen Kegel zwei Doppelstrahlen besitzen, so müssen in der letzten Gleichung zweimal zwei der Zähler übereinstimmen. Die Annahme

$$x = y \text{ und } z = (\sqrt{t} \pm \sqrt{w})^2 \text{ oder } \pm\sqrt{z} \pm \sqrt{t} \pm \sqrt{w} = 0$$

führt zu dem Kegelschnitt K_{xy}, dessen Punkte nach Φ_5 erste Polaren erzeugen, welche neben den zehn Pentaederecken noch zwei weitere Doppelpunkte besitzen. Analog ergeben sich die andern K.

Aus der identischen Gleichung

$$(\xi + \eta + \zeta)(\eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta) \equiv (\eta + \zeta)(\zeta + \xi)(\xi + \eta) + \xi\eta\zeta$$

ergibt sich, dass für $x = y = z$

$$Q_3 - x P_3 = (\eta + \zeta)(\zeta + \xi)(\xi + \eta) = 0$$

ein Ebenentripel, also einen Kegel dritten Grades mit drei Doppelkanten darstellt. Soll das Tripel einen Bestandteil von

$$K_6 = Q_3^2 - 2(t+w)\, Q_3\, P_3 + (t-w)^2 P_3^2 = 0$$

bilden, so ist $\qquad x^2 - 2(t+w)\, x + (t-w)^2 = 0$

und wegen $\Sigma x = 0$:

$$4\, t^2 - t w + 4\, w^2 = 0,$$

womit man wieder auf das erstgefundene der Punktenpaare A geführt ist.

Auf Grundlage der gefundenen Resultate kann man im Anschlusse an die zitierten Untersuchungen Kummers und deren Darstellung bei Salmon zu den Eigenschaften derjenigen Flächen vierten Grades mit 10, 11, 12, 13 Doppelpunkten gelangen, bei welchen zehn der Doppelpunkte die Ecken eines Pentaeders sind. Es ergibt sich z. B., dass die hier auftretende Fläche mit 13 Doppelpunkten zu derjenigen Art gehört, welche rücksichtlich der in den Doppelpunkten sich anschmiegenden Kegel durch die Bezeichnung

$$3\,(4_3, 1, 1) + 1\,(3, 1, 1, 1) + 9\,(3_1, 2, 1)$$

gegeben ist.[1])

III.

Durch die Proportion $x : y : z : t : w = \mathfrak{x}^2 : \mathfrak{y}^2 : \mathfrak{z}^2 : \mathfrak{t}^2 : \mathfrak{w}^2$ und die Gleichungen

$$S_8 = \Sigma \pm \sqrt{x} = 0, \ (\Sigma x = 0); \qquad \mathfrak{H}_2 = \Sigma \mathfrak{x}^2 = 0, \ (\Sigma \mathfrak{x} = 0)$$

sind die Punkte P von S_8 und die Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}_2$ eindeutig und reziprok aufeinander bezogen. Es treten dabei folgende Ausnahmen ein: Ist $x = y$, so liegt P in der Ebene $E_{xy} = x - y = 0$ auf dem Doppelkegelschnitt K_{xy} und man hat für denselben die beiden Gleichungen

$$\pm \sqrt{x} \pm \sqrt{y} = 0, \ \pm \sqrt{z} \pm \sqrt{t} \pm \sqrt{w} = 0.$$

Für die korrespondierenden Punkte $\mathfrak{P}$ ist also

$$\pm \mathfrak{x} \pm \mathfrak{y} = 0, \ \pm \mathfrak{z} \pm \mathfrak{t} \pm \mathfrak{w} = 0.$$

---

[1]) Salmon l. c. pag. 509.

Wählt man überall die positiven Vorzeichen, so ist wegen der identischen Gleichung $\Sigma \mathfrak{x} = 0$ von den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{z} + \mathfrak{t} + \mathfrak{w} = 0$$

jede die Folge der andern, sie stellen beide die nämliche Ebene $\mathfrak{E}_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ dar, welche aus $\mathfrak{H}_2$ einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ ausschneidet. Zu jedem Punkte $P\ (x, y, z, t, w)$ auf K_{xy} gehören in diesem Falle zwei auf $\mathfrak{K}_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ gelegene Punkte $\mathfrak{P}_1\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}, \mathfrak{w})$ und $\mathfrak{P}_2\ (-\mathfrak{x}, -\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}, \mathfrak{w})$, deren Verbindungsgerade durch den festen Punkt $\mathfrak{z} = 0$, $\mathfrak{t} = 0$, $\mathfrak{w} = 0$ geht.

Zur geometrischen Veranschaulichung[1]) ziehe man neben der eben benutzten Bezeichnung noch diejenige im Eingang von I zu, indem man gleichzeitig den $xyztw$ in gleicher Reihenfolge die Indices 12345 entsprechen lässt. Die Pentaederkante G_{12} und die gegenüberliegende Ecke E_{345} bestimmen die Ebene $\mathfrak{E}_{12}$. Die Ebenen $\mathfrak{E}_{45}$, $\mathfrak{E}_{53}$, $\mathfrak{E}_{34}$ schneiden E_3, E_4, E_5, resp. in Geraden, welche der Ebene $\mathfrak{E}_{12}$ angehören. E_{12} ergibt sich als $\mathfrak{E}_{12}$ harmonisch zugeordnet in Bezug auf E_1 und E_2. Die Ebenen E_{45}, E_{54}, E_{34} haben eine Gerade Γ_{12} $(z = t = w)$ gemein; ihr Schnittpunkt mit E_{12} sei S_{12}. In E_{12} schneiden E_3, E_4, E_5 ein Dreiseit aus, dessen Seiten Tangenten von K_{12} $(= K_{xy})$ sind. Die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte mit den Gegenecken treffen sich in S_{12}. — Zu jedem dreifachen Punkte A auf S_8 gehören drei Punkte auf $\mathfrak{H}_2$. Den beiden in Γ_{12} gelegenen A entsprechen zwei Tripel, die aus den Kanten des Trieders $\mathfrak{E}_{45}$, $\mathfrak{E}_{53}$, $\mathfrak{E}_{34}$ durch das Ebenenpaar $2\,\mathfrak{t}^2 + 3\,\mathfrak{t}\mathfrak{w} + 2\,\mathfrak{w}^2 = 0$ ausgeschnitten werden.

Bewegt sich $\mathfrak{P}$ auf einer Erzeugenden $\mathfrak{G}$ der Fläche zweiten Grades $\mathfrak{H}_2$, so beschreibt P auf S_8 einen Kegelschnitt k, der die fünf Pentaederebenen berührt. Durchläuft $\mathfrak{G}$ die eine Schar der Erzeugenden von $\mathfrak{H}_2$, so entsteht auf S_8 eine Schar von Kegelschnitten k, deren Ebenen eine abwickelbare Fläche sechster Klasse $\mathfrak{A}_6$ bilden. Die beiden Developpabeln, die den beiden Scharen der Erzeugenden von $\mathfrak{H}_2$ zugehören, haben 20 Tangentialebenen miteinander gemein. Durch die Pentaederkante G_{12} gehen zwei der-

[1]) Allgemeinere synthetische Betrachtungen über das Pentaeder finden sich bei Sturm, Flächen dritten Grades. 1867. [4^{tes} Kapitel: Die Kernfläche einer kubischen Fläche.]

selben; sie sind nach den beiden einfachen Schnittpunkten gerichtet, welche Γ_{12} (ausser zwei dreifachen Punkten) mit S_8 gemein hat.

Durch die im allgemeinen eindeutige und reciproke Beziehung zwischen den Punkten P auf S_8 und den Punkten $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{H}_2$ ist eine Abbildung der beiden Flächen aufeinander gegeben. Dem Schnitte C_8 von S_8 mit der Ebene

$$E = ax + by + cz + dt + ew = 0$$

entspricht der Schnitt $\mathfrak{C}_4$ von $\mathfrak{H}_2$ mit der Fläche zweiten Grades

$$\mathfrak{F}_2 = a\mathfrak{x}^2 + b\mathfrak{y}^2 + c\mathfrak{z}^2 + d\mathfrak{t}^2 + e\mathfrak{w}^2 = 0.$$

Nun kann man E durch $E + \lambda \Sigma x$ ersetzen und λ aus der Gleichung $\Sigma(a + \lambda) = 0$ bestimmen. Dann ergibt sich für E eine Gleichung

$$E = \mathfrak{x}_0 x + \mathfrak{y}_0 y + \mathfrak{z}_0 z + \mathfrak{t}_0 t + \mathfrak{w}_0 w = 0, \quad (\Sigma \mathfrak{x}_0 = 0)$$

wozu $\quad \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}_0 \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}_0 \mathfrak{z}^2 + \mathfrak{t}_0 \mathfrak{t}^2 + \mathfrak{w}_0 \mathfrak{w}^2 = 0 \quad$ gehört.

Aber dies neue $\mathfrak{F}_2$ ist die erste Polare des Punktes $\mathfrak{P}_0(\mathfrak{x}_0\, \mathfrak{y}_0\, \mathfrak{z}_0\, \mathfrak{t}_0\, \mathfrak{w}_0)$ nach der aus dem Fundamentalpentaeder hervorgehenden Diagonalfläche

$$\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{x}^3 + \mathfrak{y}^3 + \mathfrak{z}^3 + \mathfrak{t}^3 + \mathfrak{w}^3 = 0.$$

Da zudem $\mathfrak{P}_0$ und E Pol und Polarebene nach $\mathfrak{H}_2$ sind, so werden die ebenen Schnitte C_8 in einfachster Weise in Beziehung gesetzt zu den Schnittkurven $\mathfrak{C}_4$ der ersten Polaren von $\mathfrak{D}_3$ mit $\mathfrak{H}_2$. Man kann übrigens, wenn es dienlich erscheint, eine erste Polare $\mathfrak{F}_2$ immer durch eine beliebige Fläche des Büschels $\mathfrak{F}_2 + \mu \mathfrak{H}_2 = 0$ ersetzen, ohne $\mathfrak{C}_4$ zu verändern.

Die $\mathfrak{C}_4$ sind vom Geschlechte eins, das nämliche Geschlecht kommt auch den C_8 zu. Wegen der Doppelkurve von S_8 hat ein ebener Schnitt derselben zwanzig Doppelpunkte, man kann also die übrigen Singularitäten der C_8 bestimmen und findet insbesondere die Klasse sechzehn. Einem ebenen Schnitt von S_8 durch eine Pentaederkante entspricht auf $\mathfrak{H}_2$ der Schnitt mit einem Ebenenpaar, dessen Achse die nämliche Kante ist. Die C_8 löst sich in diesem Fall in zwei Unikursalkurven vierten Grades, die $\mathfrak{C}_4$ in zwei Kegelschnitte auf. Der Berührungskurve von S_8 mit einer Pentaederebene entspricht der doppelt gelegte Schnitt von $\mathfrak{H}_2$ mit der nämlichen Pentaederebene. Jede dieser Berührungskurven ist die Steineriana des vollständigen Vierseits, das in ihrer Ebene von den vier andern Pentaederebenen ausgeschnitten wird, der entsprechende Kegelschnitt ist die zugehörige Hessiana.

Die Kurven C_8, welche ein beliebiges Ebenenbüschel $B(E)$ auf S_8 erzeugt, werden auf $\mathfrak{H}_2$ durch die $\mathfrak{C}_4$ abgebildet, welche zu dem entsprechenden Flächenbüschel $\mathfrak{B}(\mathfrak{F}_2)$ gehören. Ist E eine Tangentialebene von S_8, so berührt die entsprechende $\mathfrak{F}_2$ die $\mathfrak{H}_2$ und der Berührungspunkt ist die Spitze eines Kegels zweiten Grades, der die zugehörige $\mathfrak{C}_4$ enthält. Das Büschel $\mathfrak{B}$ bestimmt mit $\mathfrak{H}_2$ ein Bündel von Flächen zweiten Grades, dessen Kegelspitzen eine Raumkurve sechsten Grades $\mathfrak{C}_6$ erfüllen. Die zwölf Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_6$ mit $\mathfrak{H}_2$ zeigen, dass zwölf Ebenen des Büschels B die S_8 berühren, diese ist also von zwölfter Klasse.

Die Berührungskurve B_0 des von einem Punkte Q_0 der S_8 umschriebenen Kegels K_0 liegt auf der ersten Polaren von Q_0 nach S_8. Diese Polare enthält die zehn Doppelkegelschnitte einfach, die eigentliche Berührungskurve B_0 ist also vom sechzehnten Grade.

Dem Ebenenbündel mit dem Mittelpunkte Q_0 entspricht ein Flächenbündel zweiten Grades; den Tangentialebenen von Q_0 an S_8 sind die Kegel zweiten Grades zuzuordnen, die in dem durch das Flächenbündel mit $\mathfrak{H}_2$ erzeugten Netze enthalten sind und deren Spitzen auf $\mathfrak{H}_2$ liegen. Der Ort der Kegelspitzen des Netzes ist eine Fläche vierten Grades; sie schneidet $\mathfrak{H}_2$ in einer Raumkurve achten Grades und vom Geschlechte neun, dies ist also auch das Geschlecht von B_0 und K_0.

Für die analytische Darstellung sei $\mathfrak{P}_0\,(\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{y}_0\,\mathfrak{z}_0\,\mathfrak{t}_0\,\mathfrak{w}_0)$ ein Punkt der Fläche $\mathfrak{H}_2$; die zugehörige Tangentialebene ist:

$$\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{x}_0\,\mathfrak{x} + \mathfrak{y}_0\,\mathfrak{y} + \mathfrak{z}_0\,\mathfrak{z} + \mathfrak{t}_0\,\mathfrak{t} + \mathfrak{w}_0\,\mathfrak{w} = 0.$$

Es soll nun ein Punkt $Q_0'\,(x_0'\,y_0'\,z_0'\,t_0'\,w_0')$ im Raume so bestimmt werden, dass seine erste Polarfläche $\mathfrak{F}_2'$ nach der Diagonalfläche $\mathfrak{D}_3$ sich mit $\mathfrak{H}_2$ in $\mathfrak{P}_0$ berührt. Ist T_0' die Tangentialebene in $\mathfrak{P}_0$ an $\mathfrak{F}_2'$, so muss das Polynom ihrer Gleichung

$$T_0' = \mathfrak{x}_0\,x_0'\,x + \mathfrak{y}_0\,y_0'\,y + \mathfrak{z}_0\,z_0'\,z + \mathfrak{t}_0\,t_0'\,t + \mathfrak{w}_0\,w_0'\,w = 0$$

sich in die Form setzen lassen:

$$T_0' = -\lambda \cdot \Sigma\,\mathfrak{x}_0\,x + \mu\,\Sigma\,x$$

wo λ und μ noch zu bestimmende Multiplikatoren sind. Dies gibt die Gleichungen:

$$x_0' = -\lambda + \frac{\mu}{\mathfrak{x}_0}, \ldots\ldots \qquad w_0' = -\lambda + \frac{\mu}{\mathfrak{w}_0}$$

aus denen folgt:

$$-5\lambda + \mu\,\Sigma\frac{1}{\mathfrak{x}_0} = 0, \qquad \mu^2 \cdot \Sigma\frac{1}{\mathfrak{x}_0\,\mathfrak{y}_0} = \Sigma x_0' y_0' + 10\lambda^2.$$

Bewegt sich Q_0' auf der nach $\mathfrak{H}_2$ genommenen Polarebene des Punktes $Q_0\ (x_0\, y_0\, z_0\, t_0\, w_0)$ so ist $\Sigma x_0 x_0' = 0$ und unter Benutzung der gefundenen Werte für die Koordinaten von Q_0':

$$\frac{x_0}{\mathfrak{x}_0} + \frac{y_0}{\mathfrak{y}_0} + \frac{z_0}{\mathfrak{z}_0} + \frac{t_0}{\mathfrak{t}_0} + \frac{w_0}{\mathfrak{w}_0} = 0.$$

Hieraus folgt, dass $\mathfrak{P}_0$ auf der ersten Polaren des Punktes Q_0 in Bezug auf das Pentaeder liegt. Die Berührungskurven der Tangentialkegel, welche S_8 umschrieben sind, bilden sich also auf $\mathfrak{H}_2$ als die Schnittkurven mit den ersten Polaren des Pentaeders ab. Alle diese Polaren enthalten die zehn Kanten des Pentaeders, die Bilder der Berührungskurven (und wie man leicht findet, auch die Berührungskurven selbst) haben also die zwanzig Punkte C gemein. Da zwei erste Polaren des Pentaeders und $\mathfrak{H}_2$ sich ausser in den zwanzig C noch in zwölf andern Punkten schneiden, so ist damit zwölf als Klasse der S_8 bestätigt.

In dem aus

$$\mathfrak{F}_2' = x_0' x^2 + y_0' y^2 + z_0' z^2 + t_0' t^2 + w_0' w^2 = 0 \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{H}_2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + w^2 = 0$$

gebildeten Büschel $\mathfrak{F}_2' + \lambda\,\mathfrak{H}_2 = 0$ befinden sich vier Kegel, die den aus der Gleichung

$$\frac{1}{x_0' + \lambda} + \frac{1}{y_0' + \lambda} + \frac{1}{z_0' + \lambda} + \frac{1}{t_0' + \lambda} + \frac{1}{w_0' + \lambda} = 0$$

sich ergebenden Parameterwerten entsprechen. Der zu einem solchen λ gehörige Kegel hat einen Mittelpunkt $\mathfrak{P}_0$, dessen Koordinaten die Proportion

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{y}_0 : \mathfrak{z}_0 : \mathfrak{t}_0 : \mathfrak{w}_0 = \frac{1}{x_0' + \lambda} : \frac{1}{y_0' + \lambda} : \frac{1}{z_0' + \lambda} : \frac{1}{t_0' + \lambda} : \frac{1}{w_0' + \lambda}$$

erfüllen. Man hat also, indem man einen gemeinsamen Multiplikator μ einführt, wieder die Gleichungen

$$x_0' = -\lambda + \frac{\mu}{\mathfrak{x}_0}, \ldots \ldots \qquad w_0' = -\lambda + \frac{\mu}{\mathfrak{w}_0}.$$

Schreibt man die Gleichung vierten Grades für λ in der Form:

$$5\lambda^4 + 3\,\Sigma x_0' y_0' \cdot \lambda^2 + 2\,\Sigma x_0' y_0' z_0' \cdot \lambda + \Sigma x_0' y_0' z_0' t_0' = 0,$$

so hat dieselbe zwei gleiche Wurzeln, wenn gleichzeitig

$$\Sigma x_0' y_0' z_0' = 0, \quad 9\,(\Sigma x_0' y_0')^2 - 20\,\Sigma x_0' y_0' z_0' t_0' = 0$$

ist. Die beiden Doppelwurzeln werden aus der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{3}{10}\,\Sigma x_0' y_0' = 0$$

gefunden. In Verbindung mit den beiden zwischen λ und μ bestehenden Gleichungen folgt hieraus:

$$-4\left(\Sigma \frac{1}{\mathfrak{x}_0}\right)^2 + 15\,\Sigma \frac{1}{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0} = 0.$$

Werden die Koordinaten von $\mathfrak{P}_0$ als laufende Koordinaten aufgefasst, so stellt diese Gleichung eine Fläche achten Grades $\mathfrak{F}_8$ dar. Die Schnittkurve $\mathfrak{C}_{16}$ von $\mathfrak{F}_8$ mit $\mathfrak{H}_2$ ist das Bild der Kurve, die von den Berührungspunkten der eigentlichen Doppeltangentialebenen der S_8 gebildet wird. Die Kanten des Pentaeders sind in $\mathfrak{F}_8$ Doppelgeraden, also die 20 Punkte C Doppelpunkte in $\mathfrak{C}_{16}$. Die Berührungskurve selbst ist eine C_{32}, denn einem ebenen Schnitte von S_8 entspricht auf $\mathfrak{H}_2$ der Schnitt mit einer $\mathfrak{F}_2$; aber $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{F}_8$, $\mathfrak{F}_2$ haben 32 Punkte gemein.

Soll die charakteristische Gleichung vierten Grades für λ eine dreifache Wurzel besitzen, so müssen die beiden Bedingungen erfüllt sein:

$$20\,\Sigma x_0' y_0' z_0' t_0' + 3\,(\Sigma x_0' y_0')^2 = 0, \quad 5\,(\Sigma x_0' y_0' z_0')^2 + 2\,(\Sigma x_0' y_0')^3 = 0$$

und für die dreifache Wurzel besteht die Gleichung

$$10\,\lambda^2 + \Sigma x_0' y_0' = 0.$$

Es ist also:

$$\Sigma \frac{1}{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0} = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma \mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_0 = 0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche dritten Grades $\mathfrak{F}_3$ schneidet $\mathfrak{H}_2$ in einer Kurve $\mathfrak{C}_6$, welche das Bild der eigentlichen Wendekurve C_{12} der S_8 ist. Durch den Schnitt von $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ geht auch die Diagonalfläche $\mathfrak{D}_3$, so dass sich $\mathfrak{C}_6$ als jene Raumkurve sechsten Grades ergibt, welche Clebsch bei der Reduktion der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf die Jerrardsche Form einführt.

Aus der Gleichungsform von $\mathfrak{F}_8$ geht hervor, dass sich $\mathfrak{F}_8$ und $\mathfrak{F}_3$ längs der Kurve zwölften Grades berühren, in welcher $\mathfrak{F}_3$ von der Fläche $\Sigma \frac{1}{\mathfrak{x}_0} = 0$, d. h. von der Hessiana $\mathfrak{H}_4$ der Diagonalfläche $\mathfrak{D}_3$ geschnitten wird. Die Schnittpunkte von $\mathfrak{F}_8$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{H}_2$ fallen also zu je zwei zusammen; ihre Pentaederkoordinaten können mit Hülfe einer reinen Gleichung fünften Grades bestimmt werden. Geht man zu den entsprechenden Elementen auf S_8 über, so ergibt sich der Satz: Die eigentliche Wendekurve und die Berührungskurve der eigentlichen Doppeltangentialebenen der Fläche S_8 berühren sich in ihren gemeinsamen Punkten.

Durch Polarisation in bezug auf $\mathfrak{H}_2$ liefert die Diskriminante der Gleichung vierten Grades in λ die Ebenenkoordinatengleichung der S_8. Aus den beiden Bedingungen für zwei Doppelwurzeln ergibt sich die eigentliche Doppeldeveloppable der S_8, aus den beiden Bedingungen für die dreifache Wurzel findet man die Developpable, welche von den Tangentialebenen der S_8 längs ihrer eigentlichen Wendekurve gebildet wird.