Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung.

Von

Hermann Weyl.

(Als Manuskript eingegangen am 20. März 1917.)

1.

Riemann hat als Student den „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation“ gemacht, indem er den Begriff des Differentialquotienten n^{ter} Ordnung auf den Fall überträgt, wo an Stelle der natürlichen Ordnungszahl n eine beliebige reelle Zahl tritt. Diese Arbeit ist als Nr. XIX in den Gesammelten Werken abgedruckt mit dem Bemerken des Herausgebers, dass Riemann ohne Zweifel nicht an ihre Veröffentlichung dachte, die Betrachtung sich auch auf Grundlagen stütze, deren Haltbarkeit er in späteren Jahren nicht mehr anerkannt haben würde. Trotzdem ist zu sagen, dass die Riemann'sche Begriffserweiterung, wenn man sie nur in haltbarer Weise formuliert — und dies ist möglich —, völlig naturgemäss, ja die einzig naturgemässe ist und ihr eine keineswegs bloss formale Bedeutung zukommt. Dies scheint mir die folgende kurze Überlegung zu zeigen, die ich angestellt habe, um möglichst einfach einen von mir zu anderen Zwecken benötigten Satz über trigonometrische Reihen zu beweisen.

Ist $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte stetige Funktion, so bilden wir, indem wir den Prozess der Integration iterieren, der Reihe nach (für $x \geqq 0$)

$$f_1(x) = \int_0^x f(x)\,dx, \quad f_2(x) = \int_0^x f_1(x)\,dx, \quad f_3(x) = \int_0^x f_2\,dx, \ldots$$

und schreiben ausführlicher

$$f_n(x) = J^n f(x);$$

J ist das Symbol für den Integrationsprozess. Es ist, wie bekannt und leicht zu sehen,

$$J^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-\xi)^n f(\xi)\,d\xi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Daher definieren wir allgemeiner, wenn α eine beliebige reelle Zahl >0 ist, als die durch „α-malige Integration" aus f entstehende Funktion

$$J^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi.$$

Die Funktionaloperation J^{α} hat folgende Eigenschaften:

I. Für $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ stimmt sie mit dem ursprünglichen Begriff der $1, 2, 3, \ldots$-maligen Integration überein.

II. Sie ist linear:

$$J^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 J^{\alpha} f_1 + c_2 J^{\alpha} f_2$$

(f_1, f_2 beliebige stetige Funktionen; c_1, c_2 beliebige Konstante).

III. $J^{\alpha} J^{\beta} f$ ist $= J^{\alpha+\beta} f$.

Die Beziehung

$$(*) \qquad \varphi(x) = J^{\alpha} f(x)$$

drücken wir auch umgekehrt mit Benutzung des Differentiationssymbols D durch

$$f(x) = D^{\alpha} \varphi(x)$$

aus und sagen, falls zu der gegebenen Funktion φ eine solche stetige Funktion f gehört, sie sei der α^{te} Differentialquotient von φ, und φ sei α-mal stetig differentiierbar. Es liegt nahe, mit Riemann zu setzen: $J^0 f = D^0 f = f$ und allgemein $J^{-\alpha} = D^{\alpha}$, wodurch sowohl die Definition der Operation J^{α} wie D^{α} auf negative Exponenten α und 0 ausgedehnt wird. Es ist dann aber daran festzuhalten, dass der Prozess J^{α} mit negativem Exponenten nicht (wie der mit positivem) auf jede stetige Funktion anwendbar ist.

Die Ermittlung von $f = D^{\alpha}\varphi$ (in den Exponenten-Grenzen $0 < \alpha < 1$) durch Auflösung von (*) ist nichts anderes als ein bekanntes von Abel behandeltes Problem[1]) — historisch das erste Beispiel einer Integralgleichung. Liouville hat ihre allgemeine Lösung gegeben.[2]) Sie besteht in unserer Terminologie einfach darin, φ einmal zu differentiieren und dann $(1-\alpha)$-mal zurückzuintegrieren. Offenbar ist aber für die α-malige Differentiierbarkeit ($\alpha < 1$) von φ die Existenz und Stetigkeit der Ableitung φ' wohl hinreichend, aber nicht notwendig. Vielmehr gilt in dieser Hinsicht der

[1]) Abel, Ges. Werke (1823), p. 11.

[2]) Journal de l'École Polytechnique, Cahier 21 (1832), p. 1, und Liouvilles Journal, vol. 4 (1839), p. 23.

Satz 1. Ist $f(x)$ α-mal stetig differentiierbar, so genügt f einer Lipschitz'schen Bedingung der Ordnung α:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq \text{Const.} |x_1 - x_2|^\alpha.$$

Umgekehrt: ist f eine (für $x = 0$ verschwindende) Funktion, die einer solchen Lipschitz'schen Bedingung genügt, so ist f (wenn nicht α-mal, so doch) β-mal stetig differentiierbar, wenn β irgendeinen Exponenten $< \alpha$ bedeutet.

In der Gültigkeit dieses Satzes sehe ich den ersten Beleg dafür, dass der Begriff des α^{ten} Differentialquotienten eine über das Formale hinausgehende Bedeutung besitzt.

Der Beweis für den ersten Teil des Satzes ist rasch erbracht. Nach Voraussetzung soll eine stetige Funktion $\varphi(x)$ existieren, so dass

$$f(x) = \int_0^x (x - \xi)^{\alpha - 1} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Ist $h > 0$ und M eine obere Grenze für den absoluten Betrag von φ im Intervall von 0 bis $x + h$, so finden wir

$$|f(x+h) - f(x)| \leqq \left| \int_0^x \{(x+h-\xi)^{\alpha-1} - (x-\xi)^{\alpha-1}\} \varphi(\xi)\, d\xi \right|$$

$$+ \left| \int_x^{x+h} (x+h-\xi)^{\alpha-1} \varphi(\xi)\, d\xi \right|$$

$$\leqq M \cdot \int_0^x \{-(x+h-\xi)^{\alpha-1} + (x-\xi)^{\alpha-1}\}\, d\xi + M \cdot \int_x^{x+h} (x+h-\xi)^{\alpha-1}\, d\xi$$

$$= M \left\{ -\int_h^{x+h} z^{\alpha-1}\, dz + \int_0^x z^{\alpha-1}\, dz \right\} + M \cdot \int_0^h z^{\alpha-1}\, dz$$

$$< 2M \int_0^h z^{\alpha-1}\, dz = \frac{2M}{\alpha} \cdot h^\alpha.$$

Die Umkehrung soll sogleich in etwas anderer Fassung erledigt werden.

2.

Der Begriff des Differentialquotienten beliebiger reeller Ordnung steht, wie schon angekündigt, in enger Beziehung zur Theorie der Fourier'schen Reihen. Die vorigen Definitionen leiden aber an dem Übelstand, dass in ihnen der Punkt $x = 0$ eine ausgezeichnete Rolle spielt; für die Theorie der periodischen Funktionen werden sie dadurch ungeeignet und müssen zweckentsprechend modifiziert werden. Ist $f(x)$ eine stetige Funktion von der Periode 1, für welche der

Mittelwert $\int\limits_0^1 f dx = 0$ ist, so ist das Integral f_1 von f wiederum periodisch. Damit aber auch f_1 ein periodisches Integral f_2 habe, müssen wir die in f_1 noch zur Verfügung stehende additive Konstante so bestimmen, dass $\int\limits_0^1 f_1\, dx = 0$ wird; usw. D. h. die oben zur eindeutigen Festlegung der Integrale f_n benutzte Bestimmung: $f_n = 0$ für $x = 0$ wird jetzt zu ersetzen sein durch die Forderung $\int\limits_0^1 f_n\, dx = 0$. In dieser Weise möge von nun ab $J^n f = f_n$ definiert sein. Führen wir die Bernoulli'schen Polynome ψ ein, die sich rekursiv eindeutig aus den Forderungen

$$\psi_0 = -1; \qquad \psi_n' = \psi_{n-1}, \quad \int\limits_0^1 \psi_n\, dx = 0$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ergeben und verstehen unter $\Psi_n(x)$ diejenige Funktion mit der Periode 1, die im Interval $0 < x \leqq 1$ gleich dem Polynom $\psi_n(x)$ ist, so gilt nunmehr

$$J^n f(x) = \int\limits_0^1 \Psi_n(x - \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

$\Psi_n(x)$ tritt hier also an Stelle der oben analog verwendeten Funktion $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. Es ist derselbe Unterschied, der in der Taylor'schen Reihe einerseits, der Euler'schen Summenformel anderseits zur Geltung kommt. Verstehen wir unter c_ν die komplexen Fourierkoeffizienten von f

$$c_\nu = \int\limits_0^1 e^{-2\pi i \nu x} f(x)\, dx \qquad (\nu \geqq 1),$$

so sind die komplexen Fourierkoeffizienten von $J^h f$ gleich $\frac{c_\nu}{(2\pi i \nu)^h}$, die von Ψ_h aber einfach $= \frac{1}{(2\pi i \nu)^h}$.

Es fragt sich nun wieder, ob wir unsern jetzigen Integralbegriff $J^n f$ von ganzzahligen Exponenten n in solcher Weise auf beliebige positive Exponenten ausdehnen können, dass die oben an die Operation J^α gestellten Forderungen I.—III. erfüllt sind. Man sieht, dass dieses ohne weiteres möglich ist: man hat unter $J^\alpha f$ nur diejenige Funktion der Periode 1 zu verstehen, deren komplexe Fourierkoeffizienten $c_\nu^{(\alpha)}$ durch

$$c_0^{(\alpha)} = 0; \qquad c_\nu^{(\alpha)} = c_\nu \cdot e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} (2\pi \nu)^{-\alpha} \qquad (\nu \geqq 1)$$

gegeben sind. Nur könnte es noch zweifelhaft erscheinen, ob eine solche Funktion immer existiert. Dies ist aber in der Tat der Fall. Verstehen wir nämlich unter $\Psi_\alpha(x)$ diejenige Funktion von der Periode 1, deren komplexe Fourierkoeffizienten

$$= e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} (2\pi\nu)^{-\alpha}$$

sind, so ist offenbar

$$J^\alpha f(x) = \int_0^1 \Psi_\alpha(x-\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Ψ_α ist leicht zu bestimmen; wir beschränken uns dabei auf den Fall $0 < \alpha < 1$. Es ist

$$\int_0^\infty e^{-2\pi i \nu x} x^{\alpha-1}\, dx = (2\pi\nu)^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-ix} x^{\alpha-1}\, dx$$
$$= \Gamma(\alpha)\, e^{-\frac{\pi i \alpha}{2}} (2\pi\nu)^{-\alpha}.$$

Daraus geht hervor:

$$\Gamma(\alpha)\, \Psi_\alpha(x) = \lim_{n=\infty} \Big[\big\{ x^{\alpha-1} + (x+1)^{\alpha-1} + (x+2)^{\alpha-1} + \cdots + (x+n-1)^{\alpha-1} \big\} - \frac{1}{\alpha} n^\alpha \Big] \text{ für } 0 < x \leqq 1.$$

In der Umgebung der Stelle $x = 0$ ist also $\Psi_\alpha(x)$ bis auf eine additiv hinzutretende regulär-analytische Funktion $= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$ für $x > 0$, $= 0$ für $x \leqq 0$. Man kann anderseits auch schreiben (immer für $\alpha < 1$ und periodische Funktionen f, deren Mittelwert $= 0$ ist)

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x-\xi)\, \xi^{\alpha-1}\, d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi.$$

Es ist also gegenüber früher nur die untere Integralgrenze von 0 nach $-\infty$ verschoben. Danach ist klar, dass unser neuer Begriff der α-maligen stetigen Differentiierbarkeit genau mit dem früheren übereinstimmt, während die Definition des α^{ten} Differentialquotienten, den in der Sache liegenden Forderungen gemäss, eine leichte Modifikation gegenüber Absatz 1. erfahren musste.

3.

Wenn wir die beiden folgenden Tatsachen miteinander verknüpfen:

a) **Satz 2.** Sind c_ν die Fourierkoeffizienten von f, so sind

$$e^{\frac{\pi i \alpha}{2}} (2\pi\nu)^\alpha c_\nu$$

diejenigen des α^{ten} Differentialquotienten von f, und also konvergiert, wenn f α-mal stetig differentiierbar ist, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\nu^{\alpha} c_{\nu}|^2;$$

b) ist α ein positiver Exponent $\leqq 1$ und $\beta < \alpha$, so ist f gewiss dann β-mal stetig differentiierbar, wenn es einer Lipschitz'schen Bedingung der Ordnung α genügt (Satz 1),

so gelangen wir zu dem Ergebnis:

Satz 3. Genügt die Funktion f von der Periode 1 einer Lipschitz'schen Bedingung der Ordnung α und ist β irgendein positiver Exponent $< \alpha$, so konvergiert die Quadratsumme $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\nu^{\beta} c_{\nu}|^2$, in der c_{ν} die Fourierkoeffizienten von f bedeuten.

Holen wir nunmehr den Beweis des zweiten Teiles von Satz 1 nach, so gestalten sich die Schlüsse, die zu Satz 3 führen, am einfachsten folgendermassen: Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass $\int\limits_0^1 f\,dx = 0$ ist. Das Integral F von f ist dann gleichfalls periodisch, und es konvergiert

$$G(x) = \int_0^{\infty} f(x-\xi)\,\xi^{-\beta}\,d\xi \; \{= \Gamma(1-\beta)\cdot J^{1-\beta} f\}.$$

Setze ich zunächst

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon,\omega}(x) &= \int_{\varepsilon}^{\omega} f(x-\xi)\,\xi^{-\beta}\,d\xi \\ &= -\left[\xi^{-\beta} F(x-\xi)\right]_{\varepsilon}^{\omega} - \beta \int_{\varepsilon}^{\omega} F(x-\xi)\,\xi^{-(1+\beta)}\,d\xi, \\ &\qquad (0 < \varepsilon < \omega) \end{aligned}$$

so finden wir für die Ableitung dieser Funktion

$$g_{\varepsilon,\omega}(x) = G'_{\varepsilon,\omega}(x) = -\frac{f(x-\omega)}{\omega^{\beta}} + \frac{f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta}} - \beta \int_{\varepsilon}^{\omega} f(x-\xi)\,\xi^{-(1+\beta)}\,d\xi.$$

Ferner bilden wir

$$\begin{aligned} g^{*}_{\varepsilon,\omega}(x) &= \beta \int_{\varepsilon}^{\omega} \{f(x) - f(x-\xi)\}\,\xi^{-(1+\beta)}\,d\xi \\ &= -\frac{f(x)}{\omega^{\beta}} + \frac{f(x)}{\varepsilon^{\beta}} - \beta \int_{\varepsilon}^{\omega} f(x-\xi)\,\xi^{-(1+\beta)}\,d\xi. \end{aligned}$$

Gemäss der Voraussetzung, dass f einer Lipschitz'schen Bedingung mit einem Exponenten $\alpha > \beta$ genügt, existiert

$$g(x) = \beta \int_0^\infty \{f(x) - f(x-\xi)\}\, \xi^{-(1+\beta)}\, d\xi$$

und ist gleichmässig in x der Limes von $g^*_{\varepsilon,\omega}(x)$ für $\varepsilon = 0$, $\omega = \infty$. Da aber der Unterschied von $g_{\varepsilon,\omega}(x)$ und $g^*_{\varepsilon,\omega}(x)$ bei diesem Grenzübergang gleichmässig zu 0 konvergiert, so folgt, dass auch die Ableitung von $G_{\varepsilon,\omega}(x)$ gleichmässig gegen die Grenze $g(x)$ konvergiert, dass mithin

$$G'(x) = g(x)$$

ist. Wenn aber $J^{1-\beta} f$ eine stetige Ableitung besitzt, ist f selber β-mal stetig differentiierbar (wie Satz 1 behauptete); übrigens ist $\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\, g(x)$ der β^{te} Differentialquotient von f. — Der ν^{te} Fourierkoeffizient von $G(x)$ ist

$$\Gamma(1-\beta)\, e^{\frac{\pi i(\beta-1)}{2}} (2\pi\nu)^{\beta-1} c_\nu,$$

der von $g(x)$ mithin

$$\Gamma(1-\beta)\, e^{\frac{\pi i \beta}{2}} (2\pi\nu)^{\beta} c_\nu.$$

Ist in Satz 3 insbesondere $\alpha > \frac{1}{2}$, so können wir auch β noch $> \frac{1}{2}$ wählen und finden dann, da

$$\left(\sum |c_\nu|\right)^2 = \left(\sum |c_\nu \cdot \nu^\beta| \cdot \frac{1}{\nu^\beta}\right)^2 \leq \sum |c_\nu \cdot \nu^\beta|^2 \cdot \sum \frac{1}{\nu^{2\beta}}$$

ist, dass die Fourierreihe von f absolut konvergiert. Dieser

Satz 4. Die Fourierreihe einer Funktion, die einer Lipschitz'schen Bedingung mit einem Exponenten $> \frac{1}{2}$ genügt, konvergiert absolut

ist 1914 von S. Bernstein in einer Comptes-Rendus-Note ausgesprochen worden.[1]) Zugleich deutet Herr Bernstein eine sehr scharfsinnige Konstruktion an, durch die es ihm gelungen ist, zu zeigen, dass hier die untere Exponentengrenze $\frac{1}{2}$ nicht weiter herabgedrückt werden kann.

---

[1]) Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, Comptes rendus, t. 158, séance du 8 juin 1914.