# Die Cykloide als Kurve gleicher Fallzeit.

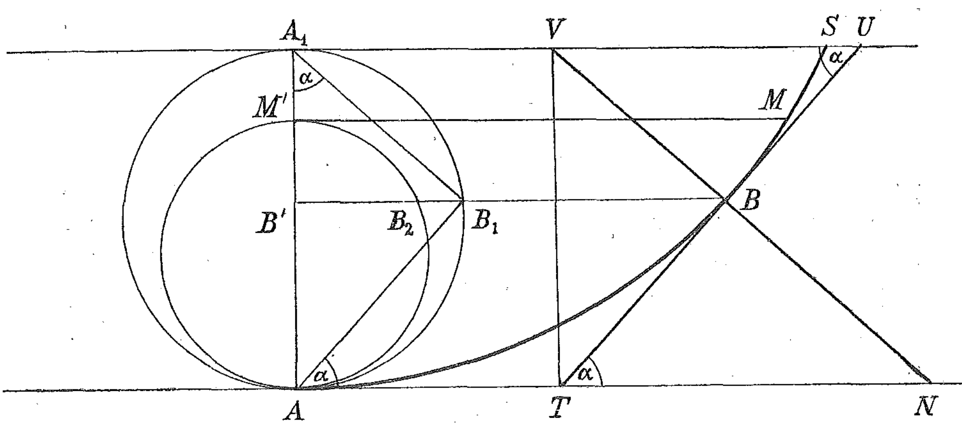
Von

A. Kiefer, Zürich.

(Als Manuskript eingegangen am 23. Januar 1918.)

Die Abbildung stellt eine halbe Cykloide $AS$ dar, deren erzeugender Kreis den Durchmesser $AA_1$ hat; dieser Durchmesser, auf den die Axe der Cykloide fällt, sei vertikal nach oben gerichtet.

Ist $B$ irgend ein Punkt der Cykloide, so ist das Stück $BT$ seiner Tangente zwischen Berührungspunkt $B$ und Scheiteltangente gleich und parallel der Kreissehne $B_1A$ und das Stück $BV$ der Normalen zwischen dem Fusspunkt $B$ und der Spitzengeraden $A_1S$ ist gleich und parallel der Kreissehne $B_1A_1$. Wenn man also die




Strecken $BT$ und $VB$ von ihren Anfangspunkten aus von einem materiellen Punkte frei durchfallen lässt, so sind die Fallzeiten einander gleich und konstant, wo auch $B$ auf der Cykloide gewählt wird, nämlich gleich der Zeit, die zum freien Durchfallen der vertikalen Strecke $A_1A$ nötig ist.[1])

[1]) Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. in Zürich, Jahrgang 62 (1917), S. 74.

jedem der zwei Punkte gemessen, konstant. Wählt man auf der Cykloide unterhalb $M$ beliebig viele Punkte, zu denen, von $M$ aus gerechnet, Fallzeiten mit gleichen Differenzen gehören, so liegen die entsprechenden Punkte auf dem Kreis über $M'A$ in gleichen Bogenabständen. Sucht man unterhalb $M$ den Punkt $B$ auf der Cykloide, so dass zum Durchfallen des Bogens $MB$ eine gegebene Zeit nötig ist, so sucht man den entsprechenden Punkt auf dem Kreis über $M'A$ und geht horizontal zur Cykloide hinüber. Ist auf dem Cykloidenbogen $MB$ ein Zwischenpunkt $P$ gesucht, so dass die zu $MP$ gehörige Fallzeit einen gewissen Teil, zum Beispiel $\frac{m}{n}$ der zu $MB$ gehörigen Zeit ist, so schneidet man vom Kreisbogen $M'B_2$ den gleichvielten Teil, $\frac{m}{n}$, ab und zieht durch den Teilpunkt die Horizontale bis zur Cykloide. Ist auf der Cykloide der Punkt $B$ gewählt und sucht man $M$, so dass zum Durchfallen von $MB$ eine gegebene Zeit $t$ nötig ist, so sucht man $B_2$ zu $B'$, dann den Kreis $AB_2M'$ und zu $M'$ den Punkt $M$; man hat nämlich $\sphericalangle B'AB_2 : 90^\circ = t : \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Wollte man den Punkt von $M$ aus mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit $v$ fallen lassen, so könnte man die Bewegung von einer höher gelegenen Stelle $M^*$ aus beginnen lassen, so dass der fallende Punkt in $M$ mit der Geschwindigkeit $v$ ankäme; es müsste $M^{*\prime}M' = \frac{v^2}{2g}$ gewählt werden. Lässt man von verschiedenen Stellen der Cykloide Punkte auf ihr fallen, so verhalten sich die konstanten Geschwindigkeiten und Zentripetalbeschleunigungen auf den zugehörigen Kreisen wie ihre Durchmesser, und sucht man zu den Cykloidenpunkten, die nach Verfluss gleicher Zeiten erreicht werden, die entsprechenden Punkte auf den Kreisen, so liegen diese Punkte auf einer Geraden durch $A$. Streckt man den Cykloidenbogen $AM$ auf die Scheiteltangente von $A$ aus und trägt im Endpunkte die der konstanten Geschwindigkeit auf dem zugehörigen Kreis proportionale Strecke $AM'$ als Ordinate auf, so liegen die Endpunkte auf einer Parabel; denn der Cykloidenbogen $AM$ ist gleich $2AM_1$ und $\overline{AM_1}^2 = 2r \cdot AM'$. Wickelt man eine Cykloide auf der Scheiteltangente oder einer beliebigen Tangente ab, und trägt im jeweiligen Berührungspunkt den Krümmungsradius als Ordinate auf, so kommen die Krümmungsmittelpunkte auf einen Kreis zu liegen; denn das rechtwinklige Dreieck $AB_1A_1$ besitzt konstante Hypotenuse. Denkt man sich alle möglichen Cykloiden mit horizontaler Scheiteltangente und mit dem Scheitelpunkt $A$, und lässt auf jeder einen Punkt aus gleicher Höhe, von der Scheiteltangente aus gemessen, herunterfallen, so verhalten sich die konstanten Geschwindigkeiten auf dem gemeinsamen Kreis über $M'A$ wie die Quadratwurzeln aus den reziproken Radien der die Cykloiden erzeugenden Kreise. Lässt man auf zwei dieser Cykloiden Punkte aus Höhen fallen, die sich wie die Quadratwurzeln aus den Radien der erzeugenden Kreise verhalten, so sind die Geschwindigkeiten auf den zwei zugehörigen Kreisen über $M'A$ gleich gross. —

Aus der Abb. folgt

$$BN = BT \operatorname{tg} \alpha = B_1A \operatorname{tg} \alpha = 2r \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha,$$

$$UB = VB \operatorname{cotg} \alpha = A_1B_1 \operatorname{cotg} \alpha = 2r \cos \alpha \operatorname{cotg} \alpha.$$

Lässt man die Strecken $BN$ und $UB$ von ihren Anfangspunkten aus von einem materiellen Punkt frei durchfallen und bezeichnet die zugehörigen Fallzeiten mit $t_1$ und $t_2$, so ist

$$BN = 2r \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{g \cos \alpha}{2} t_1^2,$$

$$UB = 2r \cos \alpha \operatorname{cotg} \alpha = \frac{g \sin \alpha}{2} t_2^2.$$

Also $$\frac{\overline{BN}^2}{t_1^4} + \frac{\overline{UB}^2}{t_2^4} = \frac{g^2}{4},$$

$$t_1 \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 2\sqrt{\frac{r}{g}},$$

$$t_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{\frac{r}{g}},$$

$$t_1 \cdot t_2 = 4\,\frac{r}{g}, \text{ d. h.}$$

Lässt man bei irgend einem Punkt $B$ der Cykloide das Normalenstück $BN$ zwischen Fusspunkt und Scheiteltangente und das Tangentenstück $UB$ zwischen Spitzengerade und Berührungspunkt von einem materiellen Punkt frei durchfallen, so bleibt $\frac{\overline{BN}^2}{t_1^4} + \frac{\overline{UB}^2}{t_2^4}$ konstant, gleich $\frac{g^2}{4}$; ferner bleibt für jede dieser Strecken das Produkt aus der Fallzeit mal der tg des Neigungswinkels der betreffenden Strecke konstant und für beide Strecken gleich gross, gleich $2\sqrt{\frac{r}{g}}$, und ferner bleibt auch das Produkt der beiden Fallzeiten, die zwei zusammengehörenden Strecken entsprechen, konstant, gleich $4\frac{r}{g}$.

Es bleibt ferner konstant

$$VU \cdot TN = 2r \operatorname{cotg} \alpha \cdot 2r \operatorname{tg} \alpha = 4r^2, \text{ daher auch}$$

$$\overline{VU}^2 + \overline{TN}^2 - \overline{UN}^2 = 4r^2; \text{ ebenso}$$

$$\frac{4r^2}{\overline{UT}^2} + \frac{4r^2}{\overline{NV}^2} = 1.$$

Bezeichnet man den Inhalt des Viereckes $TNUV$ mit $I$, so ist $I^2 = r^2 (VU + TN)^2$ und es bleibt konstant

$$I^2 - r^2 \overline{UN}^2 = 12r^4.$$

Eingangs ist der Umstand benützt worden, dass bei einem Kreis mit dem vertikalen Durchmesser $A_1A$ alle Sehnen, die von $A_1$ ausgehen und ebenso alle Sehnen, die nach $A$ laufen, in gleicher Zeit frei durchfallen werden. Diese Kreiseigenschaft gibt zu folgender Fragestellung Anlass:

In einer vertikalen Ebene zieht man durch einen Punkt $A_1$ alle möglichen Geraden uud lässt gleichzeitig auf jeder von $A_1$ aus einen Punkt mit der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit $\pm c$ sich unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung bewegen. Welches ist der geometrische Ort der beweglichen Punkte nach Verfluss einer gegebenen Zeit $t$?

Bezeichnet man den Neigungswinkel einer der Geraden mit $\alpha$, so ist die auf der Geraden in der Zeit $t$ durchlaufene Strecke

$$s = \pm ct + \frac{g \sin \alpha}{2} t^2.$$

Man lege die vertikal nach unten gerichtete Strecke $A_1A = \frac{g}{2} t^2$ und über ihr als Durchmesser den Kreis; dann ist $\frac{g \sin \alpha}{2} t^2 = A_1A \sin \alpha$ die Kreissehne, die auf der gewählten Geraden liegt. Man hat, um den beweglichen Punkt auf der Geraden zu finden, die Sehne von ihrem Endpunkte aus um $ct$ zu verlängern oder zu verkürzen, d. h.

Der gewünschte geometrische Ort der beweglichen Punkte ist eine Konchoide, welche $A_1$ zum Doppelpunkt und den Kreis über $A_1A = \frac{g}{2}t^2$ zur Basis hat.

In dem Falle, wo $ct = \frac{g}{2}t^2$, $c = \frac{g}{2}t$ gewählt ist, wird die Konchoide zur Kardioide.

Legt man in den Kreis über $A_1A$ die Sehnen, die nach dem tiefsten Punkte $A$ laufen und lässt gleichzeitig auf jeder vom obern Endpunkte aus einen Punkt mit der Anfangsgeschwindigkeit $\pm c$ fallen, so ist der geometrische Ort der beweglichen Punkte auf den Geraden, welche die Sehnen enthalten, nach Verfluss einer gegebenen Zeit $t$, ein Kreis mit dem Mittelpunkt $A$ und dem Radius $ct$.