# Esquisse d'une nouvelle théorie de la population.

Par

L.-G. Du Pasquier, à Neuchâtel.

(Als Manuskript eingegangen am 9. Februar 1918.)

*Sommaire.* **1**] à **5**]: Intensité de variation, taux instantané et fonctions d'intensité. **6**]: Interpolation et extrapolation. Fig. 1. — **7**]: Les principales théories émises jusqu'ici. Fig. 2. — **8**] à **12**]: Nouvelle théorie. Fig. 3. — **13**]: Autre formule. **14**] à **16**]: Erreur de la méthode habituelle des statistiques mortuaires. Esquisse d'une future théorie de la population.

**1**] Les théories de la population sont nombreuses et diverses suivant le point de vue de leurs auteurs. Laissant de côté les théories sociales, ethnographiques et biologiques, nous envisagerons ici la question au point de vue mathématique qui est purement formel: la population est considérée comme une masse variable avec le temps; il s'agit d'étudier les variations de cette masse. A ce point de vue, on a émis jusqu'ici 4 théories principales que l'on peut caractériser par les noms de *Halley, de Moivre, Euler* et *Verhulst.* Nous exposerons une théorie générale les comprenant comme cas particuliers et permettant de développer des méthodes nouvelles.

Pour ériger une théorie générale, il faut saisir l'élément caractéristique permettant de mesurer de la façon la mieux appropriée les variations de la masse en question. — Envisageons une population constituée par un nombre très grand de personnes et supposons, pour fixer les idées, que ce nombre aille en augmentant, autrement dit: que le nombre des naissances plus celui des immigrés soit supérieur au nombre des décès augmenté de celui des émigrations. Pour mesurer l'intensité de variation de cet ensemble, il faut tenir compte de trois éléments, savoir:

1) le nombre des personnes observées faisant partie du groupe envisagé à l'instant $t$; désignons ce nombre par $P(t)$, où l'initiale $P$ rappelle le mot de „population" et $t$ le temps;
2) le nombre des nouveaux venus dont s'augmente le groupe en question, soit par suite de naissances, soit par immigration. Désignons par $\Delta P$ cette augmentation de l'effectif;

3) l'intervalle de temps pendant lequel se produit l'augmentation d'effectif $\Delta P$; soit $\Delta t$ ce laps de temps.

Il est naturel de raisonner ensuite ainsi: L'intensité de variation pendant l'intervalle de temps $\Delta t$ sera, *ceteris paribus,*

1⁰ d'autant plus grande que l'augmentation de l'effectif, $\Delta P$, sera plus considérable. Nous poserons donc cette intensité de variation proportionnelle à $\Delta P$, p. ex. égale à $c \cdot \Delta P$;

2⁰ d'autant plus forte que le groupe où elle se produit sera plus petit; nous la poserons donc inversement proportionnelle à $P$, d'où l'expression $c \cdot \frac{\Delta P}{P}$. En effet: Comparez une société $S_1$ à une autre $S_2$ qui soit $r$ fois plus petite, $S_1 = r \cdot S_2$. Supposons qu'au sein de ces deux groupes, il se produise pendant le même laps de temps le même nombre de naissances. On trouvera naturel de conclure: la natalité est $r$ fois plus forte dans $S_2$, puisque cette société arrive au même chiffre de naissances pendant le même espace de temps, bien que $r$ fois moindre en effectif;

3⁰ d'autant plus forte que $\Delta t$ sera plus petit. Nous la poserons donc inversement proportionnelle à $\Delta t$, d'où l'expression $c \cdot \frac{\Delta P}{P \cdot \Delta t}$. En effet: supposons que dans deux ensembles $E_1$ et $E_2$, de même effectif cette fois: $E_1 = E_2$, on compte 10 000 naissances, mais qu'elles se produisent pour $E_1$ dans l'espace d'un mois, pour $E_2$ dans l'espace d'un trimestre. On trouvera naturel de conclure: la natalité est trois fois plus forte dans $E_1$, puisqu'avec le même effectif, il lui faut 3 fois moins de temps pour arriver au même résultat numérique.

En résumé, l'expression $c \cdot \frac{\Delta P}{P \cdot \Delta t}$ est bien appropriée pour exprimer *l'intensité moyenne de variation* pendant l'intervalle de temps $\Delta t$. Le plus simple est de poser le facteur de proportionnalité $c = 1$. Par définition, „l'intensité moyenne de variation pendant le temps $\Delta t$" est le nombre

$$\frac{\Delta P}{P \cdot \Delta t} \qquad (\alpha)$$

**2**] Pour obtenir l'intensité de variation à l'instant $t$ même, nous ferons converger $\Delta t$ vers zéro, symbole: $\Delta t \to 0$. La variation de l'effectif, $\Delta P$, devenant alors de plus en plus petite, tend également vers zéro: $\Delta P \to 0$. C'est ici qu'il faut faire intervenir l'hypothèse de la *continuité des faits démographiques;* en d'autres termes: il faut admettre que le nombre des personnes constituant un groupe suffisamment nombreux varie d'une manière continue avec le temps. En approfondissant les phénomènes, on voit que malgré l'apparence contraire, cette hypothèse de continuité qui introduit des nombres fractionnaires de personnes vivantes, n'est nullement en contradiction formelle avec les faits expérimentaux.

En même temps que $\Delta t$ et $\Delta P$, l'expression ($\alpha$) devient une quantité *variable.* Il se trouve que quand $\Delta t$ et par suite $\Delta P$ convergent vers zéro, l'intensité moyenne de variation donnée par ($\alpha$) tend, en général, vers une certaine limite finie et déterminée que nous désignerons par $\sigma(t)$ et que nous appellerons, par définition[1]), *l'intensité de variation à l'instant t,* formule:

$$\sigma(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta P}{P \cdot \Delta t}\right) = \frac{dP}{P \cdot dt} = \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{P'}{P} \qquad (1)$$

où nous avons fait usage des notations usitées dans le calcul différentiel. On voit que cette limite n'est autre chose que la dérivée logarithmique de l'effectif $P(t)$ par rapport au temps $t$. *A chaque instant, l'intensité de variation est égale à la dérivée logarithmique de l'effectif P par rapport au temps t.*

**3**] Par des considérations tout analogues à celles développées ci-dessus, on définit des intensités spéciales de variation; on les appelle *fonctions d'intensité;* les plus importantes sont:

1) l'intensité de *natalité:* $\nu(t)$,
2) l'intensité de *mortalité:* $\mu(t)$,
3) l'intensité d'*immigration*: $\iota(t)$,
4) l'intensité d'*émigration*: $\varepsilon(t)$.

Dans la théorie de la population, l'intensité de variation $\sigma(t)$ est la résultante de ces 4 composantes: natalité, mortalité, immigration, émigration; la variation de l'effectif dépend en effet directement de ces 4 facteurs.

**4**] On arrive à la même notion, chose remarquable, en partant de la théorie des probabilités mathématiques, du moins en ce qui concerne les causes de diminution de l'effectif. Pour fixer les idées, envisageons la probabilité mathématique de décès, faisant les hypothèses nécessaires. En général, soit ${}_nq_x$ la probabilité pour un homme d'âge $x$ de mourir pendant les $n$ premières années. On connaît des

---

[1]) Le signe $\equiv$ (doublement égal) signifie «égal par définition» ou «identiquement égal», suivant que l'égalité résulte d'une définition, ou d'opérations algébriques. Nous faisons ainsi la différence d'avec $\equiv$ qui indique la congruence ou l'équivalence de nombres.

méthodes permettant de déterminer

$$\ldots\ldots {}_{5}q_x,\quad {}_{3}q_x,\quad {}_{2}q_x,\quad {}_{1}q_x,\quad {}_{\frac{1}{4}}q_x,\quad {}_{\frac{1}{12}}q_x,\ \ldots\ldots$$

pour tout âge $x$ donné d'avance. La probabilité mathématique de décès ${}_nq_x$, pour un même âge $x$ supposé fixe, augmente avec $n$ et finit par atteindre son maximum 1 si l'on prend $n$ suffisamment grand, puisque tout le monde finit par succomber à la mort. Inversement, $x$ étant supposé fixe, on voit que $\lim\limits_{n \to 0} \left({}_nq_x\right) = 0$. Formons le rapport $\frac{{}_nq_x}{n}$. Envisageons l'âge $x$, d'ailleurs arbitraire, comme fixe et $n$ comme une variable tendant vers zéro. Le rapport en question convergera, en général, vers une limite finie et déterminée que l'on appelle *le taux instantané de mortalité* à l'âge $x$ et qu'on désigne par $\mu_x$. On démontre la relation remarquable que *numériquement, le taux instantané de mortalité est égal à l'intensité de mortalité correspondant au même âge*

$$\operatorname*{Lim}_{n \to 0} \left(\frac{{}_nq_x}{n}\right) \equiv \mu_x = \operatorname*{Lim}_{\varDelta t \to 0} \left(\frac{\varDelta l_t}{l_t \cdot \varDelta t}\right) \equiv \mu(t),$$

où $l_t$ désigne le nombre des personnes d'âge $t$ et $\varDelta l_t$ le nombre des décès survenant, pendant le temps $\varDelta t$, dans les rangs de ces $l_t$ personnes.

Cette égalité importante et les autres analogues sont une des raisons qui font jouer aux fonctions d'intensité un rôle prépondérant.

**5**] La cause principale de la grande importance des fonctions d'intensité réside dans leur propriété fondamentale: *chacune est numériquement indépendante des autres facteurs de variation.* Tel n'est en général pas le cas des fonctions biométriques. Ainsi, le taux annuel de décès: ${}_1q_x$ (que l'on abrège habituellement en $q_x$), l'âge $x$ étant supposé donné et *fixe*, est loin de conserver la même valeur s'il y a immigration ou non; il prend encore une autre valeur suivant qu'il y a émigration ou non; il prend une troisième valeur, s'il y a à la fois émigration et immigration, et ainsi de suite; de plus, ces diverses valeurs de $q_x$, pour le même âge $x$ bien entendu, ne sont pas dans un rapport simple. — L'analogue a lieu pour d'autres fonctions biométriques. Par contre, toutes les fonctions d'intensité jouissent de cette particularité de conserver la même valeur numérique, même quand d'autres facteurs de variation s'introduisent en nombre quelconque, pourvu que les variations soient continues avec le temps. — Cette propriété fondamentale permet d'écrire immédiatement la résultante mentionnée ci-dessus: *L'intensité de variation résultante est égale* *à la somme algébrique des intensités composantes.* Appliqué au cas particulier qui nous occupe, ce théorème se traduit par la formule:

$$\sigma(t) = \nu(t) - \mu(t) + \iota(t) - \varepsilon(t). \tag{2}$$

Une intensité de variation positive indique l'augmentation, une intensité de variation négative la diminution du nombre des habitants. Le *signe* du taux instantané indique donc la nature de la variation, tandis que sa *valeur absolue* en mesure la rapidité. Ajoutons que malgré la définition abstraite du taux instantané de mortalité et des autres fonctions d'intensité, on a développé des méthodes permettant d'en déterminer la valeur numérique avec une approximation satisfaisante, méthodes basées sur l'observation directe, c'est à dire sur les registres de l'état-civil, les registres mortuaires, les registres de migration et les résultats de recensements.

**6**] Supposons que l'effectif numérique d'un groupe, par exemple la population d'un pays, soit recensé périodiquement à intervalles égaux ou inégaux. Pour fixer les idées, admettons qu'on connaisse les résultats de 7 recensements consécutifs, soit $P(z)$, $P(z+12)$, $P(z+18)$, $P(z+28)$, $P(z+38)$, $P(z+50)$, $P(z+60)$. Dans la représentation graphique (v. fig. 1) au moyen d'un système d'axes rec-

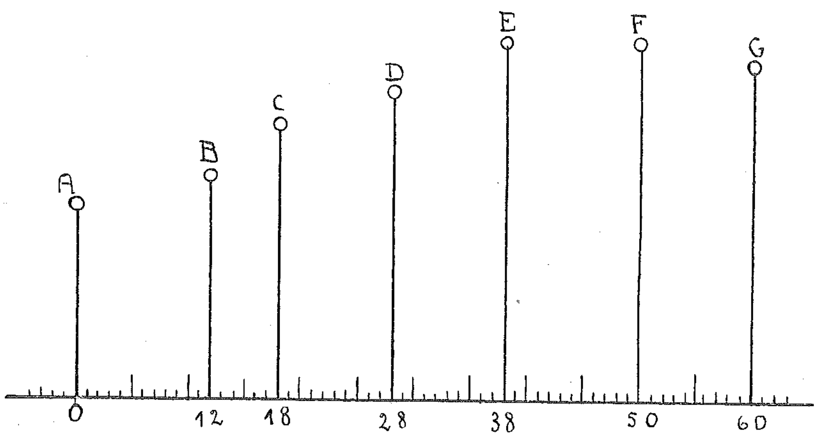


Fig. 1.

tangulaires, portons le temps, $t$, en abscisse et le chiffre de la population, $P(t)$, en ordonnée; on connaîtra par observation directe les points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$. Pour beaucoup de questions, il est nécessaire de savoir, ou de supputer, l'effectif de la population à des instants intermédiaires entre deux recensements, p. ex. de connaître $P(z+1)$, $P(z+2)$, $P(z+3)$, etc. C'est le problème de *l'interpolation.* Pour d'autres questions, il est utile de connaître l'effectif futur; c'est le problème de *l'extrapolation.* La théorie mathématique de la population fournit entre autres la solution de ces deux problèmes.

7] Avant d'exposer la nouvelle théorie, commençons par montrer que la considération du taux instantané de variation, $\sigma(t)$, conduit, comme cas particulier, aux 4 principales théories mathématiques émises jusqu'à ce jour. Cela fera ressortir l'importance des fonctions d'intensité.

**I.** Supposons l'intensité de variation nulle. L'équation différentielle $\sigma(t) \equiv \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = 0$ donne $P =$ constante. C'est la théorie de la *population stationnaire* due au célèbre astronome *Edmond Halley.* Nous la citons à cause de son grand intérêt historique et du rôle considérable qu'elle a joué dans la construction des tables de mortalité. Il va de soi que cette théorie n'est exacte que dans des cas exceptionnels et pour des durées relativement courtes.

**II.** Supposons le taux instantané de variation inversement proportionnel à la population, $\sigma(t) = \frac{c}{P(t)}$. Cette hypothèse assez plausible donne l'équation différentielle $\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{c}{P}$ dont l'intégrale générale est

$$P(t) = P_0 + c \cdot t \tag{3}$$

C'est l'hypothèse de *de Moivre* qui dit: „Partant de l'effectif $P_0$, la population varie en progression arithmétique avec le temps.“ Les 2 constantes de la formule, $P_0$ et $c$, permettent de l'adapter aux effectifs croissants aussi bien que décroissants. C'est la plus simple des formules d'interpolation. La courbe $y = P_0 + c \cdot t$ se réduisant à une droite, la théorie de de Moivre revient, au point de vue graphique, à remplacer par le polygone inscrit $ABCDEFG\ldots$ la courbe inconnue $y = P(t)$ devant passer par les points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, etc. (v. fig. 1). La formule de de Moivre n'est pas très appropriée pour l'extrapolation; même après ajustement des constantes, elle donne des résultats douteux dès que l'extrapolation dépasse 10 à 20 ans, et fantaisistes pour des extrapolations à longue échéance. C'est qu'en réalité, $c$ est variable avec le temps, contrairement à l'hypothèse.

**III.** Supposons l'intensité de variation constante, $\sigma(t) = c$. L'équation différentielle $\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = c$ donne $lP = c \cdot t + A$, où $l$ désigne le logarithme naturel. On tire de là:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{ct} \equiv P_0 \cdot r^t \tag{4}$$

C'est l'hypothèse d'*Euler* qui dit: „partant de l'effectif initial $P_0$, la population varie suivant les termes d'une progression géométrique quand le temps augmente en progression arithmétique." Les deux constantes de la formule, $P_0$ et $r$, permettent de l'adapter aux effectifs croissants ($r > 1$) aussi bien que décroissants ($r < 1$). Dans les calculs des statisticiens, c'est la plus usitée des formules d'interpolation. La courbe $y = P_0 \cdot r^t$ étant une exponentielle, l'interpolation eulérienne revient, au point de vue graphique, à substituer à la courbe inconnue $y = P(t)$ devant passer par les points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, . . . . . de la figure 1, une série d'arcs d'exponentielles déterminés chacun par deux points. — Quand il s'agit d'extrapolation, la formule eulérienne, après ajustement des constantes, ne convient que pour des périodes assez courtes ne dépassant guère une trentaine d'années. C'est qu'en réalité, „le facteur de variation", $r$, au lieu de rester constant, varie avec le temps, contrairement à l'hypothèse.

**IV.** Une quatrième théorie est due au Belge *François-Pierre Verhulst,* mort en 1849. On retrouve la théorie verhulstienne en posant le taux instantané de variation $\sigma(t) = c \cdot \{m - P(t)\}$, où $c$ et $m$ sont deux constantes positives; $m$ étant un certain maximum vers lequel tend, asymptotiquement, l'effectif $P(t)$ de la population, on voit que l'intensité de variation diminue proportionnellement à la différence $m - P(t)$ et converge vers zéro. La population tend donc vers l'état stationnaire. Cette hypothèse conduit à l'équation différentielle $\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = c \cdot (m - P)$ facile à intégrer. Prenant comme condition initiale qu'à l'instant $t = 0$, l'effectif doit être $P_0$, on trouve comme intégrale particulière la formule donnée par *Verhulst*:

$$P(t) = P_0 \cdot \frac{m \cdot e^{mct}}{P_0 \cdot e^{mct} + m - P_0} \tag{5}$$

Les 3 constantes qu'elle renferme: $P_0$, $m$, $c$, permettent d'utiliser cette *formule de Verhulst* pour l'interpolation et surtout pour l'extrapolation à longue échéance. Elle a cependant le désavantage de fournir des équations transcendantes pour la détermination des constantes, mais surtout celui d'*être applicable exclusivement à des groupes ayant la tendance à augmenter numériquement.* En effet, la fonction

$$y = f(t) \equiv P_0 \cdot \frac{m \cdot e^{mct}}{P_0 \cdot e^{mct} + m - P_0} \tag{v}$$

est à croissance monotone. Rapportée à un système d'axes cartésiens (v. fig. 2), cette fonction est représentée par une courbe que nous

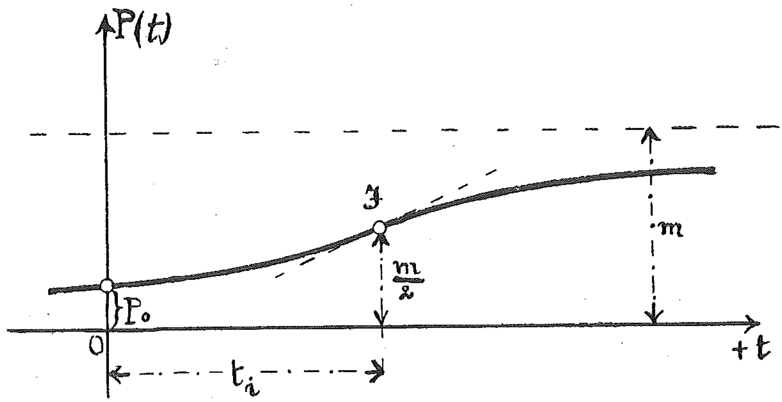


Fig. 2.

appelons „courbe ($v$)" comprise entièrement entre deux asymptotes parallèles, distantes l'une de l'autre de $m$ unités, courbe possédant un point d'inflexion $J$ qui en est en même temps un centre situé à mi-hauteur entre les asymptotes et dont les coordonnées sont, si l'on désigne par $l$ un logarithme naturel:

$$t_i = \frac{1}{cm} \cdot l \, \frac{m - P_0}{P_0}; \quad y_i = \frac{m}{2};$$

au point de vue graphique, l'hypothèse verhulstienne revient à substituer, pour les besoins de l'interpolation, à la courbe inconnue $y = P(t)$ devant passer par les points $A, B, C, D, E, F, G, \ldots$ de la figure 1 une série d'arcs empruntés à des courbes ($v$), déterminés chacun par 3 points. Si l'on admet les hypothèses de *Verhulst* et qu'on les applique à l'humanité entière, cette théorie nous prédit une marche vers un état stationnaire résultant d'un certain équilibre entre la société humaine et la Terre qu'elle habite, état où le nombre total des êtres humains ne subirait plus que des écarts accidentels, des oscillations dues en quelque sorte au hasard.

**8**] La théorie de *Verhulst* est inapplicable à des groupes dont l'effectif va en diminuant ou reste stationnaire. On peut éviter cet inconvénient en raisonnant comme suit:

1° Supposons le taux instantané de variation inversement proportionnel à la population, hypothèse très plausible, puisque les obstacles à la multiplication des vivants augmentent avec le nombre des habitants. Cette hypothèse se traduit par la formule $\sigma(t) = \frac{c}{P(t)}$, où $c$ désigne une constante positive.

2° Supposons qu'au cours du développement surgissent des facteurs nouveaux qui ralentissent encore l'augmentation, si bien que le taux instantané de variation $\sigma(t)$ converge vers zéro, puis finisse par devenir négatif, à partir d'un moment déterminé que nous désignons par $b$. Pour traduire cette seconde hypothèse en formules, il faut poser $\sigma(t)$ proportionnel à $(b-t)$, de sorte qu'il vient: $\sigma(t) = \frac{c}{P(t)}(b-t)$.

3° Admettons enfin que le groupe en question tende vers un état d'équilibre caractérisé par un effectif stationnaire que nous désignons par $m$. C'est une nouvelle constante à notre disposition. A mesure que le nombre des habitants converge vers cet effectif final $m$, l'intensité de variation diminuera. Supposons-la proportionnelle au carré de la différence $[P(t)-m]$. Nous prenons le carré, au lieu de la différence elle-même, pour être certain que $\sigma(t)$ changera de signe dès que $t > b$, quand bien même $P(t)$ oscillerait de part et d'autre de sa limite finale $m$. Ces trois hypothèses nous amènent donc à poser pour le taux instantané de variation:

$$\sigma(t) = \frac{c}{P(t)}(b-t)\,[P(t)-m]^2 \equiv \frac{c}{P}(b-t)(P-m)^2 \qquad (6)$$

d'où l'équation différentielle

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dt} = \frac{c}{P}(b-t)(P-m)^2.$$

Son intégrale générale est $P(t) = m + \frac{1}{A' - bct + \frac{1}{2}ct^2}$, où $A'$ représente la constante d'intégration. Ecrivons pour le facteur de proportionnalité $\frac{2}{c}$ au lieu de $c$ et pour la constante d'intégration $\frac{A}{c}$ au lieu de $A'$. Il vient

$$P(t) = m + \frac{c}{t^2 - 2bt + A}.$$

9] Cette formule ne convient que si elle fournit pour l'effectif de la population des valeurs toujours finies. Il faut donc que le discriminant du dénominateur soit négatif, en d'autres termes: que $b^2 < A$. On est ainsi amené à poser $A = b^2 + a^2$, remplaçant la constante $A$ par une nouvelle constante $a$. On obtient alors

$$P(t) = m + \frac{c}{t^2 - 2bt + b^2 + a^2} \equiv m + \frac{c}{a^2 + (b-t)^2} \qquad (g)$$

Les constantes $a$, $b$, $c$, $m$ étant positives et le discriminant du dénominateur, $-a^2$, négatif, les valeurs de $P(t)$ seront finies et positives. En voici d'ailleurs la variation: Partant de l'effectif $P(0) = m + \frac{c}{a^2 + b^2}$, la population augmente jusqu'à l'instant $t = b$ où elle atteint son maximum $m + \frac{c}{a^2}$. Puis elle décroît en nombre et tend asymptotiquement vers l'effectif stationnaire $m$.

**10]** La courbe d'équation $y = P(t)$, rapportée à un système d'axes rectangulaires, a l'allure représentée par la figure 3. Elle possède

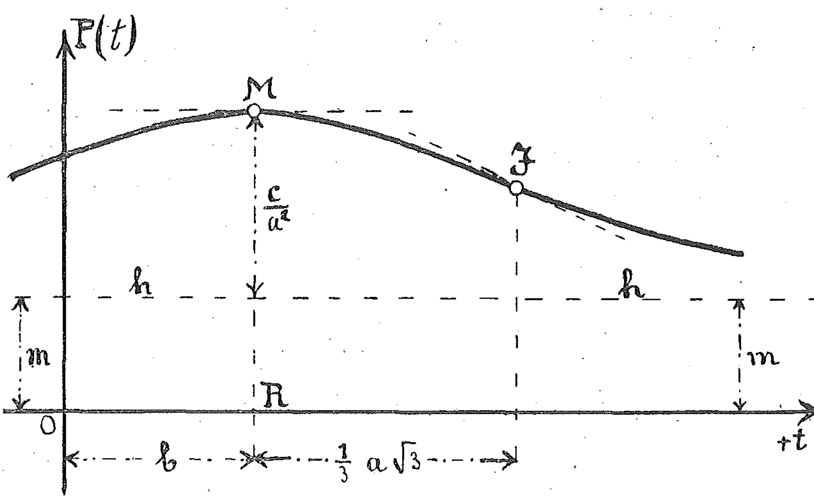


Fig. 3.

un maximum au point $M$, une asymptote $h$ parallèle à l'axe des temps, un axe de symmétrie $MR$ et deux points d'inflexion $J$, réels, correspondant aux abscisses $t = b \pm \frac{1}{3} a \sqrt{3}$. Nous l'appellerons „une courbe $(g)$". Les 4 constantes $a$, $b$, $c$ et $m$ de la formule $(g)$ permettent de l'adapter aussi bien aux effectifs croissants qu'aux effectifs décroissants. Posant $c = 0$, on retrouve même la théorie de la population stationnaire. Au point de vue graphique, l'hypothèse développée ci-dessus à l'article **8]** revient à substituer, pour les besoins de l'interpolation, à la courbe inconnue $y = P(t)$ devant passer par les points $A, B, C, D, E, F, G, \ldots$:

de la figure 1, une série d'arcs empruntés à des courbes $(g)$, déterminés chacun par 4 points.

**11**] Pour déterminer les constantes $a$, $b$, $c$, $m$, il faut quatre données, par exemple les résultats de 4 recensements opérés aux instants $t=0$, $t=t_1$, $t=t_2$, $t=t_3$. Désignant par $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ le nombre des habitants recensés, on obtiendra pour la détermination des 4 constantes en question, les 4 équations suivantes qui ont l'avantage d'être algébriques:

$$P_0 - m = \frac{c}{a^2+b^2}; \qquad P_1 - m = \frac{c}{a^2+(b-t_1)^2};$$

$$P_2 - m = \frac{c}{a^2+(b-t_2)^2}; \quad P_3 - m = \frac{c}{a^2+(b-t_3)^2}.$$

**12**] Les constantes ayant été déterminées, on peut utiliser la formule $(g)$ pour l'interpolation. Elle se prête également aux extrapolations à longue échéance. Si l'on admet les hypothèses de l'article **8**] et qu'on les applique à l'humanité entière, cette théorie nous prédit une marche d'abord ascendante jusqu'à un certain maximum, puis décroissance graduelle (au point de vue numérique, bien entendu) et acheminement vers un état stationnaire caractérisé par un effectif à peu près constant, résultant d'un certain équilibre dont les bases sont à la fois physiques et intellectuelles, d'ordre social et d'ordre biologique.

La signification des constantes dont chacune est essentielle ressort de la figure. Comme $b$ peut être choisi arbitrairement, aussi grand que l'on veut, le maximum de population peut n'être atteint qu'après un temps très long. C'est dire que pratiquement, la formule $(g)$ peut rendre les mêmes services que la formule verhulstienne (5) pour les groupes à croissance monotone. Le maximum $M$ peut être rendu grand ou petit, à volonté, grâce à la constante $c$. Enfin, la constante $m$ qui caractérise l'état stationnaire limite, peut être choisie aussi grande ou aussi petite que l'on voudra; on peut même, en particulier, prendre $m=0$, ce qui revient à supposer que le groupe en question finira par s'éteindre totalement.

**13**] Nous avons examiné un grand nombre d'autres hypothèses relativement à l'intensité de variation $\sigma(t)$; chacune conduit à une théorie différente résumée par une formule donnant l'effectif $P(t)$ en fonction du temps $t$. Toutes ces théories sont basées sur l'emploi des fonctions d'intensité. En particulier, si l'on admet les hypothèses de l'article **8**] avec cette modification que $\sigma(t)$ est proportionnelle à la différence $P - m$ (au lieu du carré de cette différence), en d'autres termes: si l'on pose

$$\sigma(t) = \frac{2c}{P}(b - t)(P - m), \tag{7}$$

on obtient l'équation différentielle que voici:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{2c}{P} \cdot (b - t) \cdot (P - m).$$

Par intégration, on trouve la solution particulière

$$P(t) = m + (P_0 - m) \cdot e^{2bct - ct^2}$$

où l'on a tenu compte de la condition initiale qu'à l'instant $t = 0$, l'effectif doit être $P_0$. En représentant graphiquement cette fonction, on trouve une courbe de même allure générale que celle présentée par les courbes $(g)$ (v. fig. 3).

**14**] Pour serrer la réalité d'aussi près que possible, une théorie de la population devra se baser sur l'étude du taux instantané de variation $\sigma(t)$, puisqu'en théorie, c'est là l'élément essentiel et caractéristique et qu'en pratique, on peut le déterminer directement par l'observation, c'est à dire en utilisant les résultats des recensements, les registres mortuaires, les registres d'état-civil et les registres de migration. Or, les variations de l'effectif dépendent immédiatement de quatre facteurs qui sont: la mortalité, la natalité, l'émigration, l'immigration. Comme nous l'avons déjà fait remarquer ci-dessus (v. **3**] et **4**]), le taux instantané de variation est la résultante de ces 4 composantes, conformément à la formule

$$\sigma(t) = \nu(t) - \mu(t) + \iota(t) - \varepsilon(t). \tag{2}$$

*Il faudra donc étudier séparément chacune de ces 4 composantes;* voilà le premier pas vers une théorie nouvelle de la population, théorie plus exacte, plus conforme à la réalité.

Un second pas reste à faire, encore plus important peut-être; *la décomposition de la population en groupes partiels appropriés* et l'étude séparée de chacun de ces groupes partiels.

**15**] Voici en effet l'erreur qu'il s'agit d'éviter. Pour fixer les idées, prenons une seule cause de variation: la mortalité, et montrons sur un exemple concret ce qu'il y a d'erroné dans la manière habituelle d'interpréter les statistiques mortuaires. Le mode le plus généralement suivi consiste à dresser un tableau donnant *par mille habitants* le nombre annuel des décès survenus dans la population envisagée. Un auteur écrivit p. ex. ceci: Dans la colonie anglaise de Victoria, en Australie, la mortalité générale a été de 16,6 ‰ en moyenne pendant 25 ans (de 1853 à 1878); en Angleterre et dans le pays de Galles, la mortalité générale a été de 22,1 ‰ en moyenne pendant la même période (plus exactement: de 1850 à 1874). Par conséquent, concluait notre auteur, la colonie de Victoria a un climat beaucoup plus salubre que l'Angleterre, puisque la mortalité générale y est de 5,5 ‰ plus faible qu'en Angleterre et dans le pays de Galles; „émigrez donc en Australie, vous y vivrez plus longtemps, les statistiques le prouvent". Or, ce raisonnement tombe à faux pour la raison que voici: Désignons par $G_1$ l'un des groupes: Angleterre et pays de Galles, et par $G_2$ l'autre: colonie de Victoria en Australie. Un grand nombre de personnes à la fleur de l'âge ont quitté le groupe $G_1$ (donc l'Angleterre) et ont émigré dans le groupe $G_2$ (en Australie), $G_1 \rightarrow G_2$. Ces jeunes émigrés ont laissé derrière eux, dans le groupe $G_1$, une grande proportion de personnes touchant à la vieillesse. Or, on sait que le taux de mortalité est régulièrement *élevé* parmi les personnes âgées, même sous un climat très salubre. — Le groupe $G_2$ au contraire, ayant été renforcé constamment par des personnes relativement jeunes, devait montrer un taux moyen de mortalité plus bas, même sous un climat moins salubre, parce que l'âge moyen de la population y était moins élevé et que *l'âge est le plus important des facteurs de mortalité.*

Conséquence: il faut être très circonspect dans l'interprétation des statistiques démographiques où *l'âge* ne figure pas explicitement; si l'on tient compte uniquement de la mortalité générale en pour mille de la population, on ne peut comme règle rien conclure de la comparaison. Pour pouvoir conclure, *il faudra décomposer la population,* aussi bien dans $G_1$ que dans $G_2$, *en classes d'âge,* puis comparer les taux de mortalité des classes correspondantes.

**16**] Une théorie de la population, pour donner des résultats sûrs et traduire la réalité le plus exactement possible, devra procéder d'une manière analogue et s'édifier d'après le programme suivant:

*Premier pas:* décomposer la population envisagée en *classes* ou *groupes partiels,* d'une manière appropriée; pour cela, il faudra tenir compte principalement de l'âge et de la profession exercée, ou occupation prédominante. Désignons ces groupes, dont chacun est au point de vue numérique une fonction du temps, par

$$P_1(t),\ P_2(t),\ P_3(t), \ldots, \ P_\lambda(t), \ldots, \ P_n(t).$$

La population totale devra être égale à la somme de ces classes:

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \cdots + P_n(t) \equiv \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} P_\lambda(t).$$

*Deuxième pas:* Etudier, *pour chacune de ces classes* $P_\lambda(t)$, les 4 taux instantanés de variation: $\nu$, $\mu$, $\iota$, $\varepsilon$ (v. **2**] et **3**]). C'est ici qu'on pourra tenir compte du point de vue social et du point de vue biologique.

*Troisième pas:* Composer, pour chacune de ces classes $P_\lambda$, l'intensité de variation

$$\sigma(t) = \nu(t) - \mu(t) + \iota(t) - \varepsilon(t). \tag{2}$$

Cela permettra d'étudier les fluctuations de la population dans chaque groupe partiel séparément.

*Quatrième pas*: Déterminer la résultante de ces variations partielles.

Cette méthode implique un grand travail. Elle est moins simple que tout ce qu'on a fait jusqu'ici dans ce domaine et pose des problèmes nouveaux. Mais nous pensons que c'est là la base nouvelle d'une future théorie de la population, théorie qui nous permettra, mieux que celles émises jusqu'à nos jours, de prévoir l'avenir et, peut-être, d'influer sur lui d'une manière consciente.