Elastische Oberflächenwellen bei Mitschwingen einer trägen Rindenschicht.

Von

ERNST MEISSNER.

(Als Manuskript eingegangen am 22. Dezember 1921.)

Solange die seismologische Praxis nicht imstande ist, die Bewegungsvorgänge bei der Ausbreitung elastischer Bebenwellen genau festzustellen, können die verwickelten Bebenaufzeichnungen nur an Hand theoretischer Einsichten gedeutet werden. Was etwa zu erwarten ist, wird man in den gröbsten Zügen erfassen, wenn man über das Erdinnere einfache, der Rechnung zugängliche Annahmen macht, wie rein elastisches Verhalten, Isotropie usw. So fusst die Theorie der 1. und 2. Vorläufer auf der Annahme einer isotropen elastischen Erdkugel, die in konzentrischen Kugelflächen homogen ist. So gründet sich die Theorie des Hauptbebens auf die RAYLEIGHschen Oberflächenwellen in einem homogenen Halbraum. Will man mehr als die gröbsten Züge der Erscheinung erfassen, so muss man die Voraussetzungen der Wirklichkeit besser anpassen. Schon die Oszillationen der Bodenbewegung werden ja durch die erwähnten Annahmen nicht erklärt. Jede Verfeinerung der Theorie wird vor allem die Einflüsse der Erdrinde berücksichtigen müssen. Diese Einflüsse sind zahlreich, und es ist schwer zu sagen, welche von ihnen unter gegebenen Verhältnissen vorwiegen. Dass die geologische Struktur eine Rolle spielt ist klar und ist neuerdings im grossen für den Rand der nordrussischen Platte festgestellt worden. Indessen sind gerade diese lokalen Einflüsse theoretisch schwer zu fassen. So wichtig sie an sich sind, wird man vorerst versuchen, allgemeinere Einwirkungen der Rindenschicht klar zu legen. A. E. H. LOVE[1]) hat damit einen Anfang gemacht, dass er über dem homogenen Erdkern eine homogene Rindenschicht von anderer elastischen Beschaffenheit annahm und nachwies, dass dann Dispersion der Hauptwellen eintritt. Ich habe für Querwellen seine Untersuchungen ausgedehnt auf eine Erdrinde, deren Beschaffenheit

[1]) Some Problems of Geodynamics. Cambridge 1912.

unserm heutigen Wissen darüber entspricht.[2]) In dem vorliegenden Aufsatz wird eine andere Einwirkung der Rindenschicht behandelt. Man kann sich vorstellen (und es ist diese Auffassung schon in Fachkreisen vertreten worden), dass gewisse lose Gesteine der äussersten Erdrinde überhaupt nicht mehr an der elastischen Kraftübertragung teilnehmen. Sie wirken alsdann auf den Untergrund nur noch als träge Belastungen, die seine elastischen Bewegungen mitmachen, mitbeschleunigt werden, ohne jedoch gegenseitig auf einander Spannungen zu übertragen. Es wird im folgenden diese Einwirkung dadurch zum Ausdruck gebracht, dass an der Oberfläche eines homogenen elastischen Halbraums eine homogene Massenbelegung angenommen wird. Die ganze nicht elastische Rindenschicht wird also in die Begrenzungsebene des elastischen Untergrundes kondensiert, was wegen ihrer unbedeutenden Dicke zulässig sein dürfte.

Das Resultat der Untersuchung ist folgendes:

Es existieren Querwellen Q, d. h. Oberflächenwellen, die horizontal und quer zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit schwingen. Sie zeigen Dispersion. Die ganz langen laufen annähernd mit der Geschwindigkeit der 2. Vorläufer, kürzere laufen wesentlich langsamer.

Es existieren ferner Wellen, die wie die RAYLEIGHschen in einer Vertikalebene durch die Fortpflanzungsrichtung schwingen. Sie zerfallen in zwei Gruppen, die regulären R_1-Wellen und die irregulären R_2-Wellen. Beide zeigen Dispersion. Lange R_1-Wellen verhalten sich nahezu wie eigentliche RAYLEIGH-Wellen, kurze laufen langsamer. Die Vertikalbewegung überwiegt die horizontale. Lange R_2-Wellen laufen dagegen annähernd mit der Geschwindigkeit der 2. Vorläufer, kurze wieder wesentlich langsamer. Bei dieser Wellenart herrscht die Horizontalbewegung vor. Die Wellenlänge dieser Gruppe hat ein Maximum L_2. Wellen von annähernd dieser Länge dringen tief ins Innere des Erdkörpers ein. Sie werden also bei geringen Herdtiefen nicht mehr in Betracht fallen.

In der beigegebenen Figur sind die Dispersionskurven für alle drei Wellenarten aufgezeichnet.

1. Querwellen.

Ein unendlicher homogener und isotroper elastischer Halbraum $z > 0$ liege vor. Die X- und Y-Axe eines rechtwinkligen Axensystems werden in die Begrenzungsebene $z = 0$ gelegt, die $+Z$-Axe weist ins Innere des Halbraums.

---

[2]) Elastische Oberflächenwellen mit Dispersion. Diese Zeitschrift, LXVI (1921).

Bei einer Querwelle, die sich in der x-Richtung fortpflanzt, erleiden die Körperteilchen nur Verschiebungen v parallel zur y-Richtung, die von y selbst unabhängig sind. Es genügt v als Funktion des Ortes und der Zeit der Wellengleichung

$$\varrho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} \tag{1}$$

Hier ist ϱ die Dichte, μ der Torsionsmodul des Materials.

Die freie Körperoberfläche $z = 0$ denke man sich mit sehr vielen, sehr kleinen Massenteilchen regelmässig besetzt. Sie nehmen an der Bewegung der elastischen Unterlage teil, ohne sich jedoch gegenseitig zu beeinflussen. Ihre Beschleunigungen erhalten sie dann ausschliesslich durch die Spannungen an der Oberfläche des Halbraums. Bei Querwellen sind dies Schubspannungen parallel zur y-Axe, die sich aus der Gleichung

$$\tau_{yz} = \mu \, \frac{\partial v}{\partial z} \tag{2}$$

berechnen. Ist nun ω die Dichte der Massenbelegung pro Flächeneinheit, so gilt für die Bewegung eines Elementes derselben:

$$\omega \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \tau_{yz}$$

oder also für $z = 0$

$$\omega \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \tag{3}$$

Der Ansatz

$$v = A \cdot e^{-sz} \cdot \cos(fx + pt) \tag{4}$$

kann allen diesen Bedingungen genügen. Er stellt eine an der Oberfläche verlaufende Welle dar, wenn noch die Bedingung

$$s > 0 \tag{5}$$

erfüllt wird. Dabei ist

$\frac{2\pi}{f} = l$ die Wellenlänge, $q = \frac{p}{f}$ die Wellengeschwindigkeit.

Die Amplitude A der Bewegung bleibt willkürlich. Dagegen folgt aus (1) und (3)

$$-p^2 = c^2 (s^2 - f^2) \qquad \mu s = \omega p^2 \tag{6}$$

Folgende Abkürzungen werden eingeführt:

$\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} = c =$ der Ausbreitungsgeschwindigkeit reiner Schiebungswellen (2. Vorläufer).

$\frac{q}{c} = K$ die Geschwindigkeit der Querwelle gemessen durch c.

$L = \frac{\varrho}{2\pi\omega} \cdot l$ die Querwellenlänge gemessen im Mass $l^* = 2\pi \cdot \frac{\omega}{\varrho}$.

endlich $S = \frac{s}{f}$.

Es wird (6) zu $K^2 + S^2 = 1 \qquad K^2 = L S$

woraus $$K^4 + L^2 K^2 - L^2 = 0$$

mit der Lösung $$K = + \sqrt{-\frac{L^2}{2} + L \sqrt{\frac{L^2}{4} + 1}} \tag{I}$$

und $$S^2 = 1 + \frac{L^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{L^2}{2} + 1\right)^2 - 1}$$

Aus der letzten Formel ergibt sich, dass auch Bedingung (5) sich stets eindeutig erfüllen lässt.

Die Beziehung (I) gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Querwelle als Funktion der Wellenlänge. Die Querwellen zeigen also Dispersion. Es laufen lange Wellen rascher, als kurze. Die Kurve Q in Fig. 1 zeigt das zugehörige Schaubild. Lange Wellen laufen nahezu mit der Geschwindigkeit c der 2. Vorläufer, kürzere können jedoch wesentlich dahinter zurückbleiben. Für ganz kurze Wellen gilt (I) nicht mehr; denn dann ist der Ersatz der Rindenwirkung durch eine Oberflächenbelegung nicht mehr zulässig. Es bezeichne h die Rindendicke, d. h. die Dicke, die der Rinde zuzuschreiben ist, wenn man ihre Dichte gleich ϱ setzt und sie einer Oberflächenbelegung ω äquivalent ist. Es ist $h = \frac{\omega}{\varrho}$ und es wird

$$l^* = 2\pi h$$

Die Welle von der Länge $L = 1$ ist noch rund 6 mal länger als h. Formel (I) wird für sie die Verhältnisse noch gut darstellen und erst bei wesentlich kleineren Werten ihre Gültigkeit verlieren.

2. Rayleigh-Wellen.

In dem mit Masse belegten Halbraum sind auch Wellen möglich, die nach Art der Rayleighschen Oberflächenwellen schwingen und die hier als R-Wellen bezeichnet werden sollen.

Die Wellen mögen in der x-Richtung fortschreiten. Die Bewegung der Teilchen erfolgt in der xz-Ebene. Es seien u, w die Verschiebungskomponenten. Sie genügen den Differentialgleichungen der elastischen Bewegung

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu \Delta^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \Delta^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wobei
$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{7'}$$

die räumliche Dilatation bedeutet und λ, μ die Elastizitätskoeffizienten sind. Für ein Element der Oberfläche gelten die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \omega \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \sigma_z = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \Theta \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hiebei sind die bekannten Ausdrücke der Spannungen durch die Verschiebungen verwendet worden.

Man kann all' diesen Forderungen genügen durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} u &= -i \frac{f}{h^2} P e^{-rz + i(fx+pt)} + A e^{-sz + i(fx+pt)} \\ w &= \frac{r}{h^2} P e^{-rz + i(fx+pt)} + C e^{-sz + i(fx+pt)} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Macht man
$$ifA = sC \tag{10}$$

so wird zunächst
$$\Theta = P e^{-rz + i(fx+pt)}$$

Man setze $k^2 = \frac{\varrho p^2}{\mu} = \frac{p^2}{c^2}$ [1] $\qquad h^2 = \frac{\varrho p^2}{\lambda + 2\mu}$. (11)

Die Gleichungen (7) sind erfüllt, wenn

$$r^2 + h^2 = f^2 \qquad s^2 + k^2 = f^2 \tag{12}$$

Die Randbedingungen (8) geben zwei weitere lineare Beziehungen zwischen P, A und C von der Form:

$$\left.\begin{aligned} if \cdot \frac{P}{h^2}[np^2 - 2r] &= A[np^2 - s] + ifC \\ \frac{P}{h^2}[np^2 r - 2f^2 + k^2] &= C(2s - np^2) \end{aligned}\right\}_{n = \frac{\omega}{\mu}} \tag{13}$$

Die Determinante der Gleichungen (10) und (13) gleich null gesetzt ergibt als Bedingung ihrer Lösbarkeit:

$$f^2[np^2 - 2r][np^2 - 2s] - [np^2 r - 2f^2 + k^2][np^2 s - 2f^2 + k^2] = 0 \tag{14}$$

[1]) c bedeutet wieder die Ausbreitungsgeschwindigkeit reiner Schiebungswellen.

Dies wird übersichtlicher bei Einführung folgender Abkürzungen:

$$q = \frac{p}{f} \qquad K = \frac{k}{f} \qquad H = \frac{h}{f} \qquad R = \frac{r}{f} \qquad S = \frac{s}{f} \qquad l = \frac{2\pi}{f}$$

$$l^* = 2\pi \frac{\omega}{\varrho} \qquad L = \frac{l}{l^*} = \frac{\varrho}{f\omega} \tag{15}$$

Die grossen Buchstaben sind dimensionslose Zahlen, zwischen denen wegen (12) die Beziehungen bestehen:

$$R^2 + H^2 = 1 \qquad\qquad S^2 + K^2 = 1 \tag{16}$$

K bedeutet wieder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle gemessen durch c. Es wird nun (14) zu

$$L^2 \cdot \left[(1 + S^2)^2 - 4RS\right] + L \cdot (R+S) K^4 - (1 - RS) K^4 = 0 \tag{II}$$

und dies ist das D i s p e r s i o n s g e s e t z d e r R-W e l l e n. Zu jeder Wellenlänge L gibt es einen Wert für K, eventuell mehrere. Von den Wurzeln von (II) kommen indessen nur die positiven in Betracht, und wenn die Welle nach dem Innern des Halbraums abklingen soll, muss ausserdem noch den Forderungen

$$R > 0 \qquad\qquad S > 0 \tag{17}$$

genügt werden.

Zur numerischen Auswertung von (II) ist eine Annahme über die elastischen Konstanten des Körpers nötig. Setzt man $\lambda = \mu$, so entspricht dies dem Wert 4 der POISSONschen Zahl, was mit den Ergebnissen der seismologischen Beobachtungen gut übereinstimmt.[1] Alsdann kann man zu jedem S zwischen 0 und 1 Gleichung (II) nach L auflösen. Man erhält für kleine Werte von S nur eine positive Wurzel, für grosse deren zwei. Dementsprechend besteht die L-K-Kurve (Fig. 1) aus zwei Ästen R_1 und R_2. R_1 verläuft asymptotisch nach dem Werte $K = 0{,}9194$, welches die Geschwindigkeit gewöhnlicher RAYLEIGH-Wellen ist.[2] Sehr langen Wellen gegenüber verschwindet daher der Einfluss der trägen Rindenschicht. Bei kurzen zeigt er sich in einer Verkleinerung der Laufgeschwindigkeit; die Geschwindigkeitsverhältnisse sind dort ähnlich wie bei Querwellen. Es sollen die der Kurve R_1 entsprechenden Wellen als r e g u l ä r e R_1-W e l l e n bezeichnet werden.

---

[1] GALITZIN, Seismometrie, S. 141.

[2] Er berechnet sich aus $(1 + S^2)^2 - 4RS = 0$.

Daneben gibt es noch unterhalb der Wellenlänge

$L_2 = \sqrt{\frac{7}{6}} - \sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}6719$ eine zweite, irreguläre Wellengruppe R_2.

Die Wellen dieser Gruppe laufen merklich rascher, als die gleich langen R_1-Wellen. Ist die Wellenlänge wenig kleiner, als L_2, so ist die Laufgeschwindigkeit wenig kleiner, als die der Torsionswellen ($K \simeq 1$), jedenfalls aber grösser als die Maximalgeschwindigkeit der regulären Wellen. Freilich dringen solche Wellen auch beträchtlich tief ins Innere des Körpers ein, da S klein ist; für $K = 1$ klingen sie überhaupt nicht mehr ab mit der Tiefe. Wenn sie bei Beben auftreten, werden sie sich mischen mit den langen Querwellen, die gleich rasch laufen. Ihnen folgen die langen regulären Wellen auf dem Fusse nach.

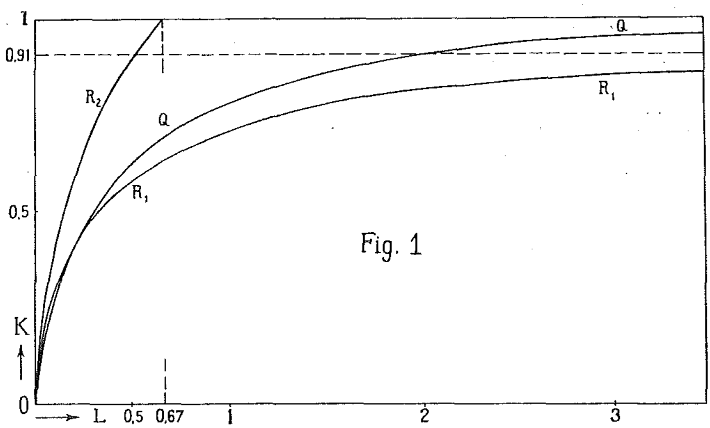

Fig. 1

Wenn die Bewegungsgleichungen (9) reell geschrieben werden, so lauten sie:

$$u = \frac{P}{h^2} \cdot \frac{1}{f} \left[e^{-rz} \cdot f^2 + e^{-sz} \cdot s\,\zeta \right] \sin\,(f x + p\,t - \alpha)$$

$$w = \frac{P}{h^2} \left[e^{-rz} \cdot r + e^{-sz} \cdot \zeta \right] \cos\,(f x + p\,t - \alpha)$$

Hiebei ist $$\zeta = \frac{\frac{\omega}{\mu} p^2 r - 2 f^2 + k^2}{2\,s - \frac{\omega}{\mu}\,p^2}$$ gesetzt.

Es beschreibt also jeder Punkt eine Ellipse. Für ein Teilchen der Oberfläche wird sodann:

$$\left.\begin{aligned} u &= Q\frac{1}{f}(f^2 + s\,\zeta)\,\sin\,(f\,x + p\,t - \alpha) \\ w &= Q\,(r + \zeta)\cdot\cos\,(f\,x + p\,t - \alpha) \end{aligned}\right\}$$

woraus sich das Verhältnis der Amplituden von Vertikal- und Horizontalbewegung berechnet zu

$$\eta = \left| \frac{f(r+\zeta)}{f^2 + \zeta\,s} \right| = \left| \frac{K^2 + 2\,R\,S - 2}{K^2\left(S - \frac{1 - RS}{L}\right)} \right|$$

Für die regulären Wellen geht η von 1 zu 1,468, wenn L von 0 an ins Unendliche läuft; es ist also für jede Einzelwelle die Vertikalbewegung stärker, als die horizontale. Schon LOVE hat darauf hingewiesen, dass das für eine Gruppe von Wellen nicht mehr der Fall zu sein braucht.

Für die irregulären Wellen geht η von 1 bis nach 0,6719, wenn L von 0 nach L_2 geht. Hier ist Horizontalbewegung vorherrschend.

Zollikon, 21. Dezember 1921.