Eine Tetraederaufgabe.

Von

A. Kiefer (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 18. Januar 1922.)

Im Raum die Stellung einer Ebene zu ermitteln, so dass die Orthogonalprojektion eines gegebenen allgemeinen Tetraeders auf die Ebene ein Dreieck mit seinem Höhenpunkt ist.

Denkt man sich Ebene und Dreieck gefunden und durch eine Seite desselben und auch durch die zugehörige Höhe die projizierenden Ebenen gelegt, so müssen diese zwei Ebenen aufeinander senkrecht stehen, durch zwei Gegenkanten des Tetraeders gehen und eine Schnittlinie ergeben, die zur Projektionsrichtung parallel ist. Werden umgekehrt zwei Gegenkanten des Tetraeders als Scheitelkanten von Ebenenbüscheln gewählt, so dass jede Ebene des einen Büschels auf der entsprechenden Ebene des andern Büschels senkrecht steht, so erzeugen die zwei Büschel ein orthogonales Hyperboloid; sein Schnitt mit der unendlich fernen Ebene enthält die Projektionsrichtung und ist ein Kegelschnitt durch die unendlich fernen Punkte der zwei gewählten Gegenkanten des Tetraeders. Der Kegelschnitt ist das Erzeugnis von zwei projektivischen Strahlenbüscheln mit den unendlich fernen Punkten der zwei Tetraederkanten als Scheitelpunkten und wo entsprechende Strahlen der beiden Büschel in bezug auf den imaginären Kugelkreis konjugiert sind, d. h. wo jeder Strahl durch den Pol des entsprechenden Strahls in bezug auf den Kugelkreis hindurchgeht. In gleicher Weise gehört zu zwei andern Gegenkanten des Tetraeders ein solcher Kegelschnitt im Unendlichen. Die beiden Kegelschnitte schneiden sich in vier Punkten, durch welche auch der Kegelschnitt geht, der zum dritten Gegenkantenpaar des Tetraeders gehört. Diese vier Punkte sind die gesuchten Projektionsrichtungen und die zu den Richtungen senkrechten Stellungen sind die Stellungen der gesuchten Ebenen. Diese vier Stellungen sind die gemeinsamen Tangenten der drei Polarkegelschnitte zu den drei gefundenen Kegelschnitten in bezug auf den imaginären Kugelkreis. Die drei Polarkegelschnitte lassen sich auch direkt stereometrisch finden. Legt man durch jede von zwei Gegenkanten des Tetraeders eine Ebene, so dass die zwei

Ebenen aufeinander senkrecht stehen, so muss eine gesuchte Ebene auf der Schnittlinie der zwei Ebenen senkrecht stehen und die Stellung der gesuchten Ebene muss die senkrechten Richtungen zu den zwei Ebenen enthalten; diese Richtungen laufen nach den Stellungen der Ebenen, die auf den zwei Gegenkanten des Tetraeders senkrecht stehen. Die Stellung der gesuchten Ebene muss also Tangente eines Kegelschnittes sein, welcher das Erzeugnis von zwei projektivischen Punktreihen ist, die auf den Stellungen der zu den zwei Gegenkanten normalen Ebenen liegen und wo entsprechende Punkte in bezug auf den Kugelkreis konjugiert sind. Solcher Kegelschnitte gibt es drei, entsprechend den drei Paar Gegenkanten des Tetraeders; die vier gemeinsamen Tangenten der drei Kegelschnitte sind die Stellungen der gesuchten Ebenen und die Polarfiguren dieser drei Kegelschnitte in bezug auf den Kugelkreis sind die schon gefundenen drei Kegelschnitte, deren vier gemeinsamen Schnittpunkte die Projektionsrichtungen sind.

Sind zwei Gegenkanten des Tetraeders windschief normal, so sind ihre unendlich fernen Punkte in bezug auf den Kugelkreis konjugierte Punkte und der zu den zwei Gegenkanten gehörige Kegelschnitt in der unendlich fernen Ebene zerfällt in ein Linienpaar, nämlich in die Polaren der zwei unendlich fernen Punkte der zwei windschief normalen Gegenkanten in bezug auf den Kugelkreis. Die erzeugenden zwei Strahlenbüschel haben die Eigentümlichkeit, dass der gemeinsame Scheitelstrahl nicht sich selbst entspricht, sondern alle Strahlen des ersten Büschels entsprechen einem einzigen Strahl des zweiten Büschels, welcher die Polare vom Scheitelpunkt des ersten ist und alle Strahlen des zweiten Büschels entsprechen der Polaren seines Scheitels, die dem ersten Büschel angehört. Von den vier Höhen des Tetraeders schneiden sich zweimal je zwei in einem Punkt, nämlich diejenigen, die von den Endpunkten der einen oder andern der windschief normalen Kanten ausgehen. Sind bei einem Tetraeder nicht blos zwei Gegenkanten windschief normal, sondern noch zwei andere, so gehen die vier Höhen durch einen Punkt; das dritte Kantenpaar ist ebenfalls windschief normal. Die zu den drei Paaren gehörigen Kegelschnitte im Unendlichen zerfallen in drei Linienpaare. Die vier Projektionsrichtungen sind diejenigen der vier Tetraederhöhen; die Stellungen der vier Ebenen sind diejenigen der Seitenflächen des Tetraeders.

Die im Unendlichen aufgetretenen Kegelschnitte stehen mit dem imaginären Kugelkreis in einfachem Zusammenhang; um denselben besser zu erkennen, kann man die unendlich ferne Ebene mit dem

Kugelkreis ersetzen durch eine im Endlichen gelegene Ebene, in der ein Kegelschnitt K gegeben ist. Sind in der Ebene zwei Punkte A, B gewählt, so bestimmen sie als Scheitelpunkte zwei projektivische Strahlenbüschel, deren Zuordnung darin besteht, dass entsprechende Strahlen in bezug auf den Kegelschnitt K konjugiert sind, d. h. dass jeder Strahl durch den Pol des entsprechenden Strahls in bezug auf K hindurchgeht. Eine von A oder B aus an K gelegte Tangente hat ihren Pol im Berührungspunkt; der entsprechende Strahl zur Tangente geht also durch ihren Berührungspunkt auf K. Das Erzeugnis der beiden Strahlenbüschel ist somit ein Kegelschnitt (A, B), der durch die Punkte A, B und die Berührungspunkte der Tangenten von A, B an K hindurch geht. Die Tangenten des Kegelschnittes (A, B) in den Punkten A, B laufen nach dem Pol der Geraden AB in bezug auf K; die Tangenten in den vier Punkten auf K werden gefunden, indem man die Polaren a, b von A, B mit der Geraden AB schneidet, zu den zwei Schnittpunkten die harmonischen Punkte in bezug auf A, B sucht und mit den Punkten von K auf a beziehungsweise auf b verbindet. Legt man von zwei Punkten an einen Kegelschnitt Tangenten, so bildet jeder Punkt mit den Berührungspunkten seiner zwei Tangenten ein Dreieck und zwei solche Dreiecke sind stets einem Kegelschnitt eingeschrieben (und aus Polaritätsgründen einem Kegelschnitt umgeschrieben). Betrachtet man die Punkte A, B als Doppelpunkte einer Involution, so gehen von jedem Punktepaar der Involution an den Kegelschnitt K zwei Tangentenpaare; ihre vier Schnittpunkte erfüllen einen geometrischen Ort, nämlich einen Kegelschnitt, weil auf jede Tangente von K zwei Punkte des Ortes fallen. Dieser Kegelschnitt ist mit dem vorigen Kegelschnitt (A, B) identisch, weil A, B, als spezielle Paare und die Berührungspunkte der Tangenten von A, B an K den Ortskegelschnitt bestimmen. Lässt man von den beiden Punkten A, B den einen, z. B. B, sich bewegen, so ändert sich der zugehörige Kegelschnitt; läuft B auf einer Geraden, so bilden die Kegelschnitte ein Büschel, dessen vierter Grundpunkt der Schnittpunkt der Geraden mit ihrer konjugierten Geraden durch A ist. Durch spezielle Wahl der Punkte A, B entstehen besondere Fälle.

Legt man dual in der Ebene von K zwei gerade Linien a, b, so sind sie Träger von projektivischen Punktreihen, deren Zuordnung darin besteht, dass entsprechende Punkte in bezug auf K konjugierte Pole sind. Das Erzeugnis der beiden Reihen ist ein Kegelschnitt (a, b), der die Geraden a, b und die vier Tangenten von K in den Schnittpunkten von a, b mit K zu Tangenten hat. Die Berührungspunkte von a, b liegen auf der Polaren des Schnittpunktes von a, b in bezug auf K. Die Berührungspunkte der vier Tangenten von K mit dem Ortskegelschnitt (a, b) werden gefunden, indem man die Pole A, B von a, b mit dem Schnittpunkt von a, b verbindet und zu diesen Linien die vierten harmonischen Strahlen in bezug auf a, b sucht und mit den zwei Tangenten von K durch A beziehungsweise durch B schneidet. Werden zwei gerade Linien mit einem Kegelschnitt geschnitten und legt man in den Schnittpunkten an den Kegelschnitt die Tangenten, so bildet jede Gerade mit den Tangenten in ihren Schnittpunkten ein Dreieck und zwei solche Dreiecke sind stets einem Kegelschnitt umgeschrieben (und einem andern eingeschrieben). Betrachtet man die beiden Geraden a, b als Doppelstrahlen einer Strahleninvolution, so schneidet jedes Paar der Involution den Kegelschnitt K in vier Punkten, deren vier Verbindungsgeraden einen Ort umhüllen, nämlich einen Kegelschnitt, weil durch jeden Punkt von K zwei Tangenten des Ortes gehen. Dieser Ortskegelschnitt ist mit dem früheren Kegelschnitt (a, b) identisch, weil a, b als spezielle Paare und die Tangenten von K in den Schnittpunkten mit a, b den Ortskegelschnitt bestimmen. Lässt man von den beiden Geraden a, b die eine, z. B. b, sich bewegen, so ändert sich der zugehörige Kegelschnitt (a, b); dreht sich b um einen Punkt, so bilden die Kegelschnitte eine Schar, deren vierte Grundtangente die Verbindungslinie des Punktes mit seinem konjugierten Punkt auf a ist. Dadurch, dass man den Geraden a, b besondere Lagen gibt, entstehen Spezialfälle.

Die gefundenen Beziehungen zwischen einem Kegelschnitt und zwei Punkten, oder zwei Geraden, lassen sich auf Flächen zweiten Grades ausdehnen. Hat man eine Fläche zweiten Grades F und zwei Punkte A, B, die nicht auf ihr liegen, so kann man den Strahlen und Ebenen durch den einen die Ebenen und Strahlen durch den andern in dem Sinne projektivisch zuordnen, dass der entsprechende Strahl zu einer Ebene durch ihren Pol und die entsprechende Ebene zu einem Strahl durch seinen konjugierten Strahl in bezug auf F geht. Dann erzeugen die beiden reziproken Bündel eine Fläche zweiten Grades $F\ (AB)$, welche durch die Punkte A, B und durch die Berührungskegelschnitte der Tangentialkegel von A, B an F hindurchgeht. Die Tangentialebenen von $F\ (A, B)$ in A, B gehen durch die konjugierte Gerade von AB; die Spitzen der Kegel, welche die Fläche $F\ (A, B)$ längs der vorigen Kegelschnitte berühren, werden gefunden, indem man die Ebenen der zwei Kegelschnitte mit der Geraden $A\,B$ schneidet und zu den Schnittpunkten die harmonischen Punkte in bezug auf die Punkte A, B sucht. Nimmt man irgend zwei zu A, B harmonisch gelegene Punkte und legt von ihnen aus an die Fläche F die Tangentialkegel, so durchdringen sich die beiden Kegel in einer, in Kegelschnitte zerfallenden, Raumkurve vierter Ordnung, die auf der Fläche zweiten Grades F (A, B) liegt. Man kann noch sagen, dass die Spitzen von zwei Tangentialkegeln einer Fläche F und die beiden Berührungskegelschnitte stets einer andern Fläche zweiten Grades eingeschrieben sind.

Hat man eine Fläche zweiten Grades F und zwei Ebenen a, b, die nicht Tangentialebenen von F sind, so kann man den Punkten und Strahlen der einen Ebene die Strahlen und Punkte der andern in der Weise projektivisch zuordnen, dass der entsprechende Strahl eines Punktes in seiner Polarebene und der entsprechende Punkt eines Strahles auf dem konjugierten Strahl in bezug auf F liegt. Dann erzeugen die beiden reziproken Ebenenfelder eine Fläche zweiten Grades F (a, b), welche die Ebenen a, b und auch die beiden Kegelflächen berührt, die F längs den Schnitten mit den Ebenen a, b berühren. Die Berührungspunkte der Fläche F (a, b) mit den zwei Ebenen a, b liegen auf der konjugierten Geraden zur Schnittlinie von a, b; die Ebenen der zwei Kegelschnitte, längs denen die Fläche F (a, b) die vorigen Tangentialkegel von F berührt, werden gefunden, indem man die Spitzen der zwei Kegelflächen mit der Schnittgeraden von a, b durch Ebenen verbindet und zu den zwei Ebenen die harmonischen in bezug auf a, b sucht. Nimmt man irgend zwei zu a, b harmonisch gelegene Ebenen und schneidet jede von ihnen mit der Fläche F, so bestimmen die zwei Schnitte eine gemeinsame, in zwei Kegelflächen zerfallende, Developpable vierter Klasse, die der Fläche F (a, b) umschrieben ist. Man kann noch sagen, dass die Ebenen von zwei Kegelschnitten einer Fläche zweiten Grades und die Kegelflächen, welche längs der Kegelschnitte berühren, stets einer andern Fläche zweiten Grades umgeschrieben sind.

Bemerkung. Anstatt in einer Ebene einen Kegelschnitt mit zwei Punkten oder zwei Geraden in Beziehung zu setzen, kann man zwei Kegelschnitte und einen Punkt, oder eine Gerade wählen; analog im Raum.