Translationen über einfach zusammenhängende Gebiete.

Von

Willy Scherrer (Zürich).

Mit 2 Textfiguren.

(Als Manuskript eingegangen am 7. Januar 1925.)

Es soll der Beweis geführt werden für folgenden Translationssatz:

Besitzt eine indikatrixerhaltende, mit Einschluss des Randes topologische Abbildung eines einfach zusammenhängenden ebenen Gebietes in sich keinen Fixpunkt im Innern, so ist sie über das ganze Innere eine Translation. Enthält dabei die Menge der Fixpunkte kein Kontinuum, so sind die um ihre Grenzpunkte erweiterten Feldränder einfache Bögen.

Wir setzen zuerst der Einfachheit halber voraus, dass das abzubildende Gebiet beschränkt sei. Es liege also eine indikatrixerhaltende, mit Einschluss des Randes topologische Abbildung eines beschränkten, einfach zusammenhängenden ebenen Gebietes G in sich vor, welche keinen Fixpunkt im Innern hat.

Wir betrachten einen Jordanbereich K im Innern von G, welcher ausserhalb seines Bildbereiches K' liegt und mit K' eine gewisse Menge M' von Randpunkten gemein hat.

Dann gibt es sowohl auf dem Rand von K wie auch auf dem Rand von K' je einen Bogen, welche zusammen die gleichen Endpunkte haben und deren innere Punkte durch K und K' vom Rande von G getrennt sind (in Fig. 1 die durch $1'$ und $7'$ begrenzten Bögen, welche etwa die Punkte 1 und $1''$ nicht enthalten). Wir nennen diese Bögen zur Abkürzung die verdeckten Randstücke von K und K'.

Dann gelten folgende Tatsachen: Durchläuft ein Punkt P' das verdeckte Randstück des Bildes K', so durchläuft das Original von P' (das inverse Bild zu P') einen Randbogen von K, welcher ganz ausserhalb des verdeckten Randstückes von K liegt. Diese beiden Bögen werden durch zwei Bögen $1\,1'$ und $7\,7'$ voneinander getrennt. Die Bögen $1\,1'$ und $7\,7'$ und nur diese Bögen haben die Eigenschaft, dass einer Erweiterung des Originalgebietes über diese Bögen hinaus in ein von K und K' gemeinsam bestimmtes Restgebiet eine Erweiterung des Bildgebietes über $1' 1''$ resp. $7' 7''$ hinaus in das gleiche von K und K' gemeinsam bestimmte Restgebiet entspricht. Dementsprechend nennen wir $1\ 1'$ und $7\ 7'$ die freien Enden des Originalgebietes.

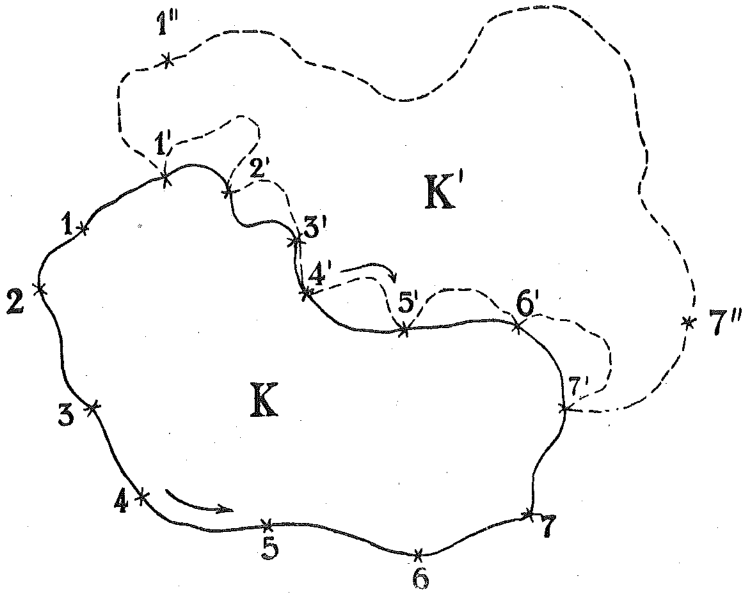

Fig. 1

Die Beweise für diese Tatsachen ergeben sich aus Schlüssen, welche den von BROUWER [1]) zum Beweis des Fixpunktsatzes der Kugelfläche benützten analog sind oder auch mit Hilfe von Sätzen desselben Autors [2]) über Translationsbögen, welche auf den verdeckten Randstücken auftreten müssten.

Falls K den Rand erreicht, vereinfachen sich die Verhältnisse, insofern dann ein oder zwei von Randpunkten begrenzte Bögen auftreten, welche den freien Enden entsprechen. Längs eines solchen Randbogens ist dann keine weitere Ausdehnung ohne Überdeckung von Bild und Original in das gleiche Restgebiet möglich. Eine Ausdehnung über $1\ 1'$ oder $7\ 7'$ ohne Überdeckung zwischen Bild und Original kann aber auch nie auf das inverse Bild des verdeckten Randstückes von K' treffen, da sonst die Eindeutigkeit der Abbildung

[1]) L. E. J. BROUWER: Continuous one-one transformations of surfaces in themselves Proc. Akad. Amsterd. *11*, p. 788 (1909).

[2]) L. E. J. BROUWER: Beweis des ebenen Translationssatzes. Math. Ann. *72*. S. 37 (1912). In Betracht kommen die Sätze 1, 2 und 3 von § 1.

verloren ginge. Es bleibt also nur noch die Möglichkeit übrig, dass 1 1′ mit 7 7′ zusammentrifft.[1]) In diesem Falle würde aus K ein zweifach zusammenhängender Bereich entstehen. Dasselbe müsste also auch für K' der Fall sein. Da nun aber die Abbildung von K auf K' ein Teil der Abbildung von G in sich ist, so müssten die von K und K' bestimmten inneren Restgebiete einander entsprechen, was wegen der Ränder Zuordnung zur Folge hätte, dass K ganz in dem inneren Restgebiet von K' oder umgekehrt enthalten wäre. Dann müssten aber einfache geschlossene Kurven vorhanden sein, welche ganz im Inneren ihres Bildes liegen oder umgekehrt. Auf Grund von Schlüssen über den Transformationsvektor würde sich hieraus ein Fixpunkt im Inneren von G ergeben.

Zur Abkürzung nennen wir das inverse Bild des verdeckten Randstückes von K', also den Bogen 1 2 3 4 5 6 7 in Fig. 1, das gehemmte Randstück von K.

Wir gehen jetzt über zur Konstruktion eines Translationsfeldes für einen beliebigen inneren Punkt. Sei also P ein im Innern von G gelegener Punkt und P' sein nach Voraussetzung von ihm verschiedenes Bild. Wir führen kartesische Koordinaten ein und bestimmen um P als Zentrum ein nach den Axen orientiertes Quadrat K_0, welches ganz innerhalb G und ausserhalb seines Bildes K_0' liegt. Dann dehnen wir K im Bezug auf P konzentrisch aus bis zu einem Quadrat K_0, welches mit seinem Bilde K_0' in Berührung ist. Damit treten auf K_0 zwei freie Enden auf. Wir betrachten nur eines von ihnen und nennen es 1 1′. Nach seiner Zusammensetzung aus Komponenten kommen für dieses freie Ende folgende Typen in Betracht (siehe Fig. 2).

I. Eine Komponente.

II. Zwei Komponenten mit einem ausspringenden Winkel.

III. Drei Komponenten mit zwei ausspringenden Winkeln.

I′. Vier Komponenten mit drei ausspringenden Winkeln.

II′. Fünf Komponenten mit vier ausspringenden Winkeln.

I′ und II′ betrachten wir nicht als selbständige Typen, insofern man die Ausdehnung ohne Überdeckung weiter führen kann, ohne dass man gezwungen ist, die Quadratform aufzugeben. Man stösst dann schliesslich notwendig auf einen der drei Typen I, II und III (die Ausdehnung verläuft dann allerdings exzentrisch).

---

[1]) Durch die Ausschliessung der damit aufgezählten Möglichkeiten reduziert sich also das Problem auf den Fall, wo die Ausdehnung des Originalbereichs beständig im Innern erfolgt. Die weiteren Überlegungen beschränken sich demgemäss auf diesen Fall.

Für die weitere Ausdehnung über die Typen I, II und III sollen nun folgende Regeln innegehalten werden:

I. Man setzt auf der Mitte der Komponente ein kleines Quadrat auf und dehnt dieses symetrisch zur Mitte nach aussen (Fig. 2, Fall A).

II. Man bestimmt die Mitte der grösseren Komponente und verfährt gleich wie für I.

III. Man bestimmt die Mitte der mittleren Komponente und verfährt ebenso.

Zufolge der einleitenden Bemerkungen muss bei der wegen Berührung mit dem Bildgebiet auftretenden Hemmung jedes Mal auf dem an Stelle des freien Endes $1\ 1'$ sich bildenden Konturteil ein neues freies Ende $2\ 2'$ auftreten und zwar muss mindestens einer der beiden Endpunkte dieses Endes auf dem nach aussen liegenden Konturteil des neu hinzugesetzten Quadrates liegen, da sonst die Dehnung dieses Quadrates nicht gehemmt sein könnte. Indem wir wie vorhin zwischen selbständigen und unselbständigen Typen unterscheiden, ergibt sich, dass ausser I, II und III nur folgende selbständige Typen auftreten können:

IV. Zwei Komponenten mit einem einspringenden Winkel.

V. Drei Komponenten mit einem ausspringenden und einem einspringenden Winkel.

VI. Vier Komponenten mit zwei ausspringenden und einem einspringenden Winkel.

Die weitere Ausdehnung erfolgt jedesmal von dem einspringenden Winkel aus, indem man dort ein kleines Quadrat in der Ecke einsetzt und dieses nach aussen dehnt (Fig. 2, B). Dabei entstehen nun wieder entweder die Typen I, II, III, IV, V und VI oder höchstens ein neuer selbständiger Typus VII.

VII. Fünf Komponenten mit drei ausspringenden Winkeln und einem einspringenden Winkel. Die weitere Ausdehnung erfolgt wieder von einem einspringenden Winkel aus. Natürlich kann noch die Verteilung der Komponenten auf die beiden Koordinatenrichtungen anders sein, als dies in den Figuren angegeben worden ist.

Unter Innehaltung der festgesetzten Ausdehnungsregeln kann nun überhaupt kein neuer Typus mehr entstehen, d. h. die sieben Typen sind gegenüber weiterer Dehnung invariant.

Jedes neu auftretende freie Ende gehört nach Konstruktion höchstens zwei aneinanderliegenden Quadraten an. Numerieren wir also die aufeinanderfolgenden Maximalquadrate und bezeichnen ihre

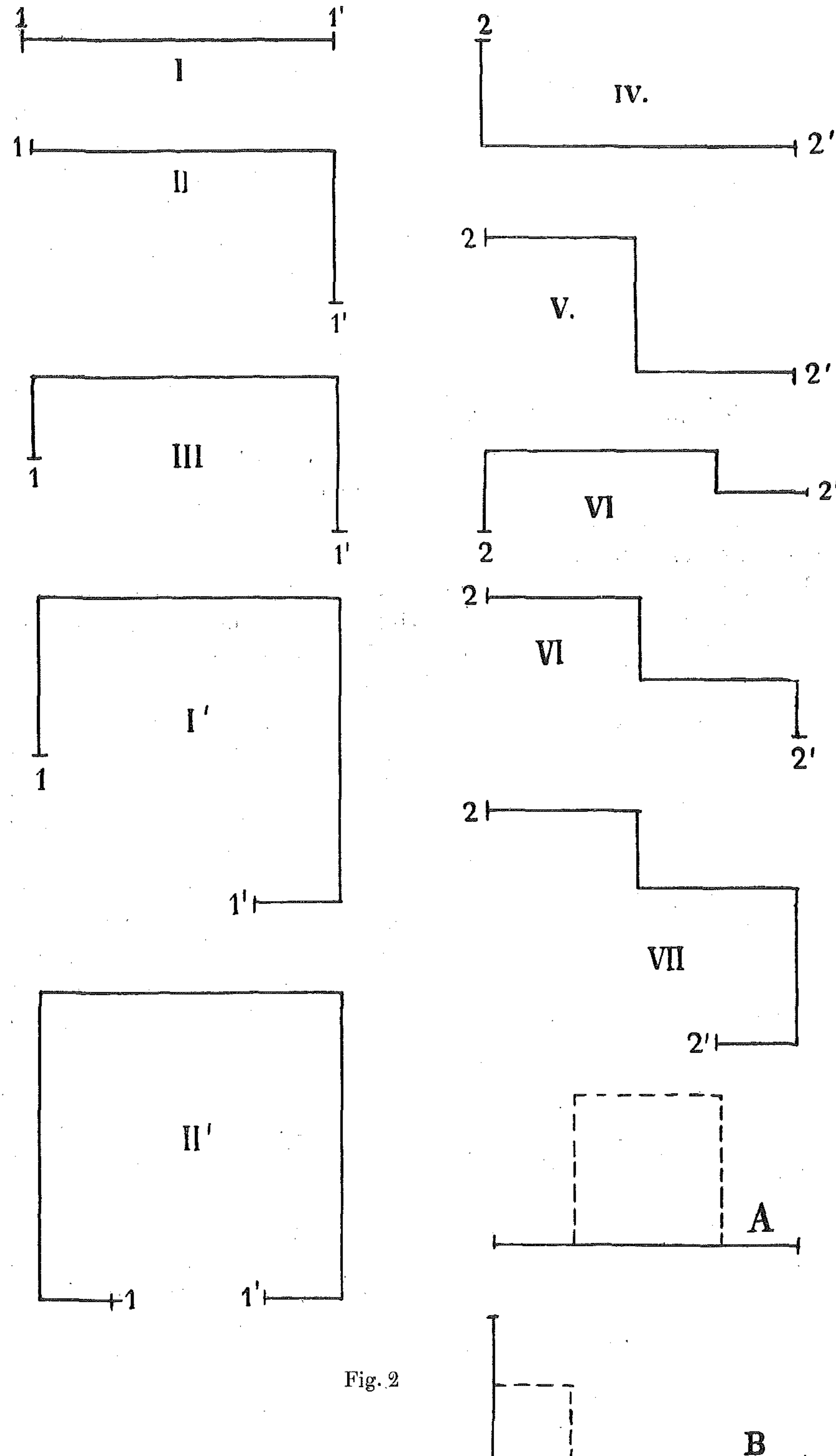

Fig. 2

Breiten mit a_1, a_2, $a_3 \ldots . a_i \ldots .$, so gehört das i^{te} freie Ende den Quadraten a_i und a_k an, wo $k < i$ ist.

Beim nächsten Schritt verlässt das freie Ende eines der Quadrate a_i und a_k und kann bei weiterer Dehnung nicht mehr zu ihm zurückkehren, denn nach den einleitenden Bemerkungen gehört der nach aussen grenzende Konturteil des verlassenen Quadrates entweder dem verdeckten oder dem gehemmten Randstück des bis dahin konstruierten Polygons an. Die weitere Dehnung kann aber auch nie zu dem zweiten nach Konstruktion stehengebliebenen freien Ende des Quadrates a_s zurückkehren, da sonst ein zweifach zusammenhängender Originalbereich und somit ein Fixpunkt im Innern vorhanden sein müsste (vergl. die einleitenden Bemerkungen).

Weiter muss aber das freie Ende nach einer endlichen Zahl von Schritten auch das andere der beiden Quadrate a_i und a_k verlassen. Nehmen wir etwa an, das freie Ende würde a_k nie verlassen. Dann hätten wir eine unendliche Folge von Quadraten a_{i+1}, $a_{i+2} \ldots .$, welche alle an a_k anliegen. Alle diese Quadrate würden einen Endpunkt eines freien Endes tragen, während der andere jeweils auf a_k liegt. Die Quadratseiten in der unendlichen Folge müssten dann gegen Null konvergieren und es würde sich so schliesslich ein freies Ende auf a_k ergeben, das „zwischen" den Endpunkten des bei der Dehnung von a_k entstandenen freien Endes liegen müsste.[1]) Anders ausgedrückt: wir hätten bei der Dehnung von a_k gar kein freies Ende benutzt.

Da nach unseren einleitenden Bemerkungen sich die Aufgabe vereinfacht, wenn nach einer endlichen Anzahl von Schritten der Rand erreicht wird (insofern dann nämlich eines der freien Enden ausscheidet), so lassen wir diesen Fall überhaupt ausser Betracht.

Bezeichnen wir nun als Breite eines freien Endes die Summe S seiner Komponenten, so gilt, wie man ohne weiteres ersieht, für irgend ein, etwa den Quadraten a_i und a_k anliegendes freies Ende

$$S < 4\,a_i + 4\,a_k \tag{1}$$

Da nun das Gebiet G als beschränkt vorausgesetzt ist, so muss die Summe der Flächeninhalte der Quadrate $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots . + a_k^2 + \ldots . + a_i^2 + \ldots .$ einer oberen Grenze zustreben. Von einem gewissen genügend grossen Index an müssen also die Quadrate beliebig klein werden. Da nun nach dem Obigen das freie Ende jedes Quadrat der Folge nach einer endlichen Anzahl von Schritten ver-

[1]) Natürlich könnte auf dem Rande des Quadrates a_k (also im Innern) auch ein Fixpunkt entstehen, was aber von vorneherein ausgeschlossen werden muss.

lassen muss, so heisst das, dass sowohl i und k beliebig gross werden und somit über den eben erwähnten Index hinausgebracht werden können. Nach Ungleichung (1) folgt aber daraus, dass jeder Grenzpunkt unserer Konstruktion ein Fixpunkt sein muss.

Da nun nach den Voraussetzungen des Satzes kein Fixpunkt im Innern vorhanden sein darf, so heisst das wiederum, dass die Grenzpunkte der Konstruktion auf dem Rande liegen.

Daraus folgt ohne weiteres, dass diejenige Linie, welche sich aus dem gehemmten Randstück des Originalbereichs entwickelt, eine im Innern des Gebietes einfache offene Linie sein muss und das gleiche gilt somit von ihrem Bilde, d. h. von derjenigen Linie, welche sich aus dem verdeckten Randstück des Bildbereichs entwickelt. Das zwischen diesen beiden Linien enthaltene Gebiet ist das gesuchte Translationsfeld.

Die Ergänzung zum Translationsfeld kann übrigens in jedem Stadium der Konstruktion ganz unabhängig von der erreichten Approximation erfolgen.

Da weiter von einem genügend grossen Index an sämtliche Quadrate klein sein müssen, so ergibt sich, dass die Menge der Grenzpunkte zwischen irgend zwei verschiedenen ihrer Punkte verkettet sein muss. Da sie aber ihrem Begriffe nach abgeschlossen ist, so heisst das:

Die Menge der Grenzpunkte der Konstruktion ist entweder ein Punkt oder ein Kontinuum.

Falls wir also von der Abbildung voraussetzen, dass die Menge ihrer Fixpunkte kein Kontinuum enthält, so darf unsere Konstruktion nur einen Grenzpunkt haben. Dann ist aber die aus dem gehemmten Randstück des Originalbereichs entstehende Linie ein gegen einen einzigen Punkt konvergierender Streckenzug. Das heisst also, die Feldränder sind einfache Bögen.

Es kann noch der spezielle Fall eintreten, dass die Konstruktion über das andere freie Ende des Quadrates a_1 genau zum selben Grenzpunkt führt. Dann handelt es sich um eine geschlossene Jordankurve.

Man kann nun die Voraussetzung der Beschränktheit fallen lassen, indem man durch ganz analoge Schlüsse nachweist, dass unsere Polygonkonstruktion nach einer endlichen Anzahl von Schritten jeden beschränkten ganz im Innern des vorausgesetzten Gebietes G enthaltenen Bereich verlassen muss. Es kann sich dann der Fall ereignen, dass die Konstruktion überhaupt keinen Grenzpunkt im Endlichen besitzt. Die Feldränder sind in diesem Falle einfache offene Linien in der Ebene.

Der an die Spitze gestellte Satz ist somit bewiesen.

Er enthält als speziellen Fall den ebenen Translationssatz von Brouwer. Die benutzte Polygonapproximation lässt sich bei vielen Fragen der Kontinuumstopologie mit Vorteil verwenden.