Vergleichung dreier Verfahren zur angenäherten Rektifikation von Kreisbogen.

Von

Dr. F. R. Scherrer (Küsnacht bei Zürich).

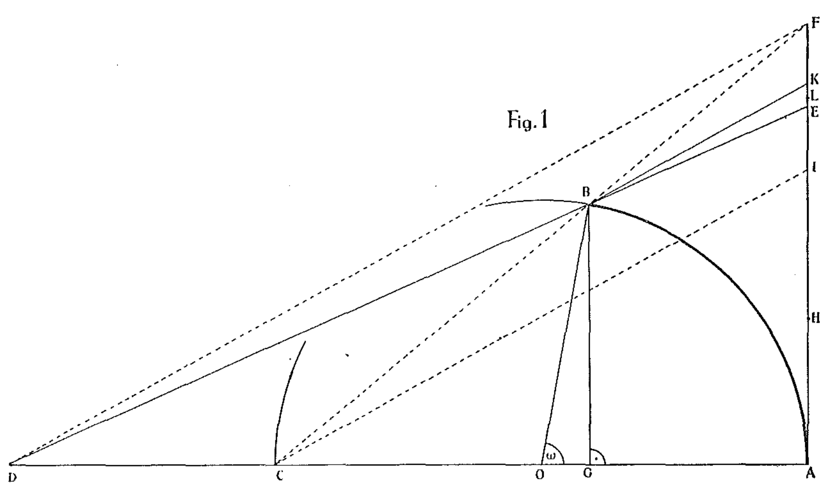
(Mit 2 Textfiguren.)

(Als Manuskript eingegangen am 15. Oktober 1929.)

Schon im Altertum beschäftigten sich Mathematiker mit dem Problem der Rektifikation eines Kreisbogens. Im Mittelalter gelangte der gelehrte deutsche Kardinal Nicolaus von Cusa (1401—1464), allerdings durch unrichtige Schlüsse, zu der Gleichung

$$\text{(1.)} \qquad \operatorname{arc} \omega \asymp \frac{3 \sin \omega}{2 + \cos \omega}, \text{*)}$$

die, ohne ihre Gültigkeit einwandfrei zu beweisen, der holländische Mathematiker Willibrord Snellius (1581—1626) benutzte, um den Kreisbogen A B (Fig. 1) mit dem Mittelpunkt O und dem Zentri-



winkel ω zu strecken. Indem er nämlich den Radius O A über den Mittelpunkt O hinaus um den Durchmesser verlängerte, den so er-

*) Das Zeichen $\asymp$ bedeutet „annähernd gleich".

haltenen Punkt D durch eine Gerade mit B verband und sie mit der Tangente in A schnitt, erhielt er den Punkt E, dessen Abstand von A bezogen auf den Bogenradius als Masseinheit die Masszahl $\frac{3 \sin \omega}{2 + \cos \omega}$ hat.

In seiner Abhandlung: „De circuli magnitudine inventa", deren Uebersetzung ins Deutsche wir FERDINAND RUDIO verdanken, hat CHRISTIAN HUYGENS (1629—1695) exakt bewiesen, dass die Strecke AE kürzer ist als der Kreisbogen AB [1]. Den Ueberschuss von diesem über jene stellte JOSEF WELLSTEIN [2] mit Hilfe der unendlichen Reihen für Sinus und Cosinus als Funktion von ω dar. Aus der Gleichung

$$\frac{3 \sin \omega}{2 + \cos \omega} = \frac{3\,\omega - \frac{\omega^3}{2} + \frac{\omega^5}{40} - \frac{\omega^7}{1680} + \frac{\omega^9}{120960} \cdots\cdots}{3 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{24} - \frac{\omega^6}{720} + \frac{\omega^8}{40320} \cdots\cdots}$$

wo ω das absolute Mass des Kreisbogens AB bedeutet, ergibt sich nämlich

$$(2.)\qquad \frac{3 \sin \omega}{2 + \cos \omega} = \omega - \frac{\omega^5}{180} - \frac{\omega^7}{1512} - \frac{19\,\omega^9}{544320} \cdots\cdots;$$

somit ist für kleine Werte von ω

$$(3.)\qquad \frac{3 \sin \omega}{2 + \cos \omega} - \omega \asymp - \frac{\omega^5}{180} \cdot \left(1 + \frac{5\,\omega^2}{42}\right).$$

Betrachtet man die Differenz

$$(4.)\qquad x = \frac{3 \sin \omega}{2 + \cos \omega} - \omega,$$

welche die Abweichung der Strecke AE von der Länge des Bogens AB darstellt, als Funktion von ω, so ergibt sich

$$(5.)\qquad \frac{dx}{d\omega} = -\left(\frac{1 - \cos \omega}{2 + \cos \omega}\right)^2;$$

folglich nimmt die Funktion x, die mit ω zugleich den Anfangswert Null hat, mit zunehmendem ω fortwährend ab. Dadurch, dass man den Kreisbogen AB durch die zu kleine Strecke AE ersetzt, wird

---

[1]) DR. F. RUDIO, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung, Leipzig, Teubner 1892, p. 116, Lehrsatz XIII.

[2]) HEINRICH WEBER und JOSEF WELLSTEIN, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, 2. Band, Leipzig, Teubner 1905, p. 275.

also der sich ergebende Defekt mit wachsendem Zentriwinkel immer grösser.

Schneidet man die Verbindungslinie des Gegenpunktes C von A und des Punktes B (Fig. 1) mit der in A berührenden Tangente im Punkte F und teilt hierauf AF durch die Punkte H und I in drei gleiche Teile, so schneidet die Parallele, die man durch B zu CI zieht, AF in einem Punkte K, von dem HUYGENS in der angeführten Abhandlung[3]) gezeigt hat, dass sein Abstand von A grösser ist als der Kreisbogen AB. Da $IK = \frac{GB}{3}$, so ist das Verhältnis von AK zum Radius gleich $\frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\sin\omega$. Entwickelt man $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ und $\sin\omega$ nach steigenden Potenzen von ω, so erhält man

$$\frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\sin\omega = \frac{4}{3}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega^3}{24} + \frac{\omega^5}{240} + \frac{17\,\omega^7}{40320} + \frac{31\,\omega^9}{725760} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\omega - \frac{\omega^3}{6} + \frac{\omega^5}{120} - \frac{\omega^7}{5040} + \frac{\omega^9}{362880} \cdots\cdots\right),$$

oder

$$\frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\sin\omega = \omega + \frac{\omega^5}{120} + \frac{\omega^7}{2016} + \frac{\omega^9}{17280} + \cdots\cdots. \tag{6.}$$

Demnach ist für kleine Werte von ω

$$\frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\sin\omega - \omega \asymp \frac{\omega^5}{120}\left(1 + \frac{5\,\omega^2}{84}\right). \tag{7.}$$

Betrachtet man den Ausdruck

$$y = \frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\sin\omega - \omega, \tag{8.}$$

welcher die Abweichung der Strecke AK von der Länge des Bogens AB darstellt, als Funktion von ω, so ergibt sich

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{(1-\cos\omega)^2}{3(1+\cos\omega)}; \tag{9.}$$

folglich nimmt die Funktion y, die mit ω den Anfangswert Null gemein hat, mit zunehmendem ω ebenfalls zu. Der Ueberschuss der Strecke AK über die Länge des Kreisbogens AB wird also mit wachsendem Zentriwinkel immer grösser.

Zufolge der Gleichungen (4.) und (8.) ist

[3]) L. c. p. 98, Lehrsatz VIII.

$$(10.)\quad 0{,}6\,x + 0{,}4\,y = 0{,}6\cdot\frac{3\sin\omega}{2+\cos\omega} + 0{,}4\left(\frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+\frac{1}{3}\sin\omega\right)-\omega,$$

daher nach (2.) und (6.)

$$0{,}6\,x + 0{,}4\,y = 0{,}6\left(\omega - \frac{\omega^5}{180} - \frac{\omega^7}{1512} - \frac{19\,\omega^9}{544320}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right)$$
$$+ 0{,}4\left(\omega + \frac{\omega^5}{120} + \frac{\omega^7}{2016} + \frac{\omega^9}{17280} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right) - \omega$$

oder

$$0{,}6\,x + 0{,}4\,y = -\frac{\omega^7}{5040} + \frac{\omega^9}{453600}\cdot\cdot\cdot\cdot,$$

mithin für kleine Werte von ω

$$(11.)\qquad 0{,}6\,x + 0{,}4\,y \asymp -\frac{\omega^7}{5040}\left(1-\frac{\omega^2}{90}\right).$$

Nach (5.) und (9.) ist

$$\frac{d\,(0{,}6\,x + 0{,}4\,y)}{d\,\omega} = -\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1-\cos\omega}{2+\cos\omega}\right)^2\cdot\frac{\cos\omega-\cos 2\,\omega}{1+\cos\omega}.$$

Die erste Derivierte der Funktion $0{,}6x + 0{,}4y$ geht demnach, wenn ω wachsend arc $120°$ überschreitet, von negativen Werten durch Null zu positiven Werten über. Die Funktion $0{,}6x + 0{,}4y$ selbst erlangt sonach bei $120°$ ihren kleinsten Wert, nämlich $-0{,}01593$, wächst hernach, nimmt bei arc $132°\,32'\,25''$ den Wert Null an und wird für arc $180°$ unendlich gross.

Teilt man in Fig. 1 die Strecke EK durch den Punkt L so, dass sich verhält EL : LK = 2 : 3, so wird

$$\mathrm{AL} = \frac{3\,\mathrm{AE} + 2\,\mathrm{AK}}{5},$$

somit nach (4.) und (8.)

$$\mathrm{AL}:\mathrm{OA} = \frac{3\,(x+\omega) + 2\,(y+\omega)}{5} = 0{,}6x + 0{,}4y + \omega,$$

also nach (11.)

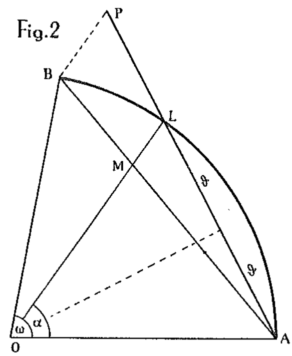
$$\mathrm{AL}:\mathrm{OA} \asymp \omega - \frac{\omega^7}{5040}\left(1-\frac{\omega^2}{90}\right);$$

die Länge der Strecke AL weicht daher, wenn ω den Wert 1 nicht übersteigt, sehr wenig von der des Kreisbogens AB ab. Da CI zu DF parallel ist, so erhält man den zur Konstruktion des Punktes L nötigen

Punkt K auch ohne Drittelung von AF, indem man durch B eine Parallele zu DF zieht.

Den im Jahre 1907 erschienenen 7. Band der 4. Serie der Nouvelles Annales de Mathématiques eröffnet der nachmalige Professor an der Ecole Polytechnique in Paris M. D'OCAGNE mit einer Abhandlung betitelt: „Sur la rectification approchée des arcs de cercle“, Der Verfasser nimmt zunächst auf der Sehne AB (Fig. 2)

Fig. 2



eines Kreisbogens mit dem Mittelpunkt O einen Punkt M an, zieht den durch M gehenden Radius OL, bezeichnet das Verhältnis von AM zur Sehne AB mit m, ferner bezogen auf den Kreisradius als Längeneinheit den Kreisbogen AB mit ω und die Hälfte der Sehne AL mit ϑ. Für $m\omega$ leitet er alsdann die unendliche Reihe ab

$$m\omega = 2\vartheta + \frac{9m^2 - 12m + 4}{3m^2}\cdot\vartheta^3 + \frac{115m^4 - 360m^3 + 440m^2 - 240m + 48}{20m^4}\cdot\vartheta^5 + \cdots\cdots,$$

woraus sich für

$$\delta = 2\vartheta - m\omega$$

ergibt

$$\delta = -\frac{9m^2 - 12m + 4}{3m^2}\vartheta^3 - \frac{115m^4 - 360m^3 + 440m^2 - 240m + 48}{20m^4}\vartheta^5 \ldots$$

Indem D'OCAGNE $m = \frac{2}{3}$ wählt, erreicht er, dass δ nur noch von der fünften Potenz und den höheren Potenzen von ϑ abhängt. Es wird

$$\delta = +\frac{\vartheta^5}{10} + \cdots\cdots$$

und

$$\frac{2}{3}\omega = 2\vartheta + \frac{\vartheta^5}{10} + \cdots\cdots;$$

folglich weicht bei kleinen Werten von ω $\frac{2}{3}\omega$ sehr wenig von 2ϑ ab. Zieht man also, nachdem $AM = \frac{2}{3}$ chord AB gemacht worden ist, durch B eine Parallele zu OM und schneidet sie mit AL im Punkt P, so ist AP angenähert gleich der Länge des Kreisbogens AB.

Um den relativen Fehler

$$\varepsilon = \frac{AP - \operatorname{arc} AB}{\operatorname{arc} AB}$$

seiner Kreisbogenstreckung zu bestimmen, entnimmt D'OCAGNE der Fig. 2 für den Winkel AOL, den er mit α bezeichnet, die Gleichungen

$$AP : OA = 3\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{12.}$$

$$\sin(\omega - \alpha) = \frac{1}{2}\sin\alpha. \tag{13.}$$

Aus der letzteren folgt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\omega}{\frac{1}{2} + \cos\omega} = \frac{\sin\omega}{2\cos\frac{\omega + 60^\circ}{2}\cos\frac{\omega - 60^\circ}{2}}. \tag{14.}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (14.) und (12.) berechnet er für spitze Winkel ω, die ganze Vielfache von 10° sind, den relativen Fehler ε aus.

Um die Genauigkeit dieser Kreisbogenstreckung mit derjenigen der untersuchten Konstruktionen vergleichen zu können, soll das Verhältnis von AP : OA als Funktion von ω dargestellt werden. Nach (13.) ist

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \frac{\sin^2\omega}{\left(\frac{1}{2} + \cos\omega\right)^2}}} = \frac{\frac{1}{2} + \cos\omega}{+\sqrt{\frac{5}{4} + \cos\omega}}.$$

Der Winkel α wird nämlich stumpf, also $\cos\alpha$ negativ, wenn ω 120° überschreitet. Somit gilt die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{1 + 2\cos\omega}{+\sqrt{5 + 4\cos\omega}} \tag{15.}$$

für jeden konkaven Winkel ω und es ergibt sich daraus

$$3\sin\frac{\alpha}{2} = 3\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 + 2\cos\omega}{\sqrt{5 + 4\cos\omega}}\right)}$$

oder

$$3 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{2 - \frac{2 + 4 \cos \omega}{\sqrt{5 + 4 \cos \omega}}}. \tag{16.}$$

Entwickelt man $\cos \omega$ nach steigenden Potenzen von ω, so erhält man

$$2 + 4 \cos \omega = 6 - 2\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} - \frac{\omega^6}{180} + \frac{\omega^8}{10080} - \frac{\omega^{10}}{907200} + \cdots,$$

$$5 + 4 \cos \omega = 9 - 2\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} - \frac{\omega^6}{180} + \frac{\omega^8}{10080} - \frac{\omega^{10}}{907200} + \cdots$$

und durch Radizierung der rechten Seite der letzten Gleichung mit 2:

$$\sqrt{5 + 4 \cos \omega} = 3 - \frac{\omega^2}{3} + \frac{\omega^4}{108} + \frac{\omega^6}{9720} + \frac{67\omega^8}{4898880} + \frac{449\omega^{10}}{440899200} + \cdots.$$

Indem man die für $2 + 4 \cos \omega$ und $\sqrt{5 + 4 \cos \omega}$ erhaltenen unendlichen Reihen durcheinander dividiert, gelangt man zu der Gleichung

$$\frac{2 + 4 \cos \omega}{\sqrt{5 + 4 \cos \omega}} = 2 - \frac{4\omega^2}{9} - \frac{2\omega^6}{3645} - \frac{\omega^8}{45927} + \frac{\omega^{10}}{1312200} \cdots,$$

aus der folgt

$$2 - \frac{2 + 4 \cos \omega}{\sqrt{5 + 4 \cos \omega}} = \frac{4\omega^2}{9} + \frac{2\omega^6}{3645} + \frac{\omega^8}{45927} - \frac{\omega^{10}}{1312200} \cdots$$

und

$$\sqrt{2 - \frac{2 + 4 \cos \omega}{\sqrt{5 + 4 \cos \omega}}} = \frac{2\omega}{3} + \frac{\omega^5}{2430} + \frac{\omega^7}{61236} - \frac{11\omega^9}{15746400} \cdots;$$

daher nach (16.)

$$3 \sin \frac{\alpha}{2} = \omega + \frac{\omega^5}{1620} + \frac{\omega^7}{40824} - \frac{11\omega^9}{10497600} \cdots$$

und somit für kleine Werte von ω

$$3 \sin \frac{\alpha}{2} - \omega \asymp \frac{\omega^5}{1620}\left(1 + \frac{5\omega^2}{126}\right). \tag{17.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Ueberschuss der Strecke AP (Fig. 2) über die Länge des Kreisbogens AB, gemessen mit dem seinem Radius als Längeneinheit, dar. Die Vergleichung der rechten Seiten der Gleichungen (3.) und (17.) zeigt, dass die Kreisbogenstreckung nach D'OCAGNE ein etwa neunmal genaueres Resultat liefert als die HUYGENSsche.

Um die Abhängigkeit des Ueberschusses der Strecke AP über die Länge des Bogens AB vom Zentriwinkel AOB noch genauer zu verfolgen, möge

$$z = 3 \sin \frac{\alpha}{2} - \omega \tag{18.}$$

gesetzt werden. Es ist dann

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{d\, 3 \sin \frac{\alpha}{2}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\omega} - 1,$$

ferner nach Gl. (13.)

$$2 \cos (\omega - \alpha)(d\omega - d\alpha) = \cos\alpha \, d\alpha$$

und, weil, wie Fig. 2 zeigt, $\omega - \alpha$ stets spitz ist,

$$2 \cos (\omega - \alpha) = + \sqrt{3 + \cos^2 \alpha};$$

daher

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{\sqrt{3 + \cos^2\alpha}}{\cos\alpha + \sqrt{3 + \cos^2\alpha}}$$

und

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{3}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3 + \cos^2\alpha}}{\cos\alpha + \sqrt{3 + \cos^2\alpha}} - 1. \tag{19.}$$

Soll z ein Extremum werden, so muss für $\cos\alpha$, den wir mit a bezeichnen, die Gleichung bestehen:

$$\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a)} \cdot \sqrt{3 + a^2} = a + \sqrt{3 + a^2},$$

die nach Beseitigung der Wurzelausdrücke die Form annimmt

$$9a^6 + 14a^5 + 31a^4 - 36a^3 - 9a^2 + 18a + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Doppelwurzel $+1$; ihre übrigen Wurzeln genügen der Gleichung

$$9a^4 + 4a^3 + 30a^2 + 20a + 1 = 0,$$

die durch keine positiven Werte von a, dagegen durch die beiden zwischen 0 und -1 liegenden Zahlen

$$a_1 = -0{,}0546934 \text{ und } a_2 = -0{,}5946782$$

befriedigt wird, von denen jedoch die erste keine Wurzel der für a aufgestellten ursprünglichen Gleichung ist. $\frac{dz}{d\omega}$ ist nach (17.) für kleine Werte von ω positiv, verschwindet für $\cos\alpha = a_2$ und nimmt nach (15.) und (19.) für $\omega = \pi$ den Wert -1 an; somit erreicht z für $\cos\alpha = a_2$, oder wenn ω in Gradmass $150^\circ\, 11^1/_2{}'$ misst, sein Maximum, nämlich den Betrag 0,05747. Die Funktion z, die für $\omega = 150^\circ\, 11^1/_2{}'$ positiv und für $\omega = 180^\circ$ negativ, nämlich gleich $3 - \pi$ ist, verschwindet für $\omega = 168^\circ\, 39'$. Das diesen Wert enthaltende Intervall, worin der absolute Wert von z kleiner bleibt als $\frac{1}{500}$, ist aber so klein, dass es sich kaum konstruktiv ausnützen lässt.

Für drei der behandelten Kreisbogenstreckungen sind in der folgenden Tabelle für von 10 zu 10 Grad fortschreitende Zentriwinkel die Abweichungen der konstruierten Strecken von der Bogenlänge bezogen auf den Kreisradius als Masseinheit auf fünf Dezimalstellen genau gemäss den Gleichungen (4.), (10.) und (18.) zusammengestellt und mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen, je nachdem die konstruierte Strecke grösser oder kleiner ist als der betreffende Kreisbogen.

ω	I. x	II. $0{,}6\,x + 0{,}4\,y$	III. z
10°	— 0,00000	— 0,00000	+ 0,00000
20°	— 0,00004	— 0,00000	+ 0,00000
30°	— 0,00023	— 0,00000	+ 0,00002
40°	— 0,00097	— 0,00001	+ 0,00010
50°	— 0,00308	— 0,00008	+ 0,00032
60°	— 0,00796	— 0,00026	+ 0,00081
70°	— 0,01804	— 0,00078	+ 0,00178
80°	— 0,03705	— 0,00196	+ 0,00351
90°	— 0,07080	— 0,00413	+ 0,00638
100°	— 0,13747	— 0,00782	+ 0,01091
110°		— 0,01281	+ 0,01777
120°		— 0,01593	+ 0,02693
130°		— 0,00719	+ 0,03855
140°		+ 0,04521	+ 0,05072
150°		+ 0,23277	+ 0,05747
160°			+ 0,04508
170°			— 0,01142
180°			— 0,14159

Von diesen drei Konstruktionen ist die erste (A E in Fig. 1), die als HUYGENSsche Konstruktion bezeichnet wird, die einfachste, und die zweite (A L in Fig. 1) die theoretisch genaueste, aber auch die komplizierteste. Man wird diese daher nur auf Kreisbogen mit grossen Radien anwenden. Die dritte, d. h. die Konstruktion von D'OCAGNE (A P in

Fig. 2) hat mit der ersten im Gegensatz zur zweiten den grossen Vorzug gemein, dass sie auch rückwärts, d. h. zur Arkufikation, verwendet werden kann. Indem man die behandelten Verfahren mit der Halbkreisstreckung von KOCHANSKY kombiniert, deren Abweichung nur — 0,00006 beträgt, kann man jeden Kreisbogen mit der Genauigkeit strecken, die sich bei geometrischen Konstruktionen überhaupt erreichen lässt.