MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

№ 29. 1848.

Prof. Raabe, über singuläre Integralauflösungen einer Differenzialgleichung erster Ordnung zweier Variabeln.

(Mitgetheilt am 13. November.)

Im 31. Cahier des Journal de l'École polytechnique theilt H. Catalan eine Note über die Ermittelung singulärer Integralauflösungen mit, die ich zum Gegenstande vorliegender Mittheilung mache.

1. Wenn eine endliche Gleichung zwischen zwei Variabeln x, y und einer allgemeinen Constante a in folgender Form gegeben ist:

$$F(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

in der F ein beliebiges Functionszeichen vorstellt; wenn die dieser entsprechende Differenzialgleichung erster Ordnung, die nicht mehr a enthält, durch:

$$F'(x, y, y_1) = 0 \tag{2}$$

vorgestellt wird, wo F' ein neues Functionszeichen und $y_1 = \frac{dy}{dx}$ ist: so sind nicht nur alle durch specielle und constante Verfügungen über a aus (1) hervorgehenden Gleichungen Integralauflösungen (particuläre) dieser Differenzialgleichung in (2), sondern sämmtliche Eliminationsergebnisse von a, die Verbindungen von (1) mit folgender:

$$\frac{dF(x, y, a)}{da} = 0, \qquad (3)$$

wie auch mit folgender:

$$\frac{dF(x, y, a)}{dy} = \frac{1}{0} \qquad (4)$$

herbeiführen, bieten ebenfalls Integralauflösungen dar. Diese werden nach Lagrange „singuläre“ Integralauflösungen genannt, falls sie nicht auch durch constante Verfügungen über a aus (1) zu ziehen sind.

Auf dieses Ergebniss gelangen die meisten Schriftsteller, die sich mit diesem Gegenstande seit Lagrange beschäftigt haben, welches auch ich im dritten Bande meiner Differenzial- und Integralrechnung (Nr. 595) mitgetheilt habe.

2. Der Zweck der am Eingange citirten Note des H. Catalan geht nun dahin zu zeigen, dass es sein richtiges Bewenden mit dem Eliminationsergebnisse von a aus den Gleichungen (1) und (3), nicht aber im Allgemeinen mit dem haben kann, so aus den Gleichungen (1) und (4) gleichfalls durch Elimination von a gezogen wird. Zu diesem Behufe wird ein besonderer Fall durch die Gleichung:

$$x + a - \sqrt{3a\,(2y - a)} = 0$$

mitgetheilt, aus der folgende analoge zu (4):

$$\frac{-3a}{\sqrt{3a\,(2y - a)}} = \frac{1}{0}$$

gezogen wird, die $a = 2y$ darbietet. Führt man diese Bestimmung von a in die vorgelegte Gleichung ein, wodurch das Ergebniss der Elimination von a folgendermassen sich darstellt:

$$x + 2y = 0,$$

so thut diese der betreffenden Differentialgleichung erster Ordnung:

$$3xy_1^2 - 6\,y\,y_1 + x + 2\,y = 0$$

weder als singuläre noch als particuläre Integralauflösung ein Genüge, und ist dem gegenwärtig in Rede stehenden Falle ganz fremd.

3. So richtig die vorausgeschickte Bemerkung H. Catalan's betreffend das Eliminationsergebniss von a aus den Gleichungen (1) und (4) ist, erschöpft solche den gegenwärtig in Rede stehenden Gegenstand nicht ganz, indem auch ein Eliminationsergebniss von a aus den Gleichungen (1) und (3) Relationen unter den Variabeln bisweilen herbeiführen kann, die ebenfalls weder singulärer noch particulärer Beschaffenheit, und folglich dem fraglichen Falle gleichfalls ganz fremd sind.

Man überzeugt sich nämlich sehr bald, dass folgende Gleichung:

$$a(x - y) + \sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 - x^2} = 0$$

in der Beziehung einer vollständigen Integralgleichung zu der Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{y_1}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

steht. Stellt man nun die der erstern entsprechende, analoge zu (3) her, so gelangt man auf:

$$x - y = 0,$$

welche Relation zwischen den Variabeln x und y der vorhergehenden Differenzialgleichung nicht genügt, und folglich derselben ebenfalls fremd ist.

4. Die Unzuverlässigkeit der in Nr. 1 mitgetheilten Vorschriften aus einer Gleichung wie (1) singuläre Integralauflösungen abzuleiten, ist nunmehr eine unzweideutige Thatsache; anderseits bieten dieselben Vorschriften in den meisten Fällen ganz brauchbare Resultate dar, so dass die mitgetheilten zwei Fälle mehr als Ausnahmen denn als Regel angesehen werden dürfen: daher theile ich im Folgenden die Quelle dieser erwähnten Vorschriften

mit, woraus sowohl genügende Erklärung für die Ausnahmsfälle, wie eine neue Fassung der alsdann zu befolgenden Vorschriften hervorgehen wird.

Wie schon seit Lagrange bekannt, und wie auch aus Nr. 594 meines oben citirten Werkes ganz unzweideutig hervorgeht, zieht man aus einer Gleichung zwischen zwei Variabeln x, y und einer allgemeinen Constante a, der Form:

$$y = f(x, a), \qquad (1')$$

die ihr entsprechenden singulären Integralauflösungen, wenn man diese Gleichung (1′) mit der aus ihr gefolgerten:

$$\frac{dy}{da} = 0 \qquad (5)$$

durch Elimination von a verbindet. Die so gewonnenen Ergebnisse werden beim Statthaben dieser Gleichung (5) immer den Charakter von Integralauflösungen beibehalten, d. h. der aus (1′) gezogenen Differenzialgleichung erster Ordnung genügen; dieselben sind jedoch nur dann singulärer Beschaffenheit, wenn sie durch keine constante Verfügungen über a aus (1′) zu gewinnen sind.

Wenn nun der endliche Zusammenhang der Variabeln x, y mit der allgemeinen Constante a nicht unter der Form (1′), sondern durch eine Gleichung wie (1) aus Nr. 1 gegeben ist; dann hat man dem Vorausgeschickten zufolge auch aus dieser den partiellen Differenzialquotienten $\frac{dy}{da}$ herzustellen, denselben gleich Null zu setzen, und die dadurch erhaltene Gleichung mit der vorgelegten in (1) durch Elimination von a zu verbinden. — Besagter Differenzialquotient ist nunmehr durch die Gleichung:

$$\frac{dy}{da} = -\frac{\frac{dF(x, y, a)}{da}}{\frac{dF(x, y, a)}{dy}} \qquad (6)$$

gegeben; daher hat man nur solche Relationen zwischen x, y und a mit Gleichung (1) behufs Elimination von a zu verbinden, die den unter gebrochener Form erscheinenden Ausdruck rechterhand dieser Gleichung (6) auf Null bringen. In den meisten Fällen wird dieses nach den in Nr. 1 mitgetheilten Vorschriften erreicht, d. h. wenn der Zähler des eben erwähnten Ausdruckes gleich 0 [die Gleichung (3)], wie auch der Nenner desselben Ausdruckes gleich $\frac{1}{0}$ [die Gleichung (4)] gesetzt, und jedes dieser Ergebnisse mit Gleichung (1) durch Elimination von a verbunden wird. Weil aber durch das Nullwerden des Zählers oder das Unendlichgrosswerden des Nenners eines Bruches derselbe nicht immer den Nullwerth annimmt, welche Anforderung dem Vorausgeschickten zufolge unerlässlich ist; so bietet die Anwendung der Vorschriften in Nr. 1 bisweilen auch Ausnahmsfälle dar, d. h. bei Befolgung dieser Vorschriften gelangt man bisweilen auf Relationen, die den Werth von $\frac{dy}{da}$ nicht gleich Null machen, welche aus eben diesem Grunde dem fraglichen Falle fremd und folglich zu verwerfen sind. Zugleich ersieht man aber auch die allgemeine Vorschrift, welche keines Ausnahmsfalles mehr fähig ist, und die nunmehr, wie folgt, lautet: »Aus der Gleichung (1) stelle »man den Ausdruck rechterhand in Gleichung (6) her, »und verbinde jene durch Elimination von a mit jeder Re»lation, die diesen als Nullwerth herausstellt; die so ge»wonnenen Relationen unter den Variabeln sind ent»schieden Integralauflösungen der betreffenden Differen»zialgleichung erster Ordnung, und zwar sind sie singu-

»lärer Natur, wenn sie durch keine constanten Verfü-
»gungen über a aus (1) zu ziehen sind.*)«

Dass es mit der unmittelbar vorher aufgestellten Erklärung der Ausnahmsfälle sein richtiges Bewenden habe, zeige ich im Folgenden noch näher nach.

5. Wird, erstens, der besondere Fall des **H.** Catalan vorgelegt, nämlich die Gleichung:

$$x + a - \sqrt{3a\,(2y - a)} = 0,$$

wo der Ausdruck linkerhand die Function $F(x, y, a)$ aus Gleichung (1) repräsentirt, und wo man:

$$\frac{dF\,(x, y, a)}{da} = 1 - \frac{3\,(y - a)}{\sqrt{3a\,(2y - a)}},$$

$$\frac{dF\,(x, y, a)}{dy} = -\frac{3a}{\sqrt{3a\,(2y - a)}}$$

hat, so bietet die Relation, welche den Nenner des Ausdruckes rechterhand in Gleichung (6) vorangehender Nr. unendlichgross werdend macht, die Gleichung $2y - a = 0$ dar; diese Relation stellt aber auch den Zähler unendlichgross werdend heraus; sonach erscheint der Werth des partiellen Differenzialquotienten $\frac{dy}{da}$ vorläufig unter der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$, d. h. man hat:

---

*) Da man auch x als die relative Variable in Gleichung (1) ansehen kann, falls y als die absolute erklärt wird; so ist eine coordinirte Regel zu der oben mitgetheilten auch folgende: Aus Gleichung (1) stelle man den Ausdruck

$$\frac{dF(x, y, a)}{da} : \frac{dF(x, y, a)}{dx}$$

her, und verbinde jene durch Elimination von a mit jeder Relation die diesen Quotienten als Nullwerth darbietet; u. s. w.

$$\frac{dy}{da} = -\frac{1 - \frac{3(y-a)}{\sqrt{3a(2y-a)}}}{\frac{3a}{\sqrt{3a(2y-a)}}} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ bei } 2y - a = 0;$$

multiplizirt man hier Zähler und Nenner mit $\sqrt{3a(2y-a)}$, wodurch:

$$\frac{dy}{da} = -\frac{1}{3a}\left[\sqrt{3a(2y-a)} - 3(y-a)\right]$$

erhalten wird, so stellt sich bei derselben Relation $2y - a = 0$ die offenbar von Null verschiedene Bestimmung $\frac{dy}{da} = -\frac{1}{2}$ dar; — folglich ist das durch Verbindung der Gleichung $2y - a = 0$ mit der vorgelegten sich herausstellende Eliminationsergebniss von a, nämlich die Gleichung:

$$x + 2y = 0,$$

weder eine singuläre noch particuläre Integralauflösung, sondern eine dem vorliegenden Gegenstande fremde Relation.

Hingegen werden singuläre Integralauflösungen gewonnen, wenn man sämmtliche Relationen, die $\frac{dy}{da} = 0$ herausstellen, die nämlich in der Gleichung:

$$\sqrt{3a(2y-a)} - 3(y-a) = 0 \text{ *)}$$

enthalten sind, mit der vorgelegten durch Elimination von a verbindet. Dieses, mit Umgehung der fremdartigen Auflösungen, welche Quadrirungen behufs Wegschaffung von Wurzelgrössen gewöhnlich herbeiführen, zu zeigen, addire ich die zuletzt aufgestellte Gleichung zur vorgelegten und finde:

$$x + a - 3(y-a) = 0, \text{ oder } a = \frac{1}{4}(3y - x);$$

---

*) Die Relationen, die im vorliegenden Falle $\frac{dx}{da} = 0$ herausstellen, führen auf dieselbe Gleichung.

führt man diese Bestimmung von a in je eine der so eben addirten zwei Gleichungen ein, so ergiebt sich:

$$3(x + y) - \sqrt{3(3y - x)(5y + x)},$$

oder:

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = 0,$$

aus der die Gleichungen:

$$y - x = 0 \text{ und } 3y + x = 0$$

gezogen werden, welche auch H. Catalan als die singulären Integralauflösungen der hier in Rede stehenden Differenzialgleichung erster Ordnung erkannt hat.

Nimmt man, zweitens, den von mir in Nr. 3 vorgelegten besondern Fall vor, nämlich die Gleichung:

$$a(x - y) + \sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 - x^2} = 0,$$

wo der Ausdruck linkerhand die Function $F(x, y, a)$ der Gleichung (1) repräsentirt, und wo man demnach:

$$\frac{dF(x, y, a)}{da} = x - y, \quad \frac{dF(x, y, a)}{dy} = -a - \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}},$$

hat, so bietet sich $x - y = 0$ oder $x = y$ als die Relation dar, welche den Zähler des allgemeinen Ausdruckes in Gleichung (6) auf Null bringt. Es stellt aber auch dieselbe Beziehung zwischen y und x den Nenner besagten Ausdruckes als Nullwerth dar. Denn aus der vorgelegten Gleichung erhält man:

$$a = \frac{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}}{x - y};$$

für die Annahme $x = y$ ergiebt sich nach bekannten Vorschriften:

$$a = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} \text{ oder } a + \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = 0,$$

woraus augenfällig, wie behauptet ward, auch $\frac{dF(x, y, a)}{dy} = 0$ erkannt wird. Dieses vorgesetzt, erhält man;

$$\frac{dy}{da} = -\frac{x - y}{a + \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}} = \frac{0}{0}, \text{ bei } x = y,$$

wo also noch zu zeigen erübriget, dass bei derselben Relation $x = y$ der Werth von $\frac{dy}{da}$ verschieden von Null ausfällt. Ersetzt man hier rechterhand a der vorgelegten Gleichung gemäss, so ergibt sich:

$$\frac{dy}{da} = -\frac{(x - y)^2}{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2} + \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}(x - y)};$$

weil der Ausdruck rechterhand in $\frac{0}{0}$ für $x = y$ übergeht, so differenzire man Zähler und Nenner rechterhand nach x, wodurch:

$$\left(\frac{dy}{da}\right)_{(x = y)} = \frac{2(x - y)}{\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}}$$

erhalten wird, und wo abermals der Ausdruck rechterhand in $\frac{0}{0}$ bei $x = y$ übergeht; differenzirt man abermals Zähler und Nenner nach x, so ergiebt sich zuletzt:

$$\left(\frac{dy}{da}\right)_{(x = y)} = \frac{2}{\frac{1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}} = 2(1 - y^2)\sqrt{1 - y^2},$$

welche Bestimmung, wie behauptet worden, von Null verschieden ist; — daher ist auch die Relation $y = x$ keinerlei Integralauflösung der gegenwärtig in Rede stehenden Differenzialgleichung erster Ordnung.

Wird hingegen die obige Bestimmungsgleichung für $\frac{dy}{da}$ folgendermassen gestellt:

$$\frac{dy}{da} = -\frac{(x - y)\sqrt{1 - y^2}}{a\sqrt{1 - y^2} + y},$$

so überzeugt man sich sehr bald vom Nullwerden des Differenzialquotienten $\frac{dy}{da}$ bei der Annahme $y^2 = 1$; und weil diese nur einen variabeln Werth für a darbietet: so stellt auch die Gleichung $y^2 = 1$ eine singuläre Integralauflösung der in Rede stehenden Differenzialgleichung erster Ordnung vor. Stellt man noch die Werthform für $\frac{dx}{da}$ her, so überzeugt man sich in ähnlicher Weise, dass auch $x^2 = 1$ eine singuläre Integralauflösung im vorliegenden Falle vorstellt.

Anmerkung. Der in Nr. 3 gewählte besondere Fall, mit welchem ich mich auch im zweiten Theile der vorangehenden Nr. beschäftiget habe, bietet für $\frac{dF(x, y, a)}{da}$ den von der allgemeinen Constante a unabhängigen Ausdruck $x - y$ dar. Es spricht sich aber H. Catalan in der erwähnten Note dahin aus, dass nur insofern $\frac{dF(x, y, a)}{da}$ keinen von a independenten Ausdruck darbietet, die durch Elimination von a aus den Gleichungen (1) und (3) hervorgehenden Resultate richtig (exacts) sein werden; und weil, wie schon gesagt, der von mir gebrauchte Fall in der That kein a implicirt; so erscheint die, diesem hochgeschätzten Geometer gegenüber, Eingangs Nr. 3, hingestellte Aeusserung nicht ganz gerechtfertiget. Hierauf ist aber zu entgegnen, dass H. Catalan die erwähnte Behauptung unbegründet gelassen hat; und dass solche auch nicht zu begründen möglich sei, führe ich zum Beschlusse einen besondern Fall vor. Wenn die Gleichung:

$$(a - x + y)^3 - 3(x + y)(a - x + y)^2 + 1 = 0 \qquad (\alpha)$$

vorgelegt ist, wo der Ausdruck linkerhand die Function $F(x, y, a)$ repräsentirt und woraus:

$$\frac{dF(x, y, a)}{da} = 3(a - x + y)(a - 3x - y) \qquad (\beta)$$

gezogen wird; so enthält der Ausdruck rechterhand augenfällig die allgemeine Constante a. Dieser nimmt den Nullwerth auch bei der Annahme:

$$a - x + y = 0$$

an; und wenn diese in die vorgelegte Gleichung eingeführt wird, gelangt man auf das absurde Ergebniss $1 = 0$. Der Grund hievon liegt darin, dass auch die Differenzialquotienten von $F(x, y, a)$ nach x sowohl als nach y denselben Factor $a - x + y$ mitführen. Man hat nämlich:

$$\frac{dF(x, y, a)}{dx} = -6(a - x + y)(a - 2x),$$

$$\frac{dF(x, y, a)}{dy} = -6(a - x + y)(x + y),$$

so dass nach Nr. 4

$$\frac{dy}{da} = \frac{3(a - x + y)(a - 3x - y)}{6(a - x + y)(x + y)},$$

$$\frac{dx}{da} = \frac{3(a - x + y)(a - 3x - y)}{6(a - x + y)(a - 2x)}$$

erhalten wird, wo also bei der erwähnten Annahme $a - x + y = 0$ weder $\frac{dy}{da}$ noch $\frac{dx}{da}$ der Null gleich wird. Scheidet man den gemeinsamen Factor aus Zähler und Nenner dieser Brüche aus, wodurch sich

$$\frac{dy}{da} = \frac{a - 3x - y}{2(x + y)}, \quad \frac{dx}{da} = \frac{a - 3x - y}{a - 2x}$$

ergiebt; so erkennt man, dass der zweite Factor in obiger Gleichung (β) gleich Null gesetzt, oder die Gleichung $a - 3x - y = 0$, die Differenzialquotienten $\frac{dy}{da}$ und $\frac{dx}{da}$ als Nullwerthe herausstellt; — daher auch die vorgelegte Gleichung (α) bei Einführung dieser letztern Relation zwischen x, y und a eine Integralauflösung herbeiführt, nämlich die Gleichung:

$$4(x + y)^3 - 1 = 0,$$

von der man sich bald überzeugt, dass sie zur Klasse der singulären Auflösungen gehört.

Prof. Raabe, über einen Hülfssatz zur Ausmittelung der Werthe bestimmter Integrale.

(Mitgetheilt den 13. November.)

In den Comptes rendus vom 16. Oct. l. J. theilt H. Cauchy in einer Note folgenden Satz mit.

»Das Integral $\int_0^\infty e^{pi} f(re^{pi})\,dr$, wo f ein Functions- »zeichen und i die imaginäre Einheit ist, ändert den »Werth nicht, während das Argument p der imaginären »Variable $z = re^{pi}$ alle Werthe durchläuft, innerhalb wel- »cher die Function f(z) endlich und continuirlich verbleibt; »überdiess muss diese Function der Art sein, dass das »Produkt zf(z) bei $r = 0$ wie bei $r = \infty$ den Nullwerth »darbietet.«

Dieser Satz leuchtet unmittelbar ein, wenn statt der imaginären e^{pi} eine reelle, positive Constante a gesetzt wird. Wenn nämlich das bestimmte Integral $\int_0^\infty f(r)\,dr$ den Anforderungen einer mathematischen Grösse nach den Nrn. 105 und 106 meiner Integralrechnung entspricht, gelangt man beim Uebergange von r in ar auf die Gleichheit:

$$\int_0^\infty af(ar)\,dr = \int_0^\infty f(r)\,dr,$$

wo die positiv gedachte, reelle Grösse a willkürlich ist. Erklärt man aber a als imaginär, der Form e^{pi}, d. h. ersetzt in demselben bestimmten Integrale r durch re^{pi}, so leuchtet zwar 0 als unterer, nicht aber ∞ als oberer Grenzwerth des umgebildeten besimmten Integrals ein; — hierin besteht das eigentliche Wesen des obigen Satzes, dessen Begründung und Brauchbarkeit in der Theorie bestimmter Integrale die vorliegende Mittheilung zeigen wird.

1. Bei Feststellung der Gleichung:

$$y = \int_0^\infty af(ar)\,dr,$$

sei die allgemeine reelle oder imaginäre Constante a der Art gedacht, dass die Function f(ar) für keinen innerhalb 0 und ∞ fallenden Werth von r unendlichgross wird.

Zieht man hieraus den Differenzialquotienten von y nach a, so ist:

$$\frac{dy}{da} = \int_0^\infty f(ar)\,dr + \int_0^\infty af_1(ar)\,rdr;$$

durch theilweise Integration erhält man, beachtend die unmittelbar vorher getroffene Feststellung über a:

$$\int_0^\infty af_1(ar)\,rdr = [rf(ar)]_{(r=\infty)} - \int_0^\infty f(ar)\,dr;$$

wenn daher die zweite Voraussetzung, rf(ar) geht bei $r = \infty$ in Null über, getroffen wird, so ergibt sich $\frac{dy}{da} = 0$; — woraus y von a independent erkannt, und der am Eingange aufgestellte Satz in folgender abweichender und einfacherer Form nunmehr mitgetheilt werden kann.

Das bestimmte Integral $\int_0^\infty af(ar)dr$, wo f ein Functionszeichen ist, ändert den Werth nicht, während die reelle oder imaginäre Constante a der Variable $z = ar$ alle Werthe durchläuft, innerhalb welcher die Function f(z) nicht unendlich gross wird; überdiess muss diese Function der Art sein, dass das Produkt rf(z) bei $r = \infty$ den Nullwerth annimmt.

1. Anmerkung. Fällt nun die reelle positive Einheit unter den zusammenhängenden Werthen von a, die der ersten Anforderung dieses Satzes entsprechen; so hat man für alle diese Werthe von a, sie mögen reell oder imaginär sein, die Gleichheit:

$$\int_0^\infty af(ar)\,dr = \int_0^\infty f(r)\,dr, \qquad \text{(I)}$$

falls noch die andere Bedingung des vorausgesetzten Satzes, dass nämlich $rf(ar)$ bei $r = \infty$ in Null übergeht, ebenfalls realisirt wird.

2. Anmerkung. Zum richtigen Gebrauche des obigen Satzes ist noch Folgendes zu beachten.

Wenn die Bedingungen des vorausgeschickten Satzes nur für die innerhalb a_1 und a_2 fallenden Werthe von a, nicht aber für diese Grenzen selbst stattfinden, so hat man, wenn α einen dieser Zwischenwerthe repräsentirt, folgende coordinirte zu (I):

$$\int_0^\infty af(ar)\,dr = \int_0^\infty \alpha f(\alpha r)\,dr,$$

wo nunmehr für a bloss sämmtliche innerhalb a_1 und a_2 fallende Werthe angenommen werden dürfen. Ein analoges Bewenden hat es, wenn die Bedingungen des Satzes für sämmtliche innerhalb a_2 und a_3 fallende Werthe von a, diese Grenzwerthe ausgenommen, realisirt werden; u. s. w.

2. Als erste Anwendung lege ich das bestimmte Integral:

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{(m+1)pi} r^m}{1 + e^{npi} r^n}\,dr$$

vor, wo m und n reell und positiv, und $m + 1 < n$ voraus gesetzt wird. Hier ist

$$a = e^{pi}, \quad z = re^{pi} \text{ und } f(z) = \frac{z^m}{1 + z^n};$$

folglich treffen die Bedingungen des Satzes für alle Werthe von a ein, die nicht $a^n = -1$ geben, d. h. für alle Werthe von p, die nicht np als ungerade Vielfache von π darstellen.

Wird nun der Fall ins Auge gefasst, wo np innerhalb $-\pi$ und $+\pi$ fällt, so kann im vorgelegten bestimmten Integrale $np = 0$ angenommen werden, und man hat:

$$\int_0^\infty \frac{e^{(m+1)pi} r^m}{1 + e^{npi} r^n} dr = \int_0^\infty \frac{r^m}{1 + r^n} dr; \quad (-\pi < np < \pi)$$

führt man für das bestimmte Integral rechterhand dessen bekannten Werth ein, so ist:

$$\int_0^\infty \frac{r^m dr}{1 + e^{npi} r^n} = e^{-(m+1)pi} \frac{\pi}{n \,\text{Sin.}\,(m+1)\frac{\pi}{n}};$$

hieraus zieht man durch Sonderung der reellen von den imaginären Theilen, falls noch np durch Θ ersetzt wird, folgende Integralbestimmungen:

$$\int_0^\infty \frac{r^m dr}{1 + 2r^n \,\text{Cos.}\,\Theta + r^{2n}} = \frac{\text{Sin.}\,\frac{n-m-1}{n}\Theta}{\text{Sin.}\,\Theta} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\text{Sin.}\,\frac{n-m-1}{n}\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{r^{m+n} dr}{1 + 2r^n \,\text{Cos.}\,\Theta + r^{2n}} = \frac{\text{Sin.}\,\frac{m+1}{n}\Theta}{\text{Sin.}\,\Theta} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\text{Sin.}\,\frac{m+1}{n}\pi},$$

wo Θ aller innerhalb $-\pi$ und $+\pi$ fallenden Werthe fähig ist.

Bedenkt man, dass diese Ergebnisse ihrer Deduction nach für alle reelle positive Werthe von m und n, die $m + 1 < n$ geben, Bestand haben, wie ferner, dass die erste dieser Gleichheiten durch Erhöhung von m um n genau die zweite darbietet; so stellt sich die erste allein, d. h. die Integralbestimmung:

$$\int_0^\infty \frac{r^m dr}{1 + 2r^n \,\text{Cos.}\,\Theta + r^{2n}} =$$

$$= \frac{\text{Sin.}\,\frac{n-m-1}{n}\Theta}{\text{Sin.}\,\Theta} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\text{Sin.}\,\frac{n-m-1}{n}\pi}, \quad (1)$$

für alle innerhalb $-\pi$ und $+\pi$ fallenden Werthe von Θ, wie für alle reellen, positiven Zahlenwerthe von m und n, die der Ungleichheit $m + 1 < 2n$ genügen, als begründet dar.

3. Als zweite Anwendung lege ich die von H. Cauchy in einer zweiten, neben der am Eingang erwähnten Note mitgetheilten zwei bestimmten Integrale vor. — Wenn:

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha)^m (1+\alpha)^n + (1+\alpha)^m (1-a)^n}{(\mathrm{Cos.}\,\Theta + i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^{m+n}} \cdot \frac{d\alpha}{1-\alpha^2}, \\ B &= \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha)^m (1+\alpha)^n - (1+\alpha)^m (1-\alpha)^n}{i(\mathrm{Cos.}\,\Theta + i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^{m+n}} \cdot \frac{d\alpha}{1-\alpha^2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

gesetzt wird, so gelangt man sehr bald auf:

$$A \pm Bi =$$

$$2\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{m-1}(1+\alpha)^{n-1}}{(\mathrm{Cos.}\,\Theta \pm i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^{m+n}}\,d\alpha + 2\int_0^1 \frac{(1+\alpha)^{m-1}(1-\alpha)^{n-1}}{(\mathrm{Cos.}\,\Theta \mp i\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\Theta)^{m+n}}\,d\alpha$$

wo die obern oder untern Zeichen zugleich bestehen; ersetzt man im ersten dieser Integrale die Integrationsvariable α durch $\frac{r-1}{r+1}$ und im zweiten durch $\frac{1-r}{1+r}$, so stellt sich folgende Bestimmungsgleichung dar:

$$A \pm Bi = 2^{m+n} e^{\pm(m+n)\Theta i} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}dr}{\left(1 + re^{\pm 2\Theta i}\right)^{m+n}},$$

die, wenn der Einfachheit wegen einstweilen $p = \pm 2\Theta$ gesetzt wird, mit folgender gleichbedeutend ist:

$$A \pm Bi = 2^{m+n} e^{\pm(m-n)\Theta i} \int_0^\infty \frac{e^{npi}\, r^{n-1}\, dr}{(1 + re^{pi})^{m+n}}.$$

Dieses bestimmte Integral entspricht, wenn m und n positive reelle Grössen repräsentiren, allen Anforderungen des hier aufgestellten Theorems, falls nur $a = e^{pi}$

(Schluss folgt in No. 30.)