
Vom Zufall, Zwang und Chaos

Ernst Brun

Am Beispiel eines NMR-Lasers wird gezeigt, wie aus Unordnung Ordnung entsteht, der blinde Zufall durch einen determinierenden Zwang überspielt wird, wie Ordnung strukturiert und sogar Chaos eine besondere Form der Ordnung sein kann. Ein dynamisches Lasermodell wird vorgestellt, das zu einer bemerkenswerten Übereinstimmung zwischen den Experimenten und den Computersimulationen führt, womit das beobachtete Laserchaos vorwiegend deterministische Züge annimmt.

1 EINLEITUNG

Im Alltag leben wir öfters in Situationen, die wir als geordnet, regelmässig, berechenbar, gesetzlich oder aber als ungeordnet, unberechenbar, unregelmässig, somit als chaotisch bezeichnen. Wir verbinden dabei mit der Ordnung das Wünschbare, das Positive, mit dem Chaos das Gestörte, das Negative. So nehmen wir etwa an, dass der Zustand der Gesundheit durch stabile Ordnungsvorgänge in unserm Körper bewirkt wird, während Krankheit auf einer Störung oder Instabilität beruht. Gesundheit wird der Ordnung gleichgesetzt, Krankheit mit verlorener Ordnung, mit Chaos also. Dieses allzu vereinfachende Schwarzweiss-Bild der Wirklichkeit mag dem menschlichen Wunschdenken entsprechen, in unserer Welt das Gute vom Bösen, die Harmonie vom Chaos zu trennen.

Ich will versuchen zu zeigen, wie sich in letzter Zeit die Vorstellungen über das Chaos ganz grundsätzlich geändert haben, wie das scheinbar gesetzlose Chaos auf einmal deterministische Züge annahm. Ordnung und Chaos sind nicht mehr unbedingt widersprüchlich: Im Gegenteil, Chaos kann – und ich betone kann – eine besondere Form hoher Ordnung sein. Damit wird dieses deterministische Chaos durchschaubar, ja es lässt sich in Einzelfällen sogar mathematisch modellieren, wie wir sehen werden: Es wird in einem gewissen Sinn berechenbar.

2 ZUFALL UND ZWANG IN DER NATUR

Schauen wir in die Welt hinaus: So weit das Auge reicht, erblickt es mehr oder weniger geordnete Strukturen und Muster, die entstehen, verweilen oder vergehen. Sie sind vermutlich aus einem amorphen Substrat herausgewachsen, in dem der blinde Zufall, die vollkommene Unordnung, zu herrschen scheint. Viele der Strukturen, wie Häuser, Türme, Städte, Brücken, Strassen, Schienenwege, Fahrzeuge u.a.m., sind gezielt von Menschenhand errichtet worden. Aus ungeordneten Metallschmelzen oder Mörtelhaufen wurden Strukturelemente: Nägel,

Schrauben, Haken, Röhren, Balken, Wände, Gefässe usw. geformt und anschliessend zu den gewünschten Artefakten zusammengefügt. Auch Tiere haben die Fähigkeit, aus ungeordneten hochgeordnete Strukturen zu entwickeln. Wir denken dabei etwa an die kunstvoll geformten Bienenwaben, die Bauten der Waldameisen, die Nester der Vögel, die Korallenriffe usw. Bei diesen Beispielen sind es jeweils äussere Einflüsse, also Zwänge, die offensichtlich aus Unordnung Ordnung schaffen.

Doch das Auge entdeckt auch Strukturen, die unabhängig von gezielten äusseren Einflüssen, spontan und ohne äusseren Zwang, auf einem ungeordneten Nährboden gewachsen sind. Offenbar verfügen natürliche Systeme über innere Fähigkeiten, die zur spontanen Selbstordnung führen. Das grossartigste Beispiel ist die kosmologische Evolution. Ausgehend von einem ungeordneten Ausgangszustand von elementaren Teilchen der atomaren und subatomaren Welt, haben sich im Lauf der Zeit Galaxien, Sonnen, Planeten, die Erde mit Menschen, Tieren Pflanzen und allem, was da kreucht und fliegt, spontan entwickelt. Hier ist weder Mensch noch Tier als Ordner sichtbar. Es ist zur Selbstordnung gekommen, wo das Zufällige durch autonome, morphogenetische Zwänge überspielt wird. Diese gestaltenden Mechanismen sorgen für eine Selektion, die aus den unzähligen, zufälligen, ungeordneten Möglichkeiten gezielt diejenigen aussuchen, welche zum hochgeordneten Endzustand führen. So kommt es zur Evolution, zur Zählung des blinden Zufalls, zur synergetischen Ordnung. Dabei ist es erstaunlich, dass diese Synergetik nicht nur bei der Entstehung lebender Wesen sichtbar ist, sondern auch im Bereich der unbelebten Natur beobachtet werden kann. Zu den bedeutendsten Resultaten der Synergetik gehört die Erkenntnis, dass allein die determinierte Selektion aus dem rein Zufälligen das ganze Spektrum der geordneten Strukturen, sowohl der unbelebten wie der belebten Natur, hervorgezaubert hat. Der selektive Zwang arbeitet an den Produkten des Zufalls, und zwar nach bestimmten Regeln, die wenigstens im Bereich der Physik und Chemie quantitativ formulierbar sind, womit ihre Wirkungen berechenbar werden.

In der Synergetik steht die Frage nach der Ursache einer spontanen Selbstordnung von wechselwirkenden Teilen im Zentrum. Sie beschäftigt sich dabei mit dem feinen Wechselspiel zwischen Zufall und Notwendigkeit, das entweder zur Ordnung oder auch zur Unordnung führen kann. Das Resultat hängt dabei in kritischer Weise von den Umgebungsparametern des Systems ab. Diese führen die Kontrollfunktionen aus. Die synergetisch wirkenden Teilchen bilden ein nichtlineares Vielteilchensystem, und es ist das delikate Wechselspiel dieser Teilchen, das ohne einen offensichtlichen Grund zum Phänomen der kollektiven Ordnung führt, wo geordnete Strukturen aus einem amorph erscheinenden Gebilde herauswachsen. Bei konstanten äusseren Rahmenbedingungen entwickeln sie sich auf einen dynamischen Gleichgewichtszustand zu. Dieser wird durch die Ordnungsparameter (makroskopische Variablen) beschrieben, die sich entweder durch zeitliche Konstanz (Fixpunkte) oder Oszillationen konstanter

Amplitude (Grenzyklen) oder auch durch stationär bleibende Unregelmässigkeiten (wie *zufällig* aussehende Schwankungen) auszeichnen. Die stabilen Gleichgewichtszustände heissen Attraktoren. Wird nun ein äusserer Kontrollparameter verändert, so kann der Attraktor instabil werden und verwandelt sich in einen Repeller: Es tritt eine Bifurkation ein. Dem System bleibt nichts anderes übrig, als einen neuen Attraktor zu suchen, was sich in einer facettenreichen Übergangsphase abspielt.

3 DETERMINISTISCHES CHAOS – EINE FORM DER ORDNUNG

Noch sind keine 20 Jahre verflossen, seit die allgemeine Ansicht vorherrschte, dass komplexes Verhalten von Systemen mit vielen Freiheitsgraden – vielen Teilchen oder vielen Individuen – durch zufällige oder unerklärliche Ursachen bestimmt wird. Die gängige Lehrmeinung von dazumal gipfelte im Standpunkt, dass der Zufall nie der Schaffung von Ordnung dient, sondern unweigerlich zu wachsender Unordnung führt. Entsprechend herrschte der Glaube, dass über relevante komplexe Systeme und fern vom thermischen Gleichgewichtszustand keine quantitativen Aussagen gemacht werden können. Komplexität wurde weitgehend ignoriert, obwohl schon damals aus verschiedenen Disziplinen Beobachtungen vorlagen, die den kanonisierten Vorstellungen widersprachen, und die schliesslich zu neuen Ansichten und Theorien über komplexe Systeme mit ihren prägnanten Ordnungsstrukturen führten.

3.1 Rauschen und Chaos

Scheinbar unregelmässiges Verhalten eines geordneten Systems – Chaos auf makroskopischer Ebene – zeigt, oberflächlich betrachtet, grosse Ähnlichkeit mit dem Rauschen, das durch zufällige Einflüsse verursacht wird. Rauschen und Chaos sind beide verknüpft mit dem Unregelmässigen. Das scheinbar Paradoxe ist die Tatsache, dass das deterministische Chaos durch strenge Regeln, ohne irgendwelche Elemente des Zufalls, bewirkt und kontrolliert wird. Grundsätzlich ist die Zukunft eines chaotischen, aber rauschlosen dynamischen Systems voraussagbar; in praxi werden aber die immer auftretenden, noch so kleinen Unbestimmtheiten des Anfangszustands über alle Massen verstärkt, so dass das voraussagbare Kurzzeit-Verhalten ins unberechenbare Langzeit-Verhalten übergeht. Diese *empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen* ist das wesentliche Merkmal des deterministischen Chaos bzw. eines damit verknüpften *seltsamen Attraktors*. Ein experimenteller Test des Chaos erfordert deshalb die Untersuchung dieses Attraktors, der im Phasenraum des Systems als fraktales Objekt dargestellt werden kann und ein scheinbar unregelmässiges Herumirren illustriert.

3.2 Szenarien des Chaos

Systematische Untersuchungen des Bifurkationsverhaltens in nichtlinearen Systemen haben in den letzten Jahren nicht nur eine Fülle von Daten gebracht, sondern zu grundlegend neuen Erkenntnissen geführt. Es ergab sich, dass Sequenzen von hierarchisch geregelten Bifurkationen vom Fixpunktverhalten über Grenzzyklen zu Zuständen führen, bei denen die Ordnungsparameter stationär bleibende Unregelmässigkeiten, also Chaos zeigen. Eine hierarchisch geordnete Sequenz von durchlaufenen Instabilitäten bezeichnet man als Weg ins Chaos. Heute kennen wir viele verschiedene Beispiele, vornehmlich aus der Physik und der Chemie, bei denen räumliche und zeitliche Ordnungsstrukturen sich spontan entwickeln, die anschliessend in hierarchisch geregelten Schritten in chaotisch aussehende Formen überführt werden können. Mit Erstaunen stellt man fest, dass nur wenige, aber typische Wanderwege ins Chaos führen, die zudem oft qualitativ unabhängig von den spezifischen Eigenschaften des Systems sind. Sie werden deshalb, dem Zug der Zeit folgend, Szenarien genannt. Die drei bekanntesten sind: das Feigenbaum-Szenarium (1978), wo das Chaos über eine Sequenz von periodenverdoppelnden Bifurkationen erreicht wird; das Ruelle-Takens-Szenarium (1971), wo mindestens zwei Bifurkationen über inkommensurabel schwingende Grenzzyklen zum Chaos führen; das Pomeau-Manneville-Szenarium (1980) der Intermittenz, bei dem ein periodischer Gleichgewichtszustand bei Änderung des Kontrollparameters in einen intermittierenden Verhaltensbereich gebracht wird, so dass in einer unregelmässig erscheinenden Folge quasi-periodische Phasen mit chaotischen Ausbrüchen abwechseln. Mit zunehmender Veränderung des Parameters wird die Intermittenz rascher und rascher, bis schliesslich das vollentwickelte chaotische Verhalten vorliegt und die quasiperiodischen Phasen fehlen.

Völlig überraschend war die frappante Erkenntnis, dass das Chaos auf dem Niveau der Ordnungsparameter nicht das Regellose, sondern eine hierarchisch geregelte Form dynamischer Ordnung ist. Damit werden die Wege ins Chaos auch zu Wegen durchs Chaos.

4 LASER – PROTOTYPEN GEORDNETER SYSTEME

Die konventionellen Lichtquellen, insbesondere die thermischen Strahler (Glühlampen), senden ungeordnetes Licht aus. Es stammt aus ungeordneten atomaren Systemen und besitzt ein breitbandiges Spektrum; die entsprechenden Photonen (Lichtquanten) werden in alle möglichen Raumrichtungen ausgestrahlt. Synergetische Effekte sind nicht vorhanden. Wir reden von inkohärentem Licht. Doch die Verhältnisse ändern sich dramatisch, wenn den strahlenden Teilchen, mit einer resonanten Struktur, die Selbstorganisation ermöglicht wird. Dies passiert in einem Laser.

Stellvertretend für eine grosse Zahl heutiger Laser soll hier ein ganz spezieller Typ vorgestellt werden. Er hat sich in den letzten 10–15 Jahren als eigentliches Testsystem bei der quantitativen Analyse des Chaos ausgezeichnet, weil dafür erstmals ein befriedigendes mathematisches Modell gefunden worden ist, welches erlaubt, die dynamischen Eigenschaften des Lasers quantitativ zu modellieren. Da bei einem System der realen Welt das zufällige Rauschen nie vollständig ausgeschaltet werden kann, war es unser Ziel, experimentelle und theoretische Untersuchungen durchzuführen, die eine klare Trennung von stochastischen und deterministischen Unregelmässigkeiten erlauben. Jedoch im Experiment Chaos vom Rauschen zu unterscheiden, ist keine leichte Aufgabe. Ein Test des Chaos verlangt ein gutmütiges, leicht kontrollierbares System hinreichender Komplexität. Diese Bedingungen erfüllt der Rubin-Kernspinresonanz-Laser, kurz NMR-Laser genannt, der am Physik-Institut der Universität Zürich entwickelt und gebaut worden ist (1).

Der NMR-Laser strahlt Radiowellen aus. Die kohärente Laseremission erfolgt durch präzessierende Kernspins von ^{27}Al von $\text{Al}_2\text{O}_3\text{:Cr}^{3+}$ (Rubin) in einem starken Magnetfeld \vec{B}_0 . Ein LC-Resonanzkreis spielt die Rolle der Kavität, wobei die Spule mit der Induktivität L das magnetische Strahlungsfeld erzeugt und die Kapazität C der Abstimmung der Resonanzfrequenz ν_c auf die NMR-Frequenz ν_a dient. Die Spininversion erfolgt durch dynamische Kernspinpolarisation (DNP), wobei Mikrowellen Elektronenspin-Übergänge in den Cr^{3+} -Ionen, bei der Temperatur des flüssigen He, induziert werden, die die Kernspins ausrichten. Der NMR-Laser arbeitet typischerweise bei einer Frequenz $\nu_a = 12.3$ MHz in einem statischen Magnetfeld $B_0 = 1.1$ T. Er verhält sich dabei wie ein abgestimmter, homogen verbreiteter, optischer Ringlaser mit nur einer einzelnen Mode. Die Laseraktivität wird als induzierte, hochfrequente Spannung $V(t)$ am Abstimmkondensator gemessen. Da die Laserdynamik sich in der Amplitude von V äussert, wird zweckmässigerweise das hochfrequente Signal demoduliert und nur die Enveloppe $v(t)$ registriert: Wir nennen künftig $v(t)$ den Ausgang (output) des Lasers. Dieser kann direkt beobachtet oder zur Weiterverarbeitung als digitales Signal gespeichert werden. In Abb. 1 ist schematisch der NMR-Laser skizziert.

Mit der Entdeckung der kohärenten Radiowellenstrahlung von Rubin stellte sich die Frage nach einem physikalisch begründeten Modell des NMR-Lasers, bei dem es zur kollektiven Selbstordnung der Kernspins von ^{27}Al kommt. Da dieses Problem jedoch äusserst kompliziert ist, sind zur Modellierung drastische Näherungen notwendig. Hier führen die berühmten Blochschen Gleichungen der NMR sowie die Kirchhoffregeln zu einem Ansatz. Jene beschreiben die kollektive Dynamik der ^{27}Al -Spins und diese das elektronische Netzwerk, welches das Laserfeld produziert. Das Spin-5/2-System von ^{27}Al wird als effektives Spin-1/2 Zwei-Zustandssystem aufgefasst. Dies ist möglich, da der NMR-Laser auf Übergänge zwischen nur zwei Spinzuständen, z. B. $m = \pm 1/2$, abgestimmt werden kann.

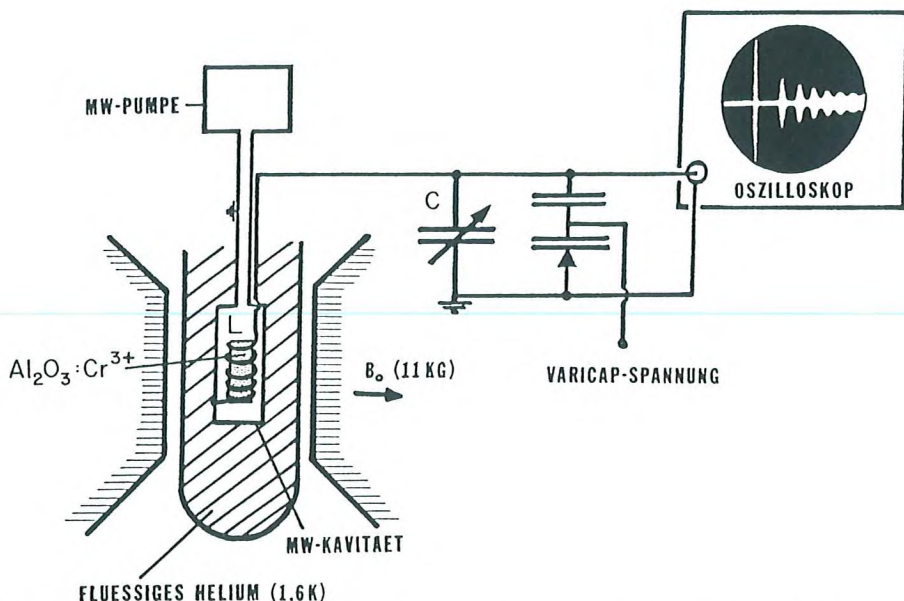


Abb. 1. Schema des Kernspin-Lasers: Durch Mikrowellen gepumpte Kernspins von ^{27}Al in einem Einkristall von Rubin ($\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$) im Hohlraum einer Spule L erzeugen hochfrequente Radiofrequenz-Signale, wenn L mittels eines Drehkondensators C (Grobabstimmung) und einer elektronisch gesteuerten Frequenzdiode (Varicap) auf eine Kernresonanz-Frequenz (NMR-Frequenz) im Magnetfeld B_0 abgestimmt wird.

Schon sehr frühe Untersuchungen haben ergeben, dass die konventionellen Blochschen Lasergleichungen nicht in der Lage sind, das wahre Verhalten des Rubin-NMR-Lasers quantitativ zu erklären. Der Durchbruch zum Erfolg kam mit der Annahme eines nicht-exponentiellen Anteils bei der Relaxation der präzisionsierenden Kernspins. Die sog. Erweiterten Blochschen Lasergleichungen (EBL) erhalten damit die Form:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma (x-y) \\
 \dot{y} &= -y (1+ay) + rx - xz, \\
 \dot{z} &= -bz+xy.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Hier repräsentiert $x(t)$ das Strahlungsfeld, $y(t)$ die kohärente Spinpräzession und $z(t)$ die Spinpolarisation in Richtung des statischen Magnetfelds. Die konstanten Parameter (σ , r , b) sind experimentell messbare Größen; a ist der charakteristische Parameter für den nicht-exponentiellen Zerfall des Phasengedächtnisses und muss phänomenologisch bestimmt werden. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der Term ay in [1] von der Größenordnung 10^{-3} und somit ausserordentlich klein ist.

Die Abb. 2 illustriert den Übergang vom Zufall zum Zwang, vom inkohärenten Rauschen zur kohärenten Laserstrahlung, anhand eines Einschwingvorgangs. Offensichtlich stimmt die Computersimulation anhand des EBL-Modells hervorragend mit dem Experiment überein, während die konventionellen Blochschen Lasergleichungen ein völlig falsches Verhalten ergeben. Die kleine Ursache – der Term ay – hat offensichtlich eine dramatische Wirkung. Ermutigt durch dieses Resultat, haben wir die dynamischen Gleichungen [1] als Grundlage für die Simulation des NMR-Laserchaos gewählt.

5 LASERCHAOS AUF DEM PRÜFSTAND

Wir haben in eingehenden Untersuchungen gezeigt, dass der NMR-Laser sich unter ganz verschiedenen Versuchsbedingungen ins Chaos führen lässt. Zur Beantwortung der Gretchenfrage: Ist das Chaos berechenbar? hat sich sowohl der parametrisch modulierte Laser (PML) wie auch der Laser mit verzögerter Rückkopplung (LVR) hervorragend bewährt. Demzufolge diskutieren wir hier vor allem

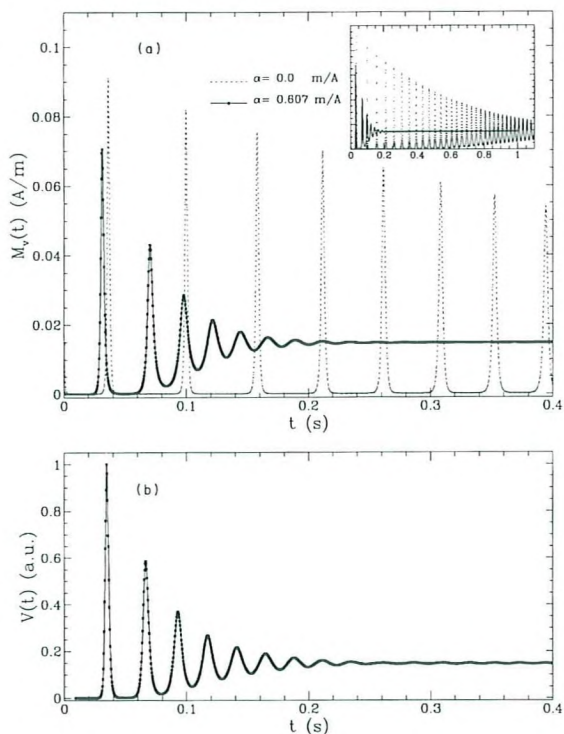


Abb. 2. Vom Rauschen zur Laserstrahlung: Einschwingvorgang (Relaxationsschwingung) beim gepumpten NMR-Laser nach der Zündung (*Q-switching*) zur Zeit $t = 0$. (a) Computersimulationen mit der transversalen rotierenden Kernspinmagnetisierung $M_x(t) \propto y(t)$: konventionelles Blochsches Lasermodell (gestrichelte Kurve) und EBL-Modell (Gleichungen [1], ausgezogene Kurve); (b) experimentelles Signal $v(t) \propto M_x(t)$.

Resultate für diese beiden Betriebsarten (2) (3). Experimentell wird beim PML ein leicht kontrollierbarer Parameter des Systems harmonisch moduliert: $A \cos \omega_{mod} t$. Typische Modulationsfrequenzen liegen im Bereich von $20 \div 200$ Hz, in der Nähe der Frequenz der Relaxationsschwingung von ca. 100 Hz. Beim LVR (Abb. 1) wird der Laserausgang $v(t)$ zeitlich verzögert auf den Resonanzkreis zurückgekoppelt und dabei die Güte Q kontrolliert. Als Kontrollparameter gehen ein die Verzögerungszeit τ und die Stärke ϵ der Rückkopplung. Die dynamischen Gleichungen für den LVR gehen wiederum, wie beim PML, aus den Gleichungen [1] hervor.

Um Computersimulationen mit der experimentellen Realität vergleichen zu können, müssen numerische Lösungen des Systems von Differentialgleichungen mit diskreten Zeitserien aus der Messgröße in Beziehung gebracht werden. Dies passiert, zur Gewinnung einer Übersicht, anhand von Bifurkationsdiagrammen oder, zur quantitativen Feinanalyse, mittels eingebetteter Daten in geeignet rekonstruierten Phasenräumen. Damit lässt sich zwar nicht der detaillierte Ablauf des dynamischen Verhaltens erfassen, sondern es werden nur Möglichkeiten aufgedeckt, die dem chaotischen System offenstehen.

5.1 Bifurkationsdiagramme

Beim parametrisch modulierten Laser (PML) ist das chaotische Verhalten durch die Wahl der beiden Kontrollparameter A und ω_{mod} bestimmt. Es ist deshalb ratsam, den Parameterraum (A, ω_{mod}) nach chaotischen Bereichen abzusuchen. Dazu helfen Bifurkationsdiagramme. Sie können beim PML nach folgendem Procedere erhalten werden: Bei fester Wahl von ω_{mod} wird der Ausgang des Lasers mit der Abtastrate $\omega_{mod}/2\pi$, somit synchron mit dem Modulationssignal, in Funktion von A gemessen; für jeden diskreten Wert von A werden N Messwerte des stationären Ausgangssignals abgespeichert; der gesetzte Kontrollparameter A wird in diskreten Schritten ΔA erhöht oder erniedrigt. Typische Werte sind $N = 256$ und $\Delta A = 1/240$ des zu überstreichenden Bereichs von A . Die Abb. 3 zeigt ein simuliertes Bifurkationsdiagramm, wie es der Computer aus dem EBL-Modell berechnet. Die Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist beachtlich, wenn man das Augenmerk auf die wesentlichen strukturellen Elemente solcher Diagramme richtet.

Beim Laser mit verzögerter Rückkopplung (LVR) existiert, im Gegensatz zum PML mit seiner vorgegebenen Modulationsperiode, keine natürliche Zeiteinheit. Trotzdem können Bifurkationsdiagramme gewonnen werden. Anstelle des stroboskopischen Abtastens tritt jetzt die Bestimmung konsekutiver Maxima in Funktion eines Kontrollparameters, z. B. τ , wie dies in der Abb. 4 gezeigt ist.

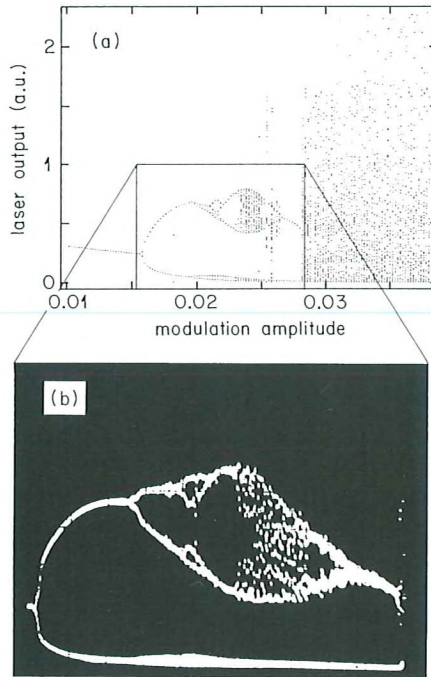


Abb. 3. Ein berechnetes (oben) und ein experimentelles Bifurkationsdiagramm des PML zum Vergleich (Ausschnitt).

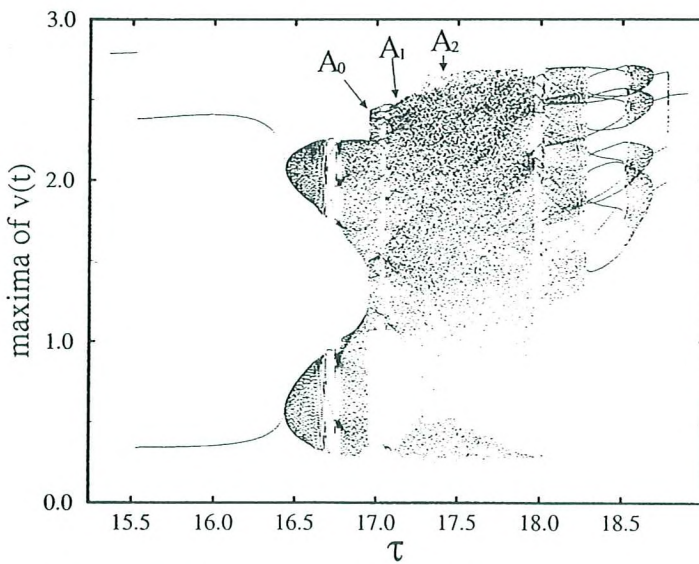


Abb. 4. Ein berechnetes Bifurkationsdiagramm des LVR: die Verteilung der Maxima im *output* sind in Funktion der Verzögerungszeit τ dargestellt.

5.2 Seltsame Attraktoren in Einbettungsräumen

Die topologischen und dynamischen Eigenschaften eines seltsamen Attraktors wären quantitativ erfassbar, stünden sämtliche relevanten Variablen als Funktionen der Zeit zur Verfügung. Beim NMR-Laser, wie bei vielen andern chaotischen Systemen auch, ist aber nur eine einzige Variable direkt messbar: Es ist der Ausgang $v(t)$ in Form einer skalaren Zeitserie $v_i = v(i\tau)$ mit $i = 1, 2, \dots$ und einer charakteristischen Zeit τ zwischen zwei aufeinanderfolgenden, stroboskopisch abgetasteten Messwerten.

Zur Charakterisierung eines seltsamen Attraktors fasst man $E = 2, 3, 4, \dots$ konsekutive Werte der Zeitserie zu einem Vektor

$$\vec{v}_i = [v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+E-1}]$$

zusammen, der in einem E -dimensionalen Einbettungsraum einen Punkt mit den Koordinaten $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+E-1}$ festlegt. Lässt man all die Abtastwerte $i = 1, 2, \dots, n$ durchlaufen, dann repräsentiert die generierte Punktmenge den tatsächlichen Attraktor, sofern nur E genügend gross gewählt wird.

Der spezielle Fall $E = 2$ eignet sich gut zur visuellen Illustration der geometrischen Struktur eines seltsamen Attraktors. Derartige 2d-Projektionen sind deshalb für den Experimentator eine wertvolle Hilfe: Sie machen es möglich, eine einfache Vorstellung von der Topologie eines chaotischen Attraktors zu gewinnen. Ferner können damit Daten vom realen System mit entsprechenden vom Modell verglichen werden, wie dies Abb. 5 zeigt.

Zu den bemerkenswertesten Resultaten gehört die kürzlich gewonnene Einsicht, dass chaotisches Verhalten durch die Menge der Repeller bestimmt wird, welche einen seltsamen Attraktor als instabile periodische Bahnen netzartig durchziehen. In Abb. 6 ist ein derartiger Repeller innerhalb eines experimentellen seltsamen Attraktors wiedergegeben. In der Abb. 5 sind instabile 3er- und 9er-Zyklen als Durchstosspunkte in einem sog. Poincaré-Schnitt eingezeichnet. Die offensichtliche Übereinstimmung zwischen den aus experimentellen Zeitserien bestimmten und den modellmässig berechneten instabilen Bahnen zeigt die heutigen Grenzen des quantitativen Beschreibens zeitlicher Chaotik auf. Der Unterschied zwischen Experiment und Simulation macht sich im schwachen, zufallsbedingtem Rauschen in den gemessenen Daten bemerkbar, während der deterministische Zwang die Topologie und die Struktur der instabilen periodischen Bahnen festlegt. Diese werden in den Computersimulationen sichtbar, da hier rauschlos gerechnet wird.

5.3 Kontrolliertes Chaos

Die Identifikation instabiler periodischer Bahnen innerhalb eines seltsamen Attraktors ermöglicht eine kontrollierte Führung des Systems entlang einer solchen. Durch schwache, aber intelligente Rückkopplungssignale wird es gezwun-

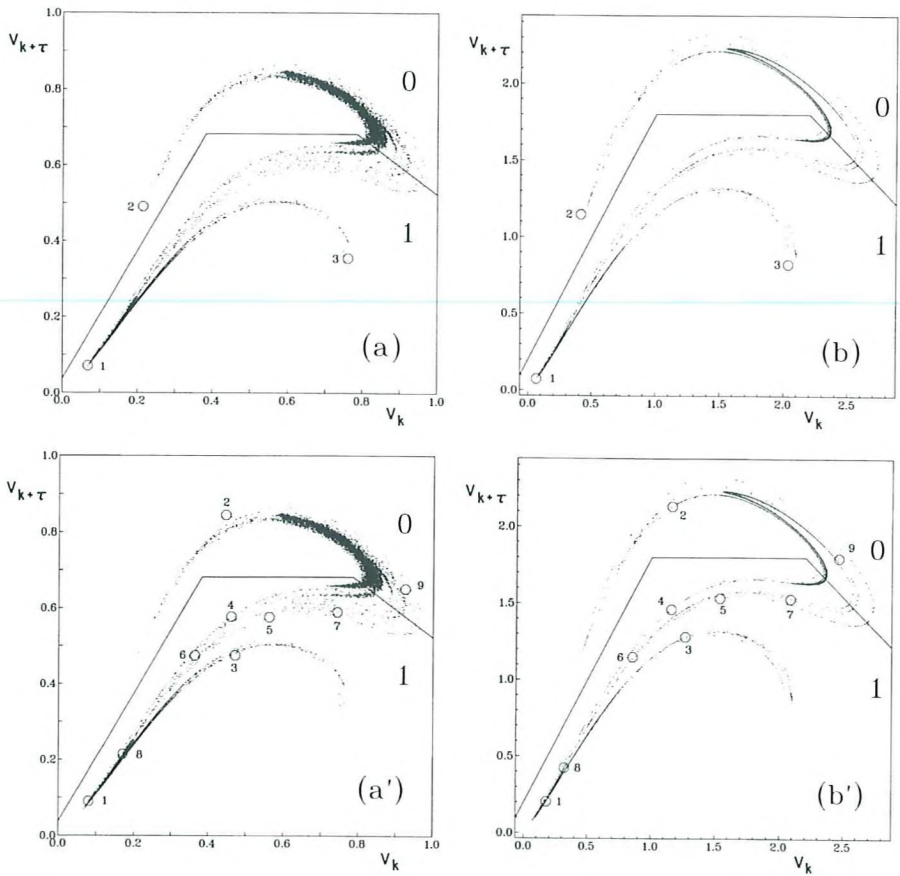


Abb. 5. Zweidimensional (2d) eingebettete Poincaréschnitte des chaotischen PML mit numerisch bestimmten instabilen Bahnen (Kreise als Durchstosspunkte durch die Projektions- (Poincaré) Ebene): (a) und (a') experimentelle Daten mit schwachem Rauschen; (b) und (b') Computersimulationen anhand des EBL-Modells, ohne Rauschanteil. (a) und (b) zeigen einen instabilen 3er-Zyklus, (a') und (b') einen instabilen 9er-Zyklus.

gen, sich in der unmittelbaren Umgebung einer periodischen Bahn aufzuhalten. Die ursprünglich chaotische Dynamik wird dabei nahezu zyklisch, wie dies in Abb. 7 für den modulierten Laser gezeigt ist. Erwähnenswert ist die Beobachtung, dass die schwachen Kontrollsignale den Charakter des chaotischen Attraktors kaum beeinflussen, weshalb man von einer echten Kontrolle des Chaos sprechen darf. Damit sind Möglichkeiten gegeben, Chaos gezielt auf einen Grenzzyklus zu reduzieren: die Ordnung durch sanften Zwang zu erhöhen (4).

Heute werden grosse Anstrengungen unternommen, die Chaoskontrolle für verschiedene natürliche Prozesse (Hirn- und Herzaktivität) und technische Prozesssteuerungen (Chaosunterdrückung, stochastische Resonanz) zu nutzen: Das

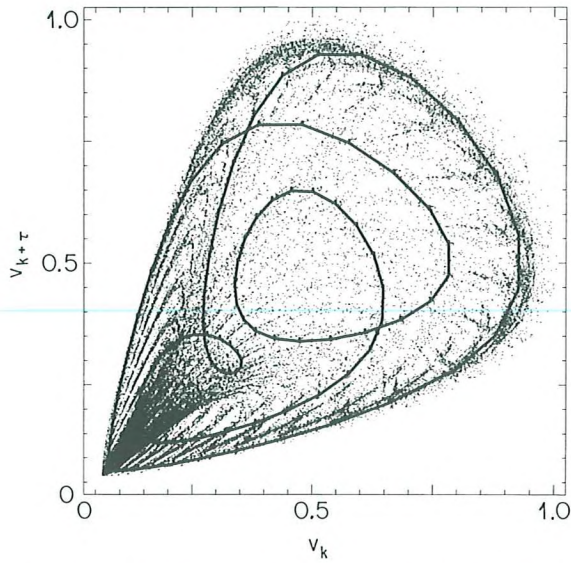


Abb. 6. Zweidimensionale (2d) Einbettung eines seltsamen Attraktors des parametrisch modulierten Lasers (PML) sowie ein numerisch bestimmter instabiler Grenzzyklus der Periode 5.

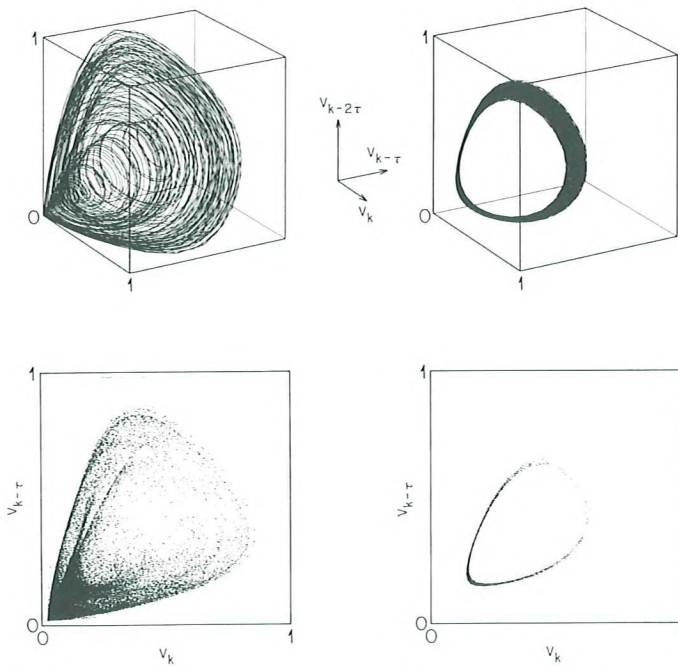


Abb. 7. Drei- und zweidimensionale Einbettung eines seltsamen Attraktors des PML (links oben bzw. links unten) sowie 3d- und 2d-Einbettungen des entlang eines 1er-Zyklus' kontrollierten PML (rechts oben bzw. rechts unten).

Chaos rückt mehr und mehr in den Bereich praktischer Anwendungen. Noch stehen wir hier am Anfang und dürften mit der facettenreichen nichtlinearen Dynamik noch viele Überraschungen erleben.

6 SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die mehr als 10jährige Arbeit mit dem chaotischen NMR-Laser hat eine reiche Ernte gebracht. Wir haben gelernt mit unregelmässigen Signalen umzugehen. Wir können sie speichern, analysieren, deuten. Es ist uns gelungen, den ordnenden Zwang vom Zufall zu scheiden und im Chaos eine neue Form der Ordnung zu entdecken. Es kamen Regeln zum Vorschein, die hinter dem deterministischen Chaos stehen: Es ist hinunter bis zu feinen Details berechenbar und kontrollierbar geworden. Das unheimlich anmutende Chaos wurde wenigstens im Falle des NMR-Lasers gezähmt. Und dies alles, wohlverstanden, im Rahmen der uns bekannten Prinzipien der Natur.

Zu diesem bemerkenswerten Resultat haben viele beigetragen: Es sind dies die Experimentatoren Peter Bösigler, Dieter Meier, Bruno Derighetti, Reto Holzner, Michele Ravani, Lecci Flepp, Joe Simonet, Mike Warden sowie die Theoretiker Remo Badii, Giorgio Broggi, Marco Finardi, Peter Meier, Christian Broens und Ruedi Stoop. Für die wertvolle, kollegiale Mitarbeit, ohne die dieser Beitrag nicht möglich gewesen wäre, sei ihnen herzlich gedankt.

Literatur

- (1) E. BRUN, B. DERIGHETTI, D. MEIER, R. HOLZNER & M. RAVANI, 1985. Observation of order and chaos in a nuclear spin-flip laser. – *J. Opt. Soc. Am. B*, 2, 47–55.
- (2) J. SIMONET, M. WARDEN & E. BRUN, 1994. Locking and Arnold tongues in an infinite-dimensional system: The nuclear magnetic resonance laser with delayed feedback. – *Phys. Rev. E*, 50, 3383–3391.
- (3) R. BADI, E. BRUN, M. FINARDI, L. FLEPP, R. HOLZNER, J. PARISI, C. REYL & J. SIMONET, 1994. Progress in the analysis of experimental chaos through periodic orbits. – *Rev. Mod. Phys.* 66, 1389–1415.
- (4) C. REYL, L. FLEPP, R. BADI & E. BRUN, 1993. Control of NMR-laser chaos in high-dimensional embedding space. – *Phys. Rev. E*, 47, 267–272.