Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (1999) *144*/2: 53–58

Die vierte Dimension und Eichtheorie[1]

Andrei Teleman, Zürich

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist, die neuen spektakulären Entwicklungen in der 4-dimensionalen Differentialtopologie und ihre Zusammenhänge mit der Theoretischen Physik in elementarer Form darzustellen. Die 4-dimensionale Topologie ist ein faszinierender, aber sehr schwieriger Teil der modernen Geometrie. Wesentliche Fortschritte wurden erst in den letzten 15 Jahren erzielt, nachdem Ideen aus der Theoretischen Physik (Relativitätstheorie, Eichtheorie, Supersymmetrie) benutzt wurden, um neue mathematische Methoden zu entwickeln. Die wesentliche Rolle der physikalischen Ideen und Konzepte in der Entwicklung des mathematischen Formalismus ist eine interessante Besonderheit der Dimension 4, die vom physikalischen Standpunkt aus als Dimension der relativistischen Raumzeit ausgezeichnet ist.

The fourth Dimension and Gauge Theory

The purpose of this article is to explain in an elementary form the new, spectacular developments in 4-dimensional Differential Topology, as well as the connections of these developments with Theoretical Physics. 4-dimensional Differential Topology is a fascinating, but very difficult chapter of the modern geometry. Effective progress in this domain was made only in the last 15 years, when ideas from Theoretical Physics were used in order to develop new mathematical methods. The crucial role of the ideas and concepts from Physics in the development of the mathematical formalism is an interesting feature of the fourth dimension; from the point of view of the physicists this dimension is distinguished, since it coincides with the dimension of the relativistic space-time.

1 WAS IST DIE DIFFERENTIALTOPOLOGIE?

Da die Differentialtopologie ein schwieriger und sehr abstrakter Bereich der modernen Geometrie ist, möchten wir zuerst in einer intuitiven Form erklären, womit sich dieses Gebiet beschäftigt. Präziser formuliert, werden wir die *fundamentalen Objekte* und die *fundamentalen Probleme* der Differentialtopologie beschreiben.

1.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Jeder mathematische Bereich beschäftigt sich mit gewissen mathematischen Objekten, die für diesen Bereich fundamental sind. Zum Beispiel sind die fundamentalen Objekte der modernen Algebra die algebraischen Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper), und die fundamentalen Objekte der Funktionalanalysis sind die sogenannten «topologischen Vektorräume».

In der Differentialtopologie sind die fundamentalen Objekte die *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*. Es ist ziemlich aufwendig, diesen abstrakten Begriff in einer genauen mathematischen Form einzuführen! Man kann aber die mathematische Definition in einer einfachen, anschaulichen Sprache formulieren und die genaue Bedeutung mit Hilfe von Beispielen präzisieren.

Wir fangen an mit einer elementaren Definition: die n – dimensionale Scheibe vom Radius R und Zentrum Z ist die Menge aller Punkte aus dem n – dimensionalen numerischen Raum $\mathbb{R}^n$, deren Abstand zu Z kleiner als die reelle Zahl R ist.

Definition: Eine n – dimensionale differenzierbare (bzw. topologische) Mannigfaltigkeit ist ein Gebilde, das durch geeignetes differenzierbares (bzw. topologisches) Verkleben von n – dimensionalen Scheiben entsteht.

Um diese Definition zu erläutern, müssen wir erklären, was genau «geeignetes differenzierbares (bzw. topologisches) Verkleben von Scheiben» bedeutet. Betrachten wir zwei n – dimensionale Scheiben B_1, B_2; seien $U_1 \subset B_1$, $U_2 \subset B_2$ offene Teilmengen dieser Scheiben, und sei $f: U_1 \rightarrow U_2$ eine bijektive, in beiden Richtungen differenzierbare (bezie-

[1] Diese Arbeit ist eine schriftliche Form der Antrittsvorlesung an der Universität Zürich, die der Autor am 11. Mai 1998 gehalten hat.

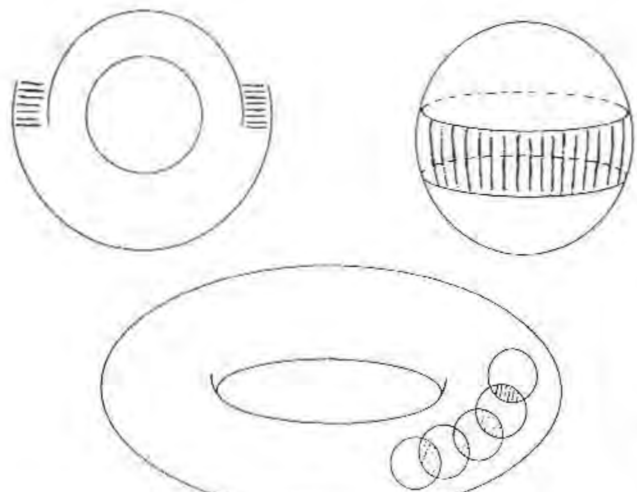

Abb. 1. Wie man den Kreis, die Sphäre und den Torus mittels Verklebens von 1-dimensionalen, bzw. 2-dimensionalen Scheiben erhält.

Fig. 1. The circle, the sphere and the torus obtained by gluing 1-dimensional, resp. 2-dimensional balls.

hungsweise stetige) Abbildung. Verkleben von B_1 mit B_2 mittels f heisst, die disjunkte Vereinigung $B_1 \amalg B_2$ zu bilden, und jeden Punkt $u_1 \in U_1$ mit seinem Bild $f(u_1)$ in dieser Vereinigung zu identifizieren.

Das beiliegende Bild illustriert, wie man den 1-dimensionalen Kreis, die 2-dimensionale Sphäre und den 2-dimensionalen Torus (die Oberfläche eines Rettungsringes) mittels solchen Verklebens von Scheiben erhält (Abb. 1).

Genauso wie durch Verkleben von Backsteinen eine grosse Vielfalt von Gebäuden gebaut werden kann, so kann man durch Verkleben von Scheiben eine grosse Vielfalt von Mannigfaltigkeiten bilden. Das fundamentale Problem der Differentialtopologie verlangt, Ordnung in diese Vielfalt zu bringen, also die Mannigfaltigkeiten von einer festen Dimension n zu *klassifizieren*. Diesen wichtigen Begriff werden wir bald erklären.

1.2 Das Klassifikationsproblem

Wir erwähnen zuerst, dass auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit alle klassischen Begriffe der Analysis (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Differentialgleichung) einen Sinn haben. Auf einer topologischen Mannigfaltigkeit kann man nur über Stetigkeit reden.

Zwei differenzierbare (bzw. topologische) Mannigfaltigkeiten M, M' heissen *diffeomorph* (bzw. *homöomorph*), wenn sie durch eine bijektive, in beiden Richtungen differenzierbare (bzw. stetige) Abbildung identifiziert werden können. Die

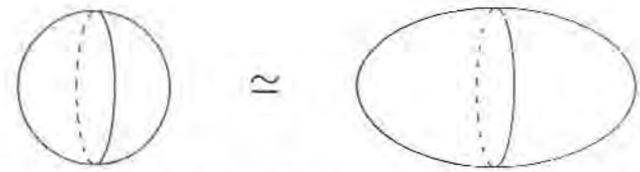

Abb. 2. Die Sphäre und das Ellipsoid sind diffeomorph.

Fig. 2. The sphere and the ellipsoid are diffeomorphic.

Mannigfaltigkeiten differentialtopologisch (bzw. topologisch) zu klassifizieren bedeutet, die Diffeomorphie- (bzw. Homöomorphie-) Äquivalenzklassen von Mannigfaltigkeiten zu listen. Dieses Klassifikationsproblem berücksichtigt überhaupt nicht die metrischen Eigenschaften (Länge, Abstand, Flächeninhalt, Volumen), an die wir von der Schule gewöhnt sind. Zum Beispiel sind das Ellipsoid und die Sphäre diffeomorph, gehören also zu derselben Äquivalenzklasse in der Klassifikation (Abb. 2).

Das nächste Bild zeigt zwei Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ (einen Torus und die Oberfläche einer tubulären Umgebung eines Knotens), die natürlicherweise als 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten betrachtet werden können. Obwohl sie völlig verschieden aussehen und innerhalb $\mathbb{R}^3$ nicht ineinander deformierbar sind, sind diese Mannigfaltigkeiten diffeomorph, gehören also derselben Äquivalenzklasse in der Klassifikation an (Abb. 3).

Dieses Beispiel zeigt, dass die differentialtopologische Klassifikation auch nicht berücksichtigt, wie die Mannigfaltigkeiten in die Euklidischen Räume eingebettet sind. Nur die intrinsische differenzierbare Struktur der Mannigfaltigkeit (die von der Art, wie die Scheiben verklebt wurden, bestimmt ist) wird berücksichtigt.

Das allgemeine Klassifikationsproblem ist viel zu schwierig, um eine vollständige Lösung erwarten zu können. Man ist besonders interessiert an *zusammenhängenden, kompakten* Mannigfaltigkeiten. Eine n – dimensionale Mannigfaltigkeit M ist zusammenhängend, wenn sie nicht als Vereinigung von zwei disjunkten n – dimensionalen Untermannigfaltigkeiten geschrieben werden kann, also wenn sie aus einem einzigen Stück besteht. M heisst kompakt (oder geschlossen), wenn sie *Hausdorffsch* ist und jede Folge von M eine konvergente Teilfolge hat. Die erste Bedingung (die verlangt, dass je zwei Punkte von M durch disjunkte Umgebungen getrennt werden können) wird von allen unseren Beispielen (und von allen elementaren Beispielen) erfüllt. Die zweite Bedingung impliziert, dass jede stetige reelle Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ beschränkt ist. Der Kreis und die Sphäre sind kompakt; die Scheiben und die numerischen Räume $\mathbb{R}^n$ sind nicht kompakt.

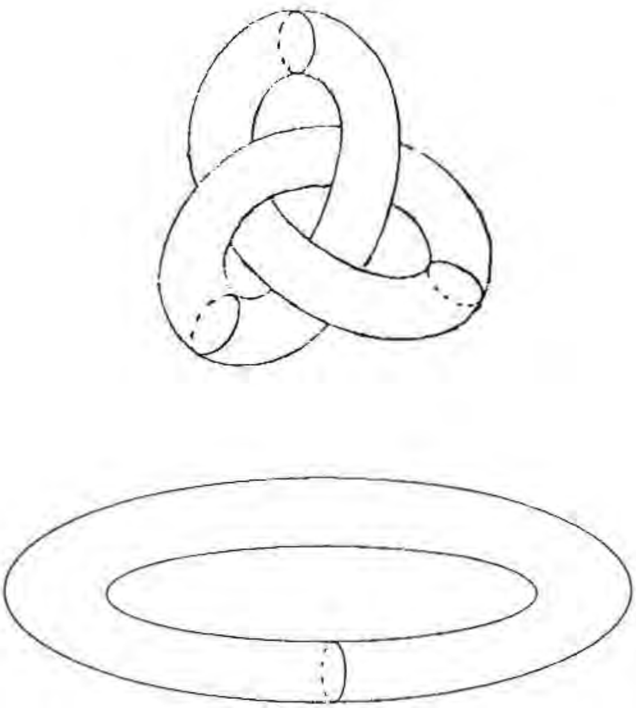

Abb. 3. Die Oberfläche einer tubulären Umgebung eines Knotens und der Torus sind diffeomorph.

Fig. 3. The boundary of a tubular neighbourhood of a knot and the torus are diffeomorphic.

Das Klassifikationsproblem für zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeiten in Dimension 1 ist sehr einfach: Es gibt nur eine Äquivalenzklasse, die Klasse des Kreises, und die topologische Klassifikation stimmt mit der differentialtopologischen Klassifikation überein.

In Dimension 2 ist das Klassifikationsproblem für zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeiten auch gelöst, aber der Beweis ist überhaupt nicht elementar. Das Ergebnis ist das folgende:

Es gibt zwei Folgen von Äquivalenzklassen: Die erste Folge enthält die Klassen von *orientierbaren* (zweiseitigen) 2-dimensionalen zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeiten (Riemannschen Flächen). Jeder Riemannschen Fläche ordnet man eine natürliche Zahl zu (das Geschlecht der Fläche), und jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht g ist diffeomorph zu dem Torus mit g Löchern (Abb. 4). Die zweite Folge enthält Klassen von nichtorientierbaren (einseitigen) Flächen, die schwieriger zu beschreiben sind.

Auch in Dimension 2 stimmt die differentialtopologische Klassifikation mit der topologischen Klassifikation überein.

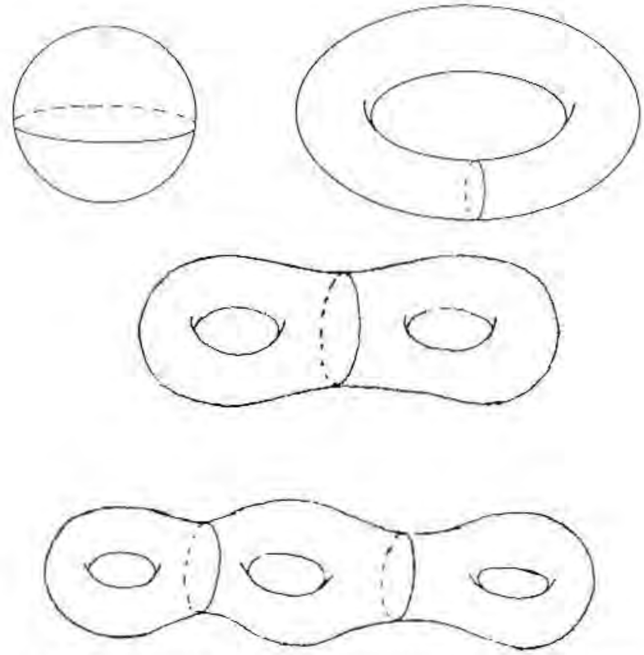

Abb. 4. Die Klassifikation der zusammenhängenden, geschlossenen, orientierbaren Flächen.

Fig. 4. The classification of the connected closed orientable surfaces.

In Dimension 3 ist das entsprechende Klassifikationsproblem noch *nicht* gelöst. Man ist leider noch sehr weit von einer Lösung dieses sehr schwierigen Problems entfernt. Eine positive Antwort zur berühmten Poincaré-Vermutung[2] würde einen wesentlichen Fortschritt in der Klassifikation in Dimension 3 bedeuten. Man weiss jedoch wieder, dass die differentialtopologische Klassifikation in Dimension 3 mit der topologischen Klassifikation übereinstimmt.

2 DIE VIERTE DIMENSION

2.1 Die vierte Dimension vom physikalischen und mathematischen Standpunkt aus

Die vierte Dimension ist für die moderne Wissenschaft besonders interessant und wichtig.

Vom physikalischen Standpunkt aus ist die vierte Dimension als Dimension der relativistischen Raumzeit ausgezeichnet. Die Relativitätstheorie hat gezeigt, dass man die Zeit und die Raum-Koordinaten nicht getrennt betrachten soll, sondern jedem physikalischen Ereignis einen Punkt in einem 4-dimensionalen Raum zuordnen muss.

[2] Die Poincaré-Vermutung behauptet, dass jede kompakte geschlossene einfachzusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit diffeomorph mit der 3-dimensionalen Sphäre ist (siehe DIECK (1991)).

Um diese fundamentale revolutionäre Idee mit berühmten Worten zu illustrieren, möchten wir hier zwei Zitate, die von zwei Klassikern der Relativitätstheorie stammen, reproduzieren. Es geht um den Physiker Albert Einstein und den Mathematiker Hermann Weyl.

«In der Tat ist die Zeit gemäss der klassischen Physik absolut, d. h. von der Lage und dem Bewegungszustande des Bezugssystems unabhängig. Dies kommt in der letzten Gleichung der Galilei-Transformation ($t = t'$) zum Ausdruck.

Durch die Relativitätstheorie ist die vierdimensionale Betrachtungsweise der «Welt» geboten, da ja gemäss dieser Theorie die Zeit ihrer Selbständigkeit beraubt wird, wie die vierte der Gleichungen der Lorentz-Transformation[3]

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

lehrt.» (A. EINSTEIN, «Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie» (1917), p. 37.)

«Man muss sich, um den wahren Sinn des Relativitätsprinzips aufzufassen, durchaus daran gewöhnen, nicht «im Raum» und nicht «in der Zeit», sondern «in der Welt», in Raum-Zeit zu denken. Nur das Zusammenfallen (bzw. das unmittelbare Benachbartsein) zweier Ereignisse in Raum-Zeit hat einen unmittelbar evidenten Sinn; dass sich hier Raum und Zeit nicht in absoluter Weise voneinander trennen lassen, ist eben die Behauptung des Relativitätsprinzips.»

«Die Weltpunkte bilden eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit; das ist vielleicht die sicherste Tatsache unseres gesamten Tatsachenwissens.» (H. WEYL, «Raum, Zeit, Materie» (1921), pp. 139, p. 160.)

Wir verweisen den interessierten Leser auf den Artikel von STRAUMANN (1994), wo die interessante Geschichte der Entdeckung der Relativitätstheorie dargestellt wird.

Das mathematische Modell der Raumzeit in der speziellen Relativitätstheorie ist der Minkowski-Raum M, der eigentlich ein vierdimensionaler affiner Raum (versehen mit einer pseudo-Riemannschen Metrik) ist. In der allgemeinen Relativitätstheorie verliert die physikalische Raumzeit auch die affine Struktur. Man kann nur behaupten, dass die Raumzeit eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Die Struktur und die Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeit, die unser Universum modelliert, sind also nicht nur für die Physik, sondern auch für die Kosmologie und die Philosophie wichtig.

Die vierte Dimension ist aber auch vom mathematischen Standpunkt aus ausgezeichnet. Sie ist die einzige Dimension, bei der die differentialtopologische Klassifikation *wesentlich* schwieriger als die topologische Klassifikation ist. Wir haben erwähnt, dass in kleineren Dimensionen die zwei Klassifikationen übereinstimmen. In höheren Dimensionen kann man mit Hilfe von klassischen algebraisch-topologischen Methoden den Unterschied zwischen den zwei Klassifikationsproblemen kontrollieren. Es war aber schon lange klar, dass diese klassischen algebraisch-topologischen Methoden in Dimension 4 *nicht* ausreichen.

Um die differentialtopologische Klassifikation in Dimension 4 angreifen zu können, brauchte man *neue Invarianten*, die die differenzierbaren Strukturen der Mannigfaltigkeiten unterscheiden und die keinen topologischen Charakter haben.

Wesentliche Fortschritte wurden erst dann erzielt, als *eichtheoretische* Methoden angewandt wurden. Den Ursprung und die Hauptideen dieser neuen Methoden möchten wir jetzt (in einer elementaren Form) erklären.

2.2 Eichtheoretische Methoden

Der Ursprung der Eichtheorie ist der klassische Elektromagnetismus. Die bekannten Maxwellschen Gleichungen lassen sich wie folgt schreiben:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\vec{J} \qquad (2)$$

Hier bezeichnen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die elektrische und die magnetische Komponente des Feldes, ρ ist die Ladungsdichte und $\vec{J}$ ist die Stromdichte.

Die Maxwellschen Gleichungen bekommen eine sehr einfache Form, wenn man den modernen Formalismus der Differentialformen benutzt. Wir führen die 2-Form F ein:

$$F = c(E_1\, dx \wedge dt + E_2\, dy \wedge dt + E_3\, dz \wedge dt) + B_1\, dy \wedge dz + B_2\, dz \wedge dx + B_3\, dx \wedge dy.$$

[3] In dieser Formel bezeichnet c die Geschwindigkeit des Lichtes, x und t bezeichnen die erste Raumkoordinate, bzw. den Zeitwert eines Ereignisses bezüglich eines Koordinatensystems K; t' ist der Zeitwert desselben Ereignisses bezüglich eines neuen Koordinatensystems K', das sich bezüglich K mit Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegt.

Diese Form heisst die elektromagnetische Feldstärke. In dem Fall $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$ werden die Maxwellschen Gleichungen

$$dF = 0 \quad (1') \qquad\qquad \delta F = 0 \quad (2')$$

Hier bezeichnet d die äussere Ableitung und δ ist der formal-adjungierte Operator bezüglich der pseudo-Riemannschen Minkowski-Metrik.

Die Gleichungen (1'), (2') haben eine sehr interessante mathematische Interpretation: Die erste Gleichung besagt, dass iF die *Krümmung* F_A eines *Zusammenhangs* A in einem Hermiteschen Geradenbündel ist[4]. Die zweite Gleichung verlangt, dass A die *Yang-Mills-Bedingung* erfüllt, d. h. dass A ein kritischer Punkt des *Yang-Mills-Funktionals*

$$YM(A) := \int |F_A|^2$$

ist. Die mathematischen Begriffe, die hier erwähnt wurden (Geradenbündel, Zusammenhang, Krümmung) sind fundamentale Begriffe der modernen Differentialgeometrie, können aber nicht in einer einfachen Form eingeführt werden. Wir verweisen den interessierten Leser auf BOSS & BLECKER (1985) oder SCHOTTENLOHER (1995).

Das folgende «Wörterbuch», das einigen fundamentalen differentialgeometrischen Begriffen physikalische Interpretationen zuordnet, kann als Fundament der modernen Mathematischen Physik betrachtet werden.

MATHEMATIK	PHYSIK
A Zusammenhang in einem Geradenbündel	Elektromagnetisches Potential
F_A die Krümmung von A	Feldstärke
Die Yang-Mills-Bedingung	Die Maxwellschen Gleichungen
Schnitt in einem Vektorbündel	Wellenfunktion eines Teilchens

Die *Eichtheorie* fängt mit der folgenden einfachen, aber sehr wichtigen Bemerkung an: Die mathematischen Begriffe, die in diesem Wörterbuch links stehen, können in den folgenden zwei Weisen verallgemeinert werden:

I. Statt Geradenbündel kann man Vektorbündel beliebigen Ranges betrachten. Mit anderen Worten, man ersetzt die Abelsche Strukturgruppe $U(1)$ durch die Gruppe $U(r)$ oder durch eine Liesche Untergruppe G von $U(r)$. Das Yang-Mills-Funktional und die Yang-Mills-Bedingung haben auch für G-Zusammenhänge Sinn. Man kann nicht für jede Gruppe G eine physikalische Interpretation der so erhaltenen Theorie finden, aber vom mathematischen Standpunkt aus sind alle diese Theorien interessant.

II. Statt des Minkowski-Raums M^4 kann man die Yang-Mills-Theorie auf einer beliebigen pseudo-Riemannschen oder Riemannschen Mannigfaltigkeit X untersuchen. Mit anderen Worten, man untersucht die Zusammenhänge in einem G-Vektorbündel auf X, welche die Yang-Mills-Bedingung erfüllen. Vom analytischen Standpunkt aus ist die Yang-Mills-Bedingung ein nichtlineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. In Dimension 4 kann man spezielle Yang-Mills-Zusammenhänge betrachten, die ein Differentialgleichungssystem *erster* Ordnung (also ein viel einfacheres) lösen. Es geht um die Lösungen, für die das *absolute Minimum*, das von der Topologie des Vektorbündels bestimmt ist, erreicht wird. Die Äquivalenzklassen solcher Lösungen bilden einen Raum, welcher der *Modulraum* der Lösungen heisst, und mit M bezeichnet wird. In einem gewissen Sinne kann man einen solchen Modulraum *messen*, d. h. man kann *das Volumen* von M definieren. In dieser Weise erhält man Zahlen, die natürlicherweise der *differenzierbaren* 4-Mannigfaltigkeit X zugeordnet werden.

In den fundamentalen Arbeiten von S. Donaldson, die am Anfang der achtziger Jahre veröffentlicht wurden, wird gezeigt, dass diese Zahlen für $G = SU(2)$ differentialtopologische Invarianten liefern, die keinen topologischen Charakter haben, und die hinreichend stark sind, um homöomorphe (also topologisch äquivalente) 4-Mannigfaltigkeiten differentialtopologisch zu unterscheiden (DONALDSON & KRONHEIMER, 1990).

Wir erwähnen kurz einige spektakuläre Konsequenzen seiner Ergebnisse:

I. Ergebnisse über die differentialtopologische Klassifikation: Man konnte zeigen, dass sehr «viele» topologische Mannigfaltigkeiten überhaupt *keine* differenzierbare Struktur besitzen.

II. Die «exotischen» $\mathbb{R}^4$'s:

Man hat bewiesen, dass selbst die einfachste topologische 4-Mannigfaltigkeit, nämlich der numerische Raum $\mathbb{R}^4$, unendlich viele zueinander nicht äquivalente differenzierbare Strukturen besitzt. Eine differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^4$, die nicht äquivalent mit der Standardstruktur ist, heisst exotisch. Exotische Strukturen auf numerischen Räumen treten nur in Dimension 4 auf.

[4] Wir erwähnen, dass die Lie-Algebra der Gruppe $U(1)$ mit $i\mathbb{R}$ identifiziert werden kann. Deshalb tritt hier iF auf.

III. Exotische Paare von kompakten 4-Mannigfaltigkeiten: Mit Hilfe seiner eichtheoretischen Invarianten konnte Donaldson zeigen, dass es «viele» Paare von *kompakten* 4-Mannigfaltigkeiten gibt, die homöomorph, aber nicht diffeomorph sind. Solche Paare heissen exotisch. Es gibt sogar kompakte 4-Mannigfaltigkeiten, die unendlich viele zueinander nicht äquivalente differenzierbare Strukturen besitzen.

Im November 1994 ist eine neue Eichtheorie – die Seiberg-Witten-Theorie – entstanden, die nicht auf den Yang-Mills-Gleichungen, sondern auf den von E. Witten und N. Seiberg eingeführten *Monopolgleichungen* beruht (WITTEN, 1994).

Diese Gleichungen, die ihren Ursprung in der Supersymmetrie haben, wurden durch eine bahnbrechende Arbeit von E. Witten in die Mathematik eingeführt, wo sie in kürzester Zeit spektakuläre Anwendungen gefunden haben.

Einerseits konnten schwierige ungelöste Probleme – wie etwa die Thom-Vermutung – nun sehr schnell gelöst werden. Andererseits lieferten die neuen Methoden auch wesentlich vereinfachte Beweise für viele wichtige Hauptergebnisse in der Theorie der 4-Mannigfaltigkeiten, wie zum Beispiel für die Van de Ven-Vermutung.

Die Strukturgruppe (Symmetriegruppe) der Monopolgleichungen ist wieder die Abelsche Gruppe $U(1)$, genau wie im Fall der Maxwellschen Gleichungen des klassischen Elektromagnetismus. Der Unterschied liegt darin, dass die Unbekannte der Gleichungen nicht mehr nur ein Zusammenhang ist, sondern ein Paar, bestehend aus einem Zusammenhang A in einem Hermiteschen Geradenbündel und einem *Spinor* Ψ, der gemäss unserem Wörterbuch als Wellenfunktion eines Teilchens interpretiert werden kann. Da die Symmetriegruppe Abelsch ist, ist die neue Theorie viel einfacher als die Donaldson-Theorie. Allerdings ist bekannt, dass beide Theorien (die nach einer Vermutung von Witten äquivalent sein sollen) kein vollständiges System von differentialtopologischen Invarianten liefern; also kann das differentialtopologische Klassifikationsproblem in Dimension 4 auch mit diesen Theorien noch nicht gelöst werden. Von einer vollständigen Lösung dieses schwierigen und tiefliegenden Problems ist man leider immer noch sehr weit entfernt.

3 DANK

Ich bin meinen Eltern, Kostake und Mihaela Teleman, sehr dankbar, die mein Interesse an diesem faszinierenden Gebiet der Wissenschaft geweckt haben und die mir die Relativitätstheorie und die Yang-Mills-Theorie vor vielen Jahren mit Begeisterung erklärt haben. Ich bedanke mich auch bei Professor Christian Okonek, der mir bei der Vorbereitung meiner Antrittsvorlesung und bei der Korrektur dieser Arbeit geholfen hat.

4 LITERATUR

BOSS, B., BLECKER, D. D. 1985. Topology and Analysis. The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-theoretic Physics. – Springer Verlag.

DIECK, T. TOM. 1991. Topologie. – Walter de Gruyter.

DONALDSON, S.; KRONHEIMER, P. 1990. The Geometry of Four-Manifolds. – Oxford University Press.

EINSTEIN, A. 1917. Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. – Vieweg.

SCHOTTENLOHER, M. 1995. Geometrie und Symmetrie in der Physik. – Lehrbuch, Vieweg-Verlag.

STRAUMANN, N. 1994. Albert Einstein: Auf dem Weg zur Gravitationstheorie. – Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, *139* (Heft 3), pp. 101–112.

WEYL, H. 1921. Raum, Zeit, Materie. – Springer Verlag, Berlin.

WITTEN, E. 1994. Monopoles and four-manifolds. – Mathematical Research Letters 1, pp. 769–796.

PD Dr. Andrei Teleman, Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, und Mathematische Fakultät der Universität Bukarest, Strada Academiei 14, RO-70109 Bukarest, Rumänien