Zwei Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

G. PÓLYA (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 18. April 1935.)

Die beiden nachfolgenden Aufgaben habe ich als Übungsstoff zu meinen Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung schon vor längerer Zeit vorbereitet. Als Übungsstoff scheinen sie mir recht geeignet zu sein; sie knüpfen ungezwungen an das alltäglich Beobachtbare an und führen durch einfache Überlegungen zu einer einfachen Antwort.

Die erste Aufgabe betrifft die Zurückwerfung des Lichtes durch eine zufallsartig gewellte Oberfläche; ein abendlicher Spaziergang am beleuchteten Seeufer führt uns ungezwungen zu dieser Aufgabe.

Die zweite Aufgabe betrifft die Entfernungen zwischen zufallsartig verteilten Punkten. Die Betrachtung von irgendwelchen mehr oder weniger „zufallsartig" ausgestreuten Objekten (z. B. von den helleren Fixsternen am Abendhimmel oder von den Pflanzen gleicher Art in einer Vegetationsdecke) führt uns ungezwungen zu dieser Aufgabe.

Ich war überrascht zu finden, dass diese naheliegenden und einfach lösbaren Aufgaben wenig bekannt sind (ob sie überhaupt bekannt sind oder nicht, entzieht sich meiner Kenntnis). Es schien mir eine Mitteilung an dieser, Naturwissenschaftlern aller Fächer zugänglichen Stelle nicht unangebracht zu sein.

I. Über Spiegelung in einer zufallsartig gewellten Oberfläche.

1. Das Bild eines leuchtenden Punktes in einem leicht bewegten Wasserspiegel ist nicht ein einzelner ruhender Punkt, sondern es wird das vom leuchtenden Objekt ausgehende Licht von mehreren Stellen zugleich und von immer anderen und anderen Stellen re-

flektiert. Der zeitliche Mittelwert der von einer bestimmten Stelle der Oberfläche zum Beobachter gesandten Lichtmenge variiert mit der Stelle, ist eine Funktion des Ortes in der spiegelnden Fläche. Diejenigen Stellen, welche mehr Licht zurückwerfen als ein gewisser Schwellenwert, werden vom Beobachter als heller Fleck wahrgenommen. Die Berandung von diesem Fleck ist, in zeitlichem Mittelwert genommen, eine Niveaulinie der besagten Ortsfunktion.

Um die mittlere reflektierte Lichtmenge als Funktion der Stelle der Reflexion zu berechnen, müsste man das Wahrscheinlichkeitsgesetz kennen, nach welchem die verschiedenen Neigungen an der gewellten Oberfläche verteilt sind. Ich nehme an, dass die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Stellung der Tangentialebene in einem Punkt der zufallsartig gewellten spiegelnden Fläche nur von der Neigung der Tagentialebene zum Horizontalen abhängt, und zwar dass diese Wahrscheinlichkeit mit wachsender Neigung abnimmt. Anders gesagt, ich will annehmen, dass grosse Abweichungen vom Horizontalen seltener sind, als kleine. Ich will ferner die Beeinflussung der Intensität des reflektierten Lichtes durch die Abstände und durch die Grösse des Reflexionswinkels vernachlässigen; diese Vernachlässigung ist bei kleinen Neigungen und für eine kleine Umgebung der am intensivsten wahrnehmbaren Stelle, (worauf es ja hauptsächlich ankommt) wohl zulässig. Dann kommt die Aufgabe, die Linien gleicher Helligkeit (d. h. die Niveaulinien der mittleren reflektierten Lichtmenge) zu bestimmen, auf eine einfache Aufgabe der analytischen Geometrie hinaus, die folgendermassen lautet:

Gegeben ist eine Ebene E und zwei auf derselben Seite der Ebene liegenden Punkte p und P. In einem variablen Punkt R der Ebene E wird ein kleiner Spiegel so angebracht, dass er einen vom Punkt p ausgehenden Lichtstrahl nach P zurückwirft. Den spitzen Winkel zwischen dem Spiegel in R und der Ebene E bezeichne man mit γ; es hängt γ von R ab, $\gamma = \gamma\,(R)$. Gesucht sind die Kurven, entlang welcher $\gamma\,(R)$ konstant ist.

2. Die Horizontalebene E sei die (x, y)-Ebene eines rechtwinkligen räumlichen (x, y, z)-Koordinatensystems. Als x-Achse sei gewählt die Horizontalprojektion der Verbindungsgeraden der beiden oberhalb der Ebene E befindlichen Punkte p und P, als Anfangspunkt des Koordinatensystems derjenige Punkt O, worin das Licht durch die Ebene E selbst von p nach P zurückgeworfen

wird, so dass dem Punkt O der Wert $\gamma = 0$ entspricht. Die Koordinaten der Punkte

$$p, \qquad R, \qquad P$$

seien der Reihe nach

$$(-a, 0, h), \qquad (x, y, 0), \qquad (A, 0, H).$$

a, h, A, H sind positiv, und es ist

$$\frac{a}{h} = \frac{A}{H} = tg\, r; \tag{1}$$

r ist der Reflexionswinkel im Punkte O.

Die Normale des im Punkte R angebrachten Spiegels ergibt sich als die Resultante von zwei, von R nach p und P gezogenen Einheitsvektoren; sie hat die Komponenten

$$\frac{-a-x}{w} + \frac{A-x}{W}, \qquad -\frac{y}{w} - \frac{y}{W}, \qquad \frac{h}{w} + \frac{H}{W}, \tag{2}$$

wobei zur Abkürzung

$$w = \sqrt{(a+x)^2 + y^2 + h^2}, \qquad W = \sqrt{(A-x)^2 + y^2 + H^2} \tag{3}$$

gesetzt wurde; w und W sind positiv. Der dritte Richtungscosinus des Vektors (2) ist

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{h}{w} + \dfrac{H}{W}}{\sqrt{\left[\dfrac{A}{W} - \dfrac{a}{w} - x\left(\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{W}\right)\right]^2 + y^2\left(\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{W}\right)^2 + \left(\dfrac{h}{w} + \dfrac{H}{W}\right)^2}},$$

also ist

$$tg^2\gamma = \frac{y^2(w+W)^2 + [x(w+W) - A\,w + a\,W]^2}{(H\,w + h\,W)^2}. \tag{4}$$

Für ein beliebiges festes γ ist (4) die Gleichung einer Niveaukurve der Ortsfunktion $\gamma(R)$, also, unter den gemachten Annahmen und Vernachlässigungen, die Gleichung einer Kurve gleicher Helligkeit für einen in P befindlichen Beobachter bei Beleuchtung der zufallsartig gewellten (x, y)-Ebene von p aus. Die hellste Beleuchtung entspricht dem Wert $\gamma = 0$, also dem Punkt $x = 0$, $y = 0$. Die Entwicklung der rechten Seite von (4) nach wachsenden Potenzen von x und y ergibt

$$tg^2\gamma = \left(\frac{h+H}{2\,h\,H}\cos^2 r\right)^2 \left(x^2 + \frac{y^2}{\cos^4 r}\right) + \dots; \tag{5}$$

die nichtangeschriebenen Glieder sind von dritter oder höherer Ordnung.

Gemäss (5) sind die Kurven gleicher Helligkeit in der Nachbarschaft des bestbeleuchteten Punktes homothetische Ellipsen, deren grosse Achse in der Horizontalprojektion der direkten Blickrichtung des Beobachters auf das leuchtende Objekt liegt. Die grosse Achse verhält sich zur kleinen wie 1 zu $\cos^2 r$, wobei r den Reflexionswinkel im hellsten Punkte bedeutet. Diese Ellipsen sind selbst bei kleineren Werten von r recht lang gestreckt.

II. Über Entfernungen zwischen zufallsartig verteilten Punkten.

1. Der Begriff von einem zufallsartig verteilten Punktschwarm wird uns durch Beobachtungen in den verschiedensten Gebieten nahegelegt. Als zufallsartig verteilte Punkte erscheinen uns im Dreidimensionalen die Schneeflocken oder die Kolloidteilchen in einer Suspension, im Zweidimensionalen die ersten Regentropfen eines Gewitters auf dem Strassenbelag, in einer Dimension die radioaktiven Zerfalle in der Zeit, auf der Kugelfläche die sphärischen Positionen der N hellsten Fixsterne (wenn N nicht zu gross), usw.

Einem zufallsartig verteilten Punktschwarm will ich hier definitorisch die folgenden Eigenschaften zuschreiben:

[1] Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter einzelner Punkt des Schwarmes sich in einem bestimmten Gebiet befinde, ist der Ausdehnung des Gebietes proportional.

[2] Die einzelnen Punkte des Schwarmes sind voneinander (im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung) unabhängig.

Die eingangs erwähnten Punktschwärme erwecken den Eindruck, in dem definierten Sinne zufallsartig verteilt zu sein (und dieser Eindruck ist ja für einige durch genauere Beobachtungen weitgehend bestätigt worden). Die Pflanzen in einer spärlich und einförmig bewachsenen Wüste (ich denke an die Mohave-Wüste in Kalifornien) scheinen hingegen von der zufallsartigen Verteilung (wie oben definiert) in einem bestimmten Sinne abzuweichen: Die Bedingung [2] scheint nicht erfüllt zu sein, die Situation jeder Pflanze scheint von der ihrer Nachbarpflanzen beeinflusst zu sein.

Vielleicht kann einmal bei genauerer Untersuchung dieser Verhältnisse die Lösung der folgenden Aufgaben einen Dienst leisten.

I. Gegeben ist die Raumdichte δ eines im q-dimensionalen Raum zufallsartig verteilten Punktschwarmes. Gesucht ist der mittlere Abstand A_n eines Punktes von seinem n-tnächsten Nachbarpunkt.

II. Auf der Kugelfläche sind $N+1$ Punkte zufallsartig verteilt. Gesucht ist der mittlere Winkelabstand Θ_n eines Punktes von seinem n-tnächsten Nachbarpunkt.

Als Antwort auf Aufgabe I finde ich für die Gerade oder die eindimensionale Zeit, kurzum für $q=1$

$$A_n = \frac{n}{2\delta}. \tag{1}$$

Dieses Resultat ist nahezu selbstverständlich. Nicht so selbstverständlich ist aber das Resultat für ebene Punktschwärme, d. h. für $q=2$,

$$A_n = \frac{1}{2\sqrt{\delta}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\cdots+\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\right) \tag{2}$$

oder für räumliche Punktschwärme, $q=3$,

$$A_n = \frac{1}{\sqrt[3]{\delta}}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1.4}{3.6}+\frac{1.4.7}{3.6.9}+\cdots+\frac{1.4\ldots 3n-5}{3.6\ldots 3n-3}\right). \tag{3}$$

Nehmen wir z. B. $q=2$ und $n=1, 2, 3$; gemäss Formel (2) hat ein Punkt eines in der Ebene zufallsartig verteilten Schwarmes von seinem nächsten Nachbarn, von seinem zweitnächsten Nachbarn und von seinem drittnächsten Nachbarn Abstände, die in Mittel bzw.

$$A_1 = \frac{0{,}5}{\sqrt{\delta}}, \qquad A_2 = \frac{0{,}75}{\sqrt{\delta}}, \qquad A_3 = \frac{0{,}9375}{\sqrt{\delta}}$$

betragen.

In der sphärischen Aufgabe II erhält man[1])

$$\Theta_n = \pi\frac{1.3\ldots(2N-1)}{2.4\ldots 2N}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2N}{2N-1}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2N(2N-2)}{(2N-1)(2N-3)}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{2N\ldots(2N-2n+4)}{(2N-1)\ldots(2N-2n+3)}\right) \tag{4}$$

(in Bogenmass ausgedrückt).

2. Wir beschäftigen uns mit Aufgabe I. Ein bestimmter Punkt O des Schwarmes darf als fest gegeben (als Koordinatenanfangspunkt) betrachtet werden; die anderen werden unabhängig (sowohl von O wie auch voneinander unabhängig) im Raume ausgestreut. Bekannt-

[1]) Vgl. G. PÓLYA, Zur Statistik der sphärischen Verteilung der Fixsterne, Astronomische Nachrichten CCVIII (1919) S. 175—180, wo Θ_1 und A_1 (für $q=3$) berechnet, und Θ_1 statistisch belegt wird.

lich ist [2]) $V\delta$ die durchschnittliche Anzahl der im Raum ausgestreuten Punkte in einem gegebenen Gebiet von Volumen V, und es ist

$$P_r = \frac{(V\delta)^r e^{-V\delta}}{r!} \tag{5}$$

die Wahrscheinlichkeit im Volumen V genau r der ausgestreuten Punkte anzutreffen. — Ich stelle die folgende Definition auf:

W_x^{x+h} ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der n-te Nachbar des Punktes O von O eine zwischen x und $x+h$ gelegene Entfernung hat. (Man soll den Punkt O mit allen in den Raum gestreuten Punkten verbinden und die Verbindungsstrecken nach wachsender Grösse ordnen: der n-ten in der Reihe der so geordneten Verbindungsstrecken entspricht der n-te Nachbar.) Aus dieser Definition folgt (x, h sind positiv!)

$$W_x^{\infty} = W_x^{x+h} + W_{x+h}^{\infty}\,. \tag{6}$$

Es bleibt somit zu berechnen übrig

W_x^{∞}, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der n-te Nachbar von O ausserhalb der Kugel vom Radius x und Mittelpunkt O liegt. Der n-te Nachbar wird dann und nur dann ausserhalb dieser Kugel liegen, wenn innerhalb dieser Kugel *weniger als* n ausgestreute Punkte liegen: entweder keiner, oder einer, oder zwei, ... oder höchstens $n-1$ von den ausgestreuten Punkten. Somit ist

$$W_x^{\infty} = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1}\,, \tag{7}$$

wobei unter dem V der Formel (5) das Volumen der besagten Kugel zu verstehen ist; somit ist

$$V = K_q\, x^q\,; \tag{8}$$

K_q ist das „Volumen" der q-dimensionalen Einheitskugel; d. h. K_q ist eine Länge für $q = 1$, eine Fläche für $q = 2$ und nur für $q = 3$ ein eigentliches Volumen. Es ist

$$K_1 = 2, \qquad K_2 = \pi, \qquad K_3 = \frac{4\pi}{3}\,. \tag{9}$$

$w(x)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Entfernung des n-ten Nachbarn des Punktes O von O. Es ergibt sich

$$w(x) = \lim_{h \to o} \frac{W_x^{x+h}}{h} = -\lim_{h \to o} \frac{W_{x+h}^{\infty} - W_x^{\infty}}{h} = -\frac{d\,W_x^{\infty}}{d\,x} \tag{10}$$

unter Benutzung von (6).

[2]) Vgl. z. B. G. Pólya, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fehlerausgleichung, Statistik, in Abderhalden's Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, Abt. V, Teil 2, S. 669—758, insbesonder S. 705—707.

A_n, wie in Aufgabe I definiert, ist die mathematische Erwartung der vom Zufall abhängigen Länge x, deren Wahrscheinlichkeitsdichte durch (10) gegeben ist. Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(11) \quad A_n &= \int_0^\infty x\, w(x)\, dx = -\int_0^\infty x\, d\, W_x^\infty = \int_0^\infty W_x^\infty\, dx \\
&= \int_0^\infty \sum_{r=0}^{n-1} P_r\, dx = \int_0^\infty \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(K_q x^q \delta)^r}{r!} e^{-K_q x^q \delta} . dx \\
&= \frac{1}{q\,(K_q \delta)^{1/q}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \int_0^\infty y^{r+\frac{1}{q}-1} e^{-y}\, dy \\
&= \frac{1}{q\,(K_q \delta)^{1/q}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \Gamma\left(r+\frac{1}{q}\right) \\
&= \frac{1}{(K_q \delta)^{1/q}} \Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right) \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}+1\right) \cdots \left(\frac{1}{q}+r-1\right)
\end{aligned}
$$

unter sukzessiver Benutzung von (10), (7), (5), (8); zum Schluss wurde die Definition und die einfachste Eigenschaft der Γ-Funktion herangezogen. Setzt man in (11) nacheinander $q = 1, 2, 3$ und beachtet man (9), so erhält man (1), (2), (3).

3. Die gegebene Herleitung der Formeln (1), (2), (3) kann auf mehrere Arten variiert werden. Man erhält aus (10), (7), (5), (8) durch leichte Rechnung

$$
(12) \qquad w(x)\, dx = P_{n-1} \cdot \delta\, d\, K_q\, x^q .
$$

Diese Formel besagt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Entfernung des n-ten Nachbarn des Punktes O von O zwischen x und $x + dx$ fällt, ist ein Produkt von zwei Faktoren; der erste Faktor ist die Wahrscheinlichkeit, in der Kugel vom Mittelpunkt O und Radius x genau $n-1$ hineingestreute Punkt anzutreffen; der zweite Faktor ist die erwartungsmässige Anzahl der ausgestreuten Punkte in einer die besagte Kugel umgebenden Schicht von Dicke dx. Man kann die so gedeutete Formel (12) direkt herleiten (durch Grenzübergang) und damit einen anderen Beweis für das Resultat von (11) geben.

4. Die Herleitung von (4) gestaltet sich der von (1), (2), (3) ganz analog; ich hebe die Analogie durch die Numerierung der Formeln hervor und ich gebe nur wenige Einzelheiten (vgl. auch a. a. O. [1]).

Einen Punkt von den $1+N$ erwähnten betrachte ich als fest gegeben, etwa als den „Nordpol" der Kugel.

K sei die Gesamtheit derjenigen Punkte der Kugel, deren Winkelabstand vom Nordpol nicht mehr als ϑ beträgt; K ist eine Kugelkalotte, deren Fläche, dividiert durch die Gesamtfläche der Kugel

$$\frac{1-\cos\vartheta}{2} = \sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

beträgt; dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter von den N ausgestreuten Punkten auf K falle (gemäss Nr. 1, Bedingung [1]).

Die Wahrscheinlichkeit, dafür, dass von den N ausgestreuten Punkten r auf K, die übrigen $N-r$ ausserhalb K fallen, ist (gemäss einer üblichen Rechnung)

$$P_r = \binom{N}{r}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{2r}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2N-2r}. \tag{5'}$$

W_ϑ^π sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der n-te Nachbar des Nordpols ausserhalb K fällt. Nach den Überlegungen der Nr. 2 ist [vgl. die Herleitung der Formel (7)]

$$W_\vartheta^\pi = P_o + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} \tag{7'}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Theta_n &= -\int_o^\pi \vartheta\, dW_\vartheta^\pi = \int_o^\pi W_\vartheta^\pi\, d\vartheta \\ &= \int_o^\pi \sum_{r=o}^{n-1}\binom{N}{r}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{2r}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2N-2r} d\vartheta \\ &= \sum_{r=o}^{n-1}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(N-r+\frac{1}{2}\right)}{r!\,(N-r)!} \end{aligned} \tag{11'}$$

mit Benutzung des Bekannten B-Integrals. Aus (11') folgt dann (4). Die der Formel (12) entsprechende lautet hier

$$-dW_x^\pi = \binom{N-1}{n-1}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{2n-2}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2N-2n} N\, d\sin^2\frac{\vartheta}{2}. \tag{12'}$$

Der erste Faktor geht aus (5') hervor, wenn darin N durch $N-1$ und r durch $n-1$ ersetzt wird. Man kann (12') auch leicht direkt einsehen und so das Resultat (11') gewinnen.