Einseitige Ergänzungsvielflache aus dem Tetraedertyp.

Von

K. MERZ (Chur).

(Mit 11 Abbildungen im Text.)

(Als Manuskript eingegangen am 6. April 1938.)

Drei Ebenen, die durch einen Punkt im Innern eines convexen Vielflachs gelegt werden, zerlegen dieses in zwei einseitige Vielflache[1]), die einander ergänzen zum ursprünglichen Vielflach.

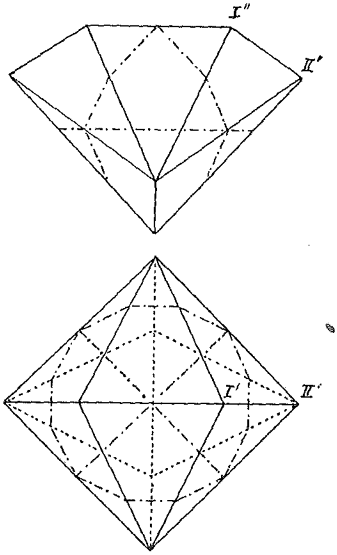
Das einfachste Beispiel besteht in der Zerlegung des Tetraeders in Heptaeder und Pentadekaeder[2]). Dieses Beispiel hat noch die ausgezeichnete Eigenschaft, dass dabei zugleich die einseitigen Vielflache kleinster und grösster Flächenzahl für das Tetraeder entstehen. Der Grund liegt darin, dass bei den drei angenommenen Schnittebenen die vier Ecken des Tetraeders in vier Scheiteloktanten zu liegen kommen. Dadurch entsteht das Pentadekaeder mit allen vier Ecken des Tetraeders, während das Heptaeder, das mit den vier Nischen gleichsam herausfällt, nur vier Flächenteile dem Tetraeder wegnimmt und neue Ecken erhält. Die Annahme eines Punktes *I* in der Halbierungsebene eines Oktanten bestimmt mit seinen symmetrischen in den Scheiteloktanten ein Tetraeder.

Um aus diesem Hinweis einen Fortschritt zu erzielen, werde das Beispiel erweitert, von einem Punkt zu zwei Punkten *I* und *II* in jedem von vier Scheiteloktanten. Damit tritt an Stelle des Tetraeders ein achteckiges Vielflach begrenzt von 12 Dreiecken. Die daraus entstehenden einseitigen Vielflache aus je vier Scheiteloktanten sind dann ein 15 Flach und ein 31 Flach.

[1]) Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse 1937, II, Seite 21. Einseitige Polyeder aus Oktanten.

[2]) Commentarii Mathematici Helvetici, ... vol. 10, pag. 1, 1937.

12 Flach $Tn = 3$



Netz des 12 Flachs geteilt zu 15— u. 31 Flach

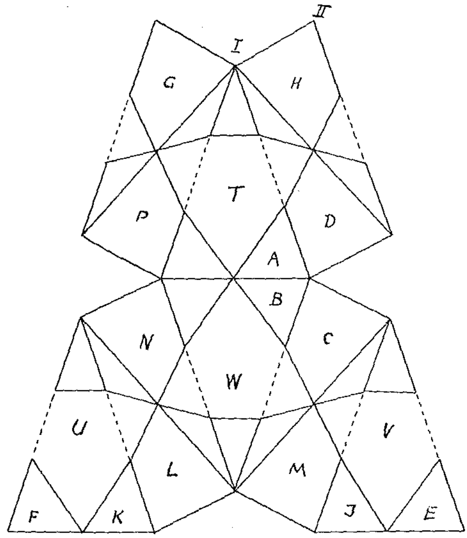


Abb. 1 und 2.

Die Achsenschnitte mit diesem 12 Flach sind ein 12 Eck und zwei 8 Ecke, die alle drei zu nach innen gekehrten und einander in den drei Doppelstrecken durchdringenden Flächen der beiden einseitigen Vielflache werden. Die übrigen, äusseren Flächen sind ersichtlich im Netz des 12 Flachs, dessen 12 Dreiecke durch die Achsenschnitte zerlegt werden in 28 Flächen des einen und 12 Flächen des andern Teilvielflaches. Zum 31 Flach gehören die 8 Vierecke und 20 Dreiecke, zum 15 Flach die 4 Fünfecke und die 8 daran ausstossenden Dreiecke.

Um nun von diesen beiden einseitigen Vielflachen die Netze mit den Möbius-Bändern zu erhalten, müssen diese 28, bezw. 12 Flächen abwechselnd mit den 6 Hälften der Achsenschnittvielecke einfach zusammenhängend angeordnet werden. Beim 31 Flach sind wegleitend die von je 7 Flächen gebildeten Eckenpaare *I* und *II* wie bei (*C*), (*D*) oder *N*, *P*, beim 15 Flach die Fünfecke (*T*) oder *U* mit je zwei anstossenden Dreiecken. Die Ecken des 15 Flachs entstehen erst nachher an Ecken des 12 Ecks oder der 8 Ecke.

Um aus dem Netz das 31 Flach zu erhalten, bildet man aus (*A*) (*B*) ... die Eckenpaare wie *I* und *II* durch Aufklappung nach oben samt den anhängenden 3 Halbachsenschnitten, bis die drei *O* in einen Punkt fallen. Alle übrigen Flächen sind dann nach unten oder innen zu klappen. Wegweisend sind die halbierten Vielecke, 15 Flach

T_1 $n = 3$

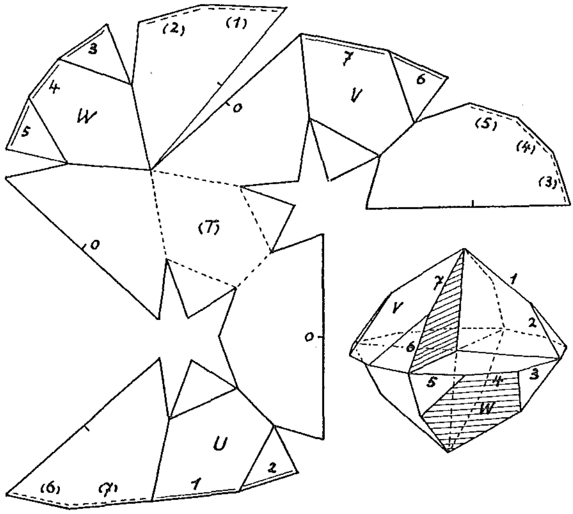


Abb. 3.

31 Flach

T_2 $n = 3$

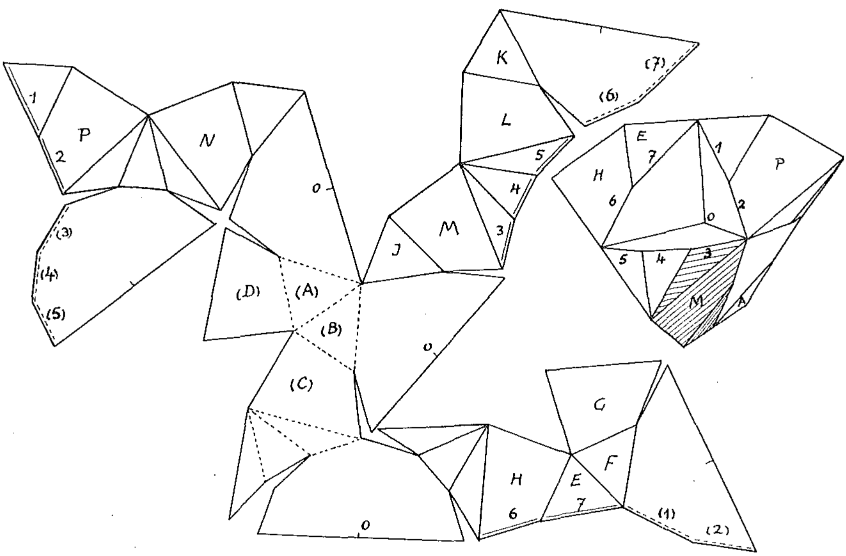


Abb. 4.

deren Mitten alle in O hinein kommen müssen. Die Möbiusbänder schliessen sich bei 1 bis 7, also z. B. die Oberseite 1 an die Unterseite (1). $f = 31$, $e = 30$, $k = 60$, $c = 1$.

Für das 15 Flach beginnt man entsprechend mit (T).

Die Möbiusbänder schliessen sich längs den Seiten 1 bis 7 des nämlichen Oktantenausschnittes.

$$f = 15, \qquad e = 22, \qquad k = 36, \qquad c = e - k + f = 1.$$

14 Flach
mit T_1 u. T_2 $n = 3$

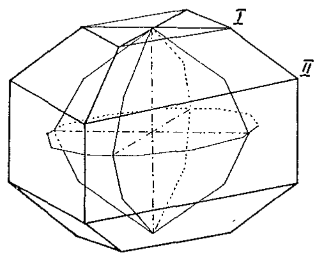


Abb. 5.

Denkt man sich das 12 Flach um seine Hauptachse gedreht um den rechten Winkel, so kommen die Achsenschnittvielecke wieder in gleiche Lage, das 12 Eck in sich selbst und jedes der beiden 8 Ecke in das andere. Die beiden Ergänzungsvielflache entstehen damit als Durchdringungen zweier 12 Flache die, den beiden Tetraedern [2]) im Würfel entsprechend, beide quer in einem 14 Flach liegen, aus dem Würfel entstanden durch Abkanten an zwei Gegenflächen. Die beiden Ergänzungsvielflache liegen dann im Doppel in beiden 12 Flachen drin und der Satz der Scheitelachtel [1]) vermag sie auseinanderzuhalten, als ineinandergefügt liegende einseitige Vielflache in den beiden zweiseitigen Vielflachen der Durchdringung.

Vereinfachung.

Der Punkt I werde auf der Hauptachse angenommen, während II wieder im gleichen Abstand sei von den durch die Hauptachse gehenden beiden Achsenschnittebenen. Damit ist durch die Symmetrie und Auswahl in den Scheiteloktanten ein 6eckiges Vielflach bestimmt, begrenzt von 8 kongruenten Dreiecken. Daraus entstehen als einseitige Ergänzungsvielflache ein 19 Flach, das die vier Ecken wie II erhält und ein 11 Flach, das keine von diesen vier Ecken besitzt. Aber diese beiden Vielflache haben die zwei Eckpunkte wie I gemeinsam, sie teilen sich also darin und fügen hier neue Ecken an. Das 19 Flach hat z.B. die Flächen E, F, G, H, die

Netz des 8 Flaches T $n = 2$

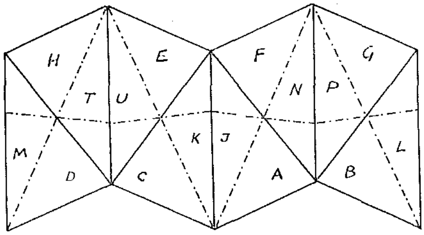


Abb. 6.

alle samt zwei Achsenschnittebenen in I zusammenstossen und wegen letzteren Ebenen entsteht hier eine überschlagene Raumecke, indem die Doppelstrecke nicht als Kante zählt, sie ist die 7. Schnittgerade an der 6 seitigen Ecke. Ebenso die Raumecke in I des 11 Flachs gebildet von N, P, T, U und den zwei Achsenschnittebenen.

8 Flach T $n = 2$ — T_2 19 Flach — T_1 11 Flach — 12 Flach mit T_1 u. T_2 $n = 2$

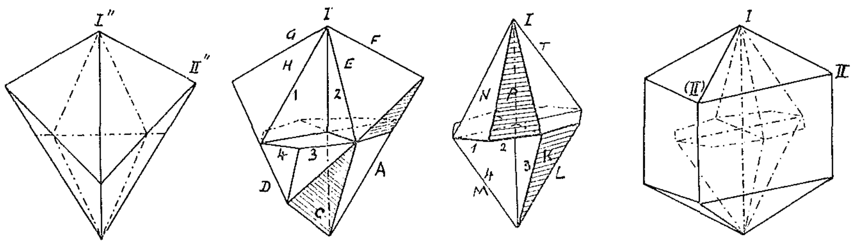


Abb. 7.

19 Flach T_2 $n = 2$ — 11 Flach T_1 $n = 2$

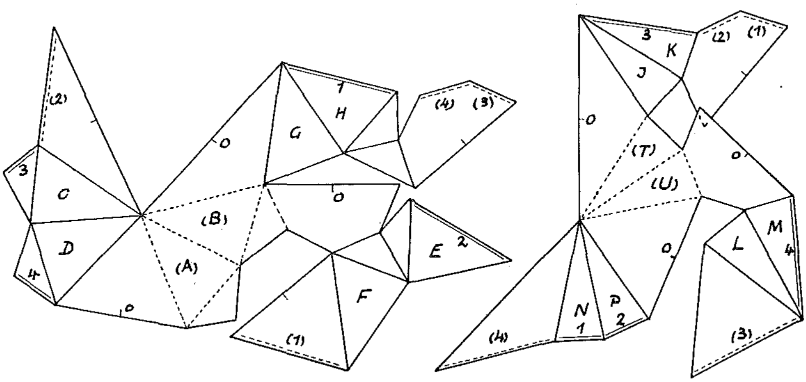


Abb. 8.

Wie das Netz des 8 Flachs zeigt, werden dessen 8 Dreiecke in 24 Dreiecke zerlegt, von denen 8, nämlich $J, K \ldots U$ zum 11 Flach und die übrigen 16 $A, B \ldots$ zum 19 Flach gehören. Die Netze des 19 und 11 Flachs zeigen die Bildung der Möbiusbänder 1 nach (1), bis 4 nach (4).

$$\begin{array}{llll} \text{11 Flach} & f = 11, & e = 10, & k = 20 \\ \text{19 Flach} & f = 19, & e = 14, & k = 32. \end{array}$$

Das 19 Flach hat 4 Ecken mehr und damit hätte es an diesen Ecken 16 Kanten mehr als das 11 Flach. Dieses gewinnt aber 4 Kanten an den beiden Ecken I, so dass die Kantendifferenz 12 wird und somit die Flächendifferenz 8.

Die Flächendifferenz wird also am grössten, wenn das eine einseitige Teilvielflach über alle Ecken des ursprünglichen zweiseitigen Vielflachs sich ausdehnt und damit den grösstmöglichen Kantenüberschuss erzielt, der um den Eckenüberschuss vermindert als Flächenüberschuss bleibt.

Verallgemeinerung.

Das Tetraeder und diese zwei neuen Vielflache, ein 8 Flach und ein 12 Flach, bilden den Anfang einer Vielflachreihe vom Tetraedertyp. Ihre Ecken $I, II, \ldots$ liegen auf zwei Kantenzügen, die gegeneinander windschief sind und in den Zeichnungen in zwei zueinander rechtwinkligen Ebenen angenommen wurden. Vereinfacht man diese Kantenzüge zu einer Strecke, so wird damit ein Tetraeder bestimmt. Diese n Kanten wurden ferner beim 16 Flach als Seiten regelmässiger Vielecke angenommen. Um die grösstmögliche Differenz für die Flächenzahlen der beiden entstehenden einseitigen Teil-Vielflache T_1 und T_2 zu erhalten, werden hier zwei Schnittebenen wieder so angenommen, dass sie die Winkel der beiden Ebenen der Kantenzüge $I, II \ldots$ halbieren, während die dritte Ebene mittelsenkrecht zur Hauptachse gelegt wird, welche die Mitten der beiden Kantenzüge verbindet. Damit erhält das eine einseitige Teilvielflach T_2 alle Ecken des ursprünglichen Vielflaches T, wenn n ungerade ist, für sich allein; wenn aber n gerade ist, so nimmt T_1 noch Anteil an den zwei Ecken an der Hauptachse. Alle übrigen Körperecken entstehen als neue Ecken an den Eckpunkten der Achsenschnittvielecke. Die kleinste Differenz der Flächenzahlen ist 8, der Eckenzahlen 4 und der Kantenzahlen 12 für T_2 und T_1 für die Fälle $n = 1$ beim 4 Flach und $n = 2$ beim 8 Flach T.

16 Flach Netz geteilt zu 19 – u. 35 Flach

$T \quad n = 4$ $\qquad T_1 \quad T_2$ $\qquad$ Grenzfall

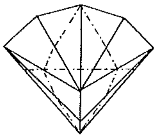


Abb. 9.

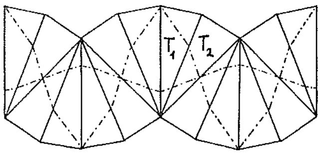


Abb. 10.

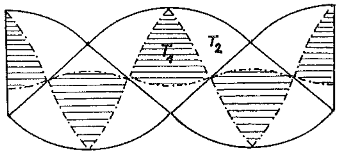


Abb. 11.

Alle Fälle für beliebiges ganzzahliges n sind ersichtlich aus folgenden Formeln, aus denen die beigefügte Tabelle die Werte bis $n = 4$ gibt.

Reihe der Vielflache T vom Tetraedertyp.

$$T\colon f = 4\,n, \quad e = 2\,n + 2, \quad k = 6\,n, \quad c = e - k + f = 2$$

Einseitige Ergänzungvielflache T_1 und T_2 mit $c = 1$

1. n ungerade

$$T_1 \begin{cases} f_1 = 4\,n + 3 \\ e_1 = 8\,n - 2 \\ k_1 = 12\,n \end{cases} \qquad T_2 \begin{cases} f_2 = 8\,n + 7 \\ e_2 = 10\,n \\ k_2 = 18\,n + 6 \end{cases}$$

$$f_2 - f_1 = 4\,n + 4, \quad e_2 - e_1 = 2\,n + 2, \quad k_2 - k_1 = 6\,n + 6$$

2. n gerade

$$T_1 \begin{cases} f_1 = 4\,n + 3 \\ e_1 = 8\,n - 6 \\ k_1 = 12\,n - 4 \end{cases} \qquad T_2 \begin{cases} f_2 = 8\,n + 3 \\ e_2 = 10\,n - 6 \\ k_2 = 18\,n - 4 \end{cases}$$

$$f_2 - f_1 = 4\,n, \quad e_2 - e_1 = 2\,n, \quad k_2 - k_1 = 6\,n$$

	T			T_1			T_2		
n	f	e	k	f_1	e_1	k_1	f_2	e_2	k_2
1	4	4	6	7	6	12	15	10	24
2	8	6	12	11	10	20	19	14	32
3	12	8	18	15	22	36	31	30	60
4	16	10	24	19	26	44	35	34	68

$$\text{also } f_2 - f_1 + e_2 - e_1 = k_2 - k_1\,.$$

Damit ist also die Zerlegung des Tetraeders in zwei einseitige Ergänzungsvielflache, in das Heptaeder und in das Pentadekaeder, verallgemeinert auf eine unendliche Reihe $T = 4\,n$ Flache zerlegt in die einseitigen $T_1 = (4\,n + 3)$ Flache, sowie in $T_2 = (8\,n + 7)$ Flache für ungerade n und $T_2 = (8\,n + 3)$ Flache für gerade n.

In der Grenze für lim $n = \infty$ geht die Oberfläche von T in vier Teile von Kegelflächen über, die in vier Mantellinien als Kanten zusammenstossen, die vom Tetraeder her noch geblieben sind, während die übrigen zwei Kanten aus den Kantenzügen zu Kreisbogen geworden sind. Durch die drei Schnittebenen werden die Kegelflächen in dreieckige Teile zerlegt, von denen 4 zu T_1 und 12 zu T_2 gehören. Die Achsenschnitte werden zu drei von Kegelschnittbogen begrenzten Vierecken, deren Schnittgeraden die

Doppelstrecken sind. Damit erhält T_1 zusammen 7 Flächen und T_2 deren 15, also wie Heptaeder und Pentadekaeder, die mit ihrem Tetraeder für $n = 1$ die Ausgangsvielflache für diese unendliche Reihe vom Tetraedertyp bildeten.

Die hier entwickelte Reihe der Polyeder n vom Tetraedertyp bildet den Hauptstamm, in welchem für $n = 2$ auch das Oktaeder auftritt, von welchem aus als Nebenstamm die Reihe vom Oktaedertyp abzweigt. Ein Beispiel dazu wurde im $F = (12\,t + 7)$ Flach [1]) gegeben, das im Grenzfall zu einem 19 Flach führt. Dieser Seitenstamm weist damit nicht bis auf das Oktaeder selbst zurück mit seinen beiden Heptaedern, also nicht in den Hauptstamm des Tetraedertyps hinein, sondern auf die erste Abstammungsfolge im Nebenstamm, auf ein 19 Flach. Aus dem Grenzfall einer Polyederreihe, die nach einem Entwicklungsgesetz aufgestellt wird, gibt also der Grenzfall die Möglichkeit, auf das ursprüngliche Polyeder zurück zu schliessen, von welchem her die Flächenanzahl, gleichsam als Erbe im Grenzfall sich wieder zeigt.