Kreuzhauben aus dem Oktaedertyp.

Von

K. MERZ (Chur).

(Mit 6 Abbildungen im Text.)

(Als Manuskript eingegangen am 15. Januar 1939.)

Vom Oktaeder ausgehend, ersetzt man die drei Quadrate seiner Achsenschnitte durch regelmässige $4\,m$ Ecke V, unter Beibehaltung der drei Achsen als Durchmesser darin. Damit sind die $(12\,m - 6)$ Ecken bestimmt für die Polyeder F vom Oktaedertyp. Für $m = 1$ entsteht das ursprüngliche Oktaeder. Für $m = 2$ sind die Achsenschnitte V regelmässige Achtecke und durch die 18 Ecken sind auf

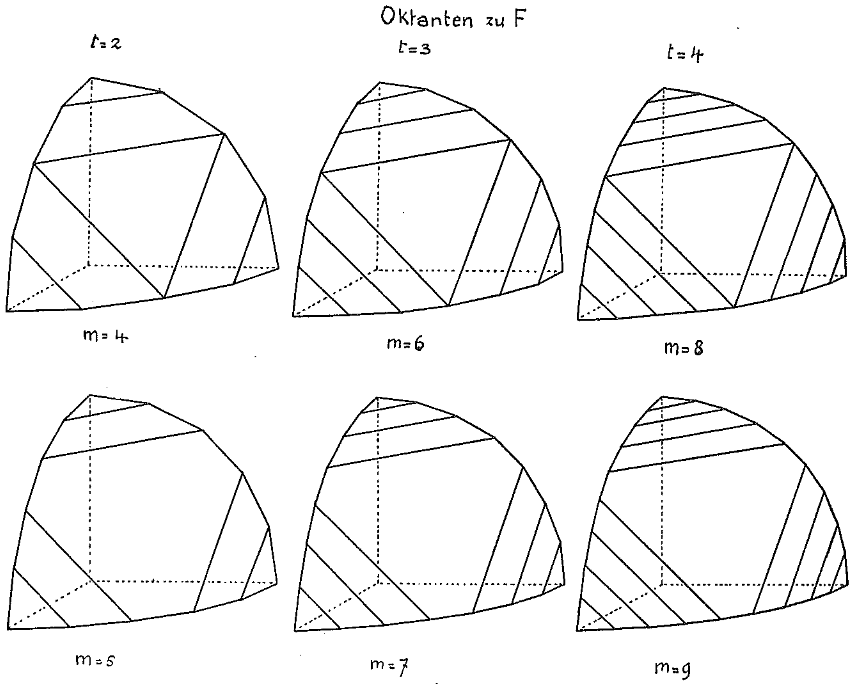


Abb. 1

jedem Oktanten 4 Dreiecke bestimmt, so dass ein 32 Flach entsteht. Für $m = 3$ sind die Achsenschnitte drei Zwölfecke, und da von deren 36 Ecken je zwei in den Enden der Achsen zusammenfallen, bleiben 30 Ecken für das Polyeder, das wie voriges auch 32 Flächen erhält, nämlich auf jedem Oktanten als Mittelfläche ein Sechseck mit drei anstossenden Dreiecken. Um die Anzahl der Flächen f, Ecken e und Kanten k für beliebiges m anzugeben, müssen die beiden Fälle für m gerade oder ungerade auseinandergehalten werden, indem für m gerade die Mittelfläche in jedem Oktanten immer ein Dreieck ist und für m ungerade ein Sechseck nach Abb. 1. Es bestehen daher zwei Abteilungen von Formeln.

1. m ungerade, $m = 2t + 1$ 2. m gerade, $m = 2t$

F mit 8 Sechsecken, $c = e - k + f = 2$, F ohne Sechsecke

$$F \begin{cases} f = 12m - 4 & \text{oder } f = 24t + 8 \\ e = 12m - 6 & e = 24t + 6 \\ k = 24m - 12 & k = 48t + 12 \end{cases} \qquad F \begin{cases} f = 12m + 8 & \text{oder } f = 24t + 8 \\ e = 12m - 6 & e = 24t - 6 \\ k = 24m & k = 48t \end{cases}$$

t	m	V	f	e	k
0	1	4 Eck	8	6	12
1	3	12	32	30	60
2	5	20	56	54	108

t	m	V	f	e	k
1	2	8 Eck	32	18	48
2	4	16	56	42	96
3	6	24	80	66	144

Man erhält also allgemein $F = (24t + 8)$ Flache. Für $t = o$ entsteht das Oktaeder bei m ungerade. Sonst bestehen zu jedem Werte t als ganze Zahl zwei Vielflache F von gleicher Flächenanzahl, eines mit Sechsecken bei m ungerade und eines ohne solche für m gerade. Für den 1. Fall ist V ein $(8t + 4)$ Eck und für den 2. Fall ein $8t$ Eck. An die seitliche Mittelfläche als Sechseck oder Dreieck schliessen sich $3(t - 1)$ Trapeze an, nach denen noch in jeder der drei Ecken der Oktanten ein Dreieck abschliesst, so dass $f = 8(3t + 1)$ wird.

Es bestehen zwei nebeneinanderlaufende Polyederreihen der F. Für ungerade m haben die F 6 feste Ecken in den Enden der drei Achsen. Die Viertelskreise dazwischen werden durch die dazukommenden Ecken fortgesetzt in eine immer grössere ungerade Zahl von gleichen Bogen geteilt, so dass eine immer kleiner werdende Mittelsehne entsteht, deren drei in jedem Oktanten zusammen das mittlere Sechseck bestimmen. Diese Polyeder bilden für die zunehmenden ungeraden m eine fortgesetzte Reihe für sich.

Ebenso die Polyeder für m gerade, wobei ausser den 6 Ecken der Achsen noch die 12 Mittelpunkte der Viertelskreise fest bleiben, also zusammen 18 Ecken, zwischen denen durch die weitere Teilung der Achtelskreise fortgesetzt neue Ecken dazu kommen, wobei das Mitteldreieck unverändert bleibt. Nur die erste Reihe geht vom eigentlichen Oktaeder aus für $t = o$, an welchem daher jedes Dreieck als ein entartetes Sechseck zu betrachten ist, von dem drei Seiten sich so ausgedehnt haben, dass für die andern nur die Eckpunkte bleiben. Für m gerade und $t = 0$ entsteht ein uneigentliches Oktaeder mit $f = 8$, $e = 6$ und $k = o$. Dagegen führen durch lim $m = \infty$ beide Reihen zum nämlichen Grenzfall, indem das mittlere Sechseck schliesslich auch zum Dreieck wird, an dessen Seiten dreieckige Zylinderflächen anschliessen, womit ein 32 Flach sich bildet, so dass von den beiden 32 Flachen für $t = 1$ als Ursprung die nämliche Flächenzahl sich in der Grenze der Entwicklung wieder zeigt. Als die eigentliche Oktaederreihe im Hauptstamm ist die Reihe für m ungerade zu nehmen, von der die andere als Nebenstamm abzweigt.

Von diesen aus allen 8 Oktanten bestehenden Polyedern F lassen sich durch Anwendung von Achsenschnittebenen noch Vielflache mit 4 oder 2 Oktanten ableiten, wobei neben den zweiseitigen, wie F, auch einseitige entstehen.

2. Durch eine Achsenschnittebene wird ein $F = (24\,t + 8)$ Flach in zwei Polyeder zerlegt mit je 4 Oktanten, jedes ein $F_2 = (12\,t + 5)$ Flach, indem die Halbierungsebene daran bleibt und mitgezählt ist (Abb. 2). Für die beiden Reihen dieser F_2 gelten folgende Formeln:

1. m ungerade, $m = 2\,t + 1$ — F_2 mit 4 Sechsecken

$$F_2 \begin{cases} f_2 = 6\,m - 1 & \text{oder } f_2 = 12\,t + 5 \\ e_2 = 8\,m - 3 & e_2 = 16\,t + 5 \\ k_2 = 14\,m - 6 & k_2 = 28\,t + 8 \end{cases}$$

$c = 2$

2. m gerade, $m = 2\,t$ — F_2 ohne Sechsecke

$$F_2 \begin{cases} f_2 = 6\,m + 5 & \text{oder } f_2 = 12\,t + 5 \\ e_2 = 8\,m - 3 & e_2 = 16\,t - 3 \\ k_2 = 14\,m & k_2 = 28\,t \end{cases}$$

	t	m	f_2	e_2	k_2
$f_2 = \frac{1}{2} f + 1$	0	1	5	5	8
$e_2 = \frac{2}{3} e + 1$	1	3	17	21	36
$k_2 = \frac{7}{12} k + 1$	2	5	29	27	64

	t	m	f_2	e_2	k_2
$f_2 = \frac{1}{2} f + 1$	1	2	17	13	28
$e_2 = \frac{2}{3} e + 1$	2	4	29	29	56
$k_2 = \frac{7}{12} k$	3	6	41	45	84

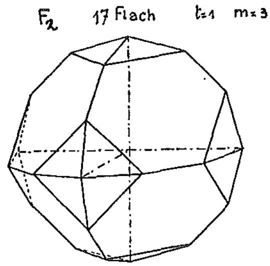


Abb. 2

3. Durch zwei Achsenschnittebenen entstehen aus F vier Viertel, jedes mit zwei Nebenoktanten. Zwei solche Viertel in Scheitellage, bestehend aus vier Oktanten an einer gemeinsamen Achse, bilden zusammen ein $F_4 = (12\,t + 6)$ Flach mit dieser Achse als Doppelstrecke d, als Schnitt der beiden ganz durchgehenden $4\,m$ Ecke. Für $t = 1$ ist das Netz in Abb. 3 eines solchen 18 Flachs für $m = 2$ gezeichnet. Bei dessen Aufklappung um die gestrichelten Kanten nach oben schliessen sich die Randseiten (1) an (1) bis (7) an (7), so dass alle an diese sieben Kanten anstossenden Flächen eines Viertels die Unterseite u des Netzes nach aussen zeigen, während 8 an 8 bis 14 an 14 bei der Klappung nach unten sich so schliessen, dass dieses Viertel die Oberseite o des Netzes zeigt. Die Ränder schliessen sich dabei überall gleichseitig o an o und u an u, so dass ein zweiseitiges Vielflach mit einer Doppelstrecke d entsteht, an welcher bei der Durchdringung o und u von aussen am Vielflach nach innen wechseln. Dieses 18 Flach hat zu den 16 Dreiecken noch die zwei Achtecke, von denen im Netz eines längs d geteilt ist, um am Modell die Durchdringung zu verwirklichen. $f = 18$, $e = 16$, $k = 32$, $c = 2$.

4. Von besonderer Bedeutung ist die Anwendung von allen drei Achsenschnittebenen und die Auswahl von vier Scheiteloktanten, weil dadurch einseitige $F_1 = (12\,t + 7)$ Flache vom Heptaedertyp[1]) entstehen. An den drei Achsenschnitten, die einander in den drei Doppelstrecken durchdringen, sind die vier Oktanten so angesetzt, dass abwechselnd vier Lücken dazwischen liegen. Aus den Netzen[2]) entstehen bei der Aufklappung Möbiusbänder. Für die F_1 entstehen folgende Formeln:

[1]) Commentarii Mathematici Helvetici v. 8, p. 379, 1936.

[2]) Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-mathem. Klasse, 1937, II. S. 21.

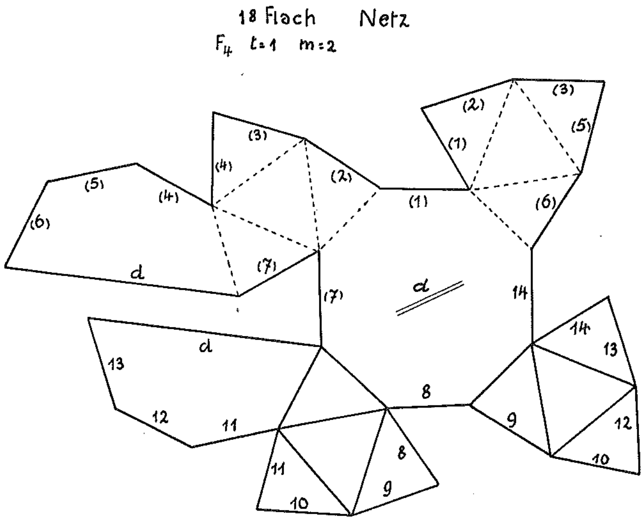


Abb. 3

1. m ungerade, $m = 2t + 1$

F_1 hat 4 Sechsecke für $t > o$,

$$F_1 \begin{cases} f_1 = 6m + 1 & \text{oder } f_1 = 12t + 7 \\ e_1 = 12m + 6 & e_1 = 24t + 6 \\ k_1 = 18m - 6 & k_1 = 36t + 12 \end{cases}$$

$f_1 = \frac{1}{2} f + 3$

$e_1 = e$

$k_1 = \frac{3}{4} k + 3$

t	m	f_1	e_1	k_1
0	1	7	6	12
1	3	19	30	48
2	5	31	54	84

2. m gerade, $m = 2t$

$c = 1$, F_1 ohne Sechsecke

$$F_1 \begin{cases} f_1 = 6m + 7 & \text{oder } f_1 = 12t + 7 \\ e_1 = 12m - 6 & e_1 = 24t - 6 \\ k_1 = 18m & k_1 = 36t \end{cases}$$

$f_1 = \frac{1}{2} f + 3$

$e_1 = e$

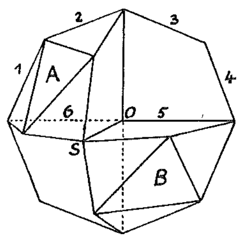
$k_1 = \frac{3}{4} k$

t	m	f_1	e_1	k_1
1	2	19	18	36
2	4	31	42	72
3	6	43	66	108

5. Um Vielflache K zu Kreuzhauben aus zwei Oktanten an einer Doppelstrecke zu erhalten, kann man von F_1 ausgehen, indem man diese $(12t + 7)$Flache durch einen Achsenschnitt teilt, oder von F_2 aus, indem man von seinen 4 Oktanten 2 Scheiteloktanten herausnimmt. K ist als 11 Flach für $t = 1$ und $m = 2$ in Abb. 4 gezeichnet. Über zwei Durchmessern des Achtecks als Grundfläche sind die beiden Achteckhälften errichtet, die einander in der Doppelstrecke $OS = d$ durchdringen. Im Netz als Abb. 5 ist eine Achteckhälfte noch halbiert für die Durchdringung. Die Dreiecke von (B) werden nach oben geklappt, wodurch ein Oktant über dem Achteck entsteht, der die Unterseite u des Netzes zeigt.

Dann werden die Dreiecke von A entgegengesetzt, nach unten geklappt, so dass sie die Oberseite o des Netzes zeigen, wodurch dann 1 an (1) und 2 an (2) sich anschliessen als o an u, wodurch ein Möbiusband die Einseitigkeit herstellt (Abb. 4).

Kreuzhaube



t=1 K m=2
Abb. 4

Netz K t=1 m=2

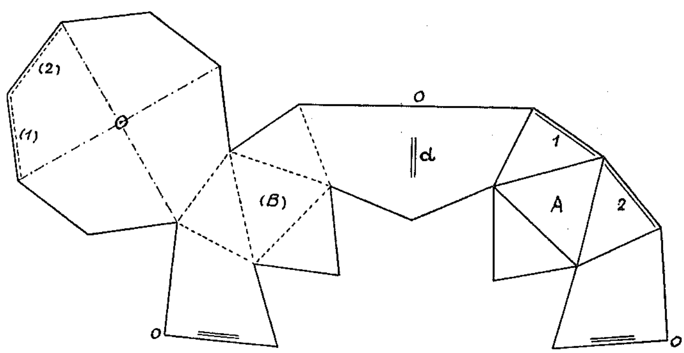


Abb. 5

Für die K erhält man folgende Formeln, worin der Achsenschnitt, auf dem die beiden Oktanten aufgesetzt sind, ganz mitzählt, samt seinen Seiten als freie Ränder und mit den beiden darin liegenden früheren Doppelstrecken mit deren Schnittpunkt.

1. m ungerade, $m = 2t + 1$ — 2 Sechsecke für $t > o$, $c = 1$

$$K \left\{ \begin{array}{ll} f' = 3m + 2 & \text{oder } f' = 6t + 5 \\ e' = 8m - 2 & \quad e' = 16t + 6 \\ k' = 11m - 1 & \quad k' = 22t + 10 \end{array} \right.$$

2. m gerade, $m = 2t$ — ohne Sechsecke

$$K \left\{ \begin{array}{ll} f' = 3m + 5 & \text{oder } f' = 6t + 5 \\ e' = 8m - 2 & \quad e' = 16t + 2 \\ k' = 11m + 2 & \quad k' = 22t + 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} f' = \frac{1}{2} f_1 + \frac{3}{2} \text{ od. } f' = \frac{1}{2} f_2 + \frac{5}{2} \\ e' = \frac{2}{3} e_1 + 2 \qquad e' = e_2 + 1 \\ k' = \frac{11}{18} k_1 + \frac{48}{18} \qquad k' = \frac{11}{14} k_2 + \frac{52}{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \frac{1}{2} f_1 + \frac{3}{2} \qquad f' = \frac{1}{2} f_2 + \frac{5}{2} \\ e' = \frac{2}{3} e_1 + 2 \qquad e' = e_2 + 1 \\ k' = \frac{11}{18} k_1 + 2 \qquad k' = \frac{11}{14} k_2 + 2 \end{cases}$$

t	m	f'	e'	k'
0	1	5	6	10
1	3	11	22	32
2	5	17	38	54

t	m	f'	e'	k'
1	2	11	14	24
2	4	17	30	46
3	6	23	46	68

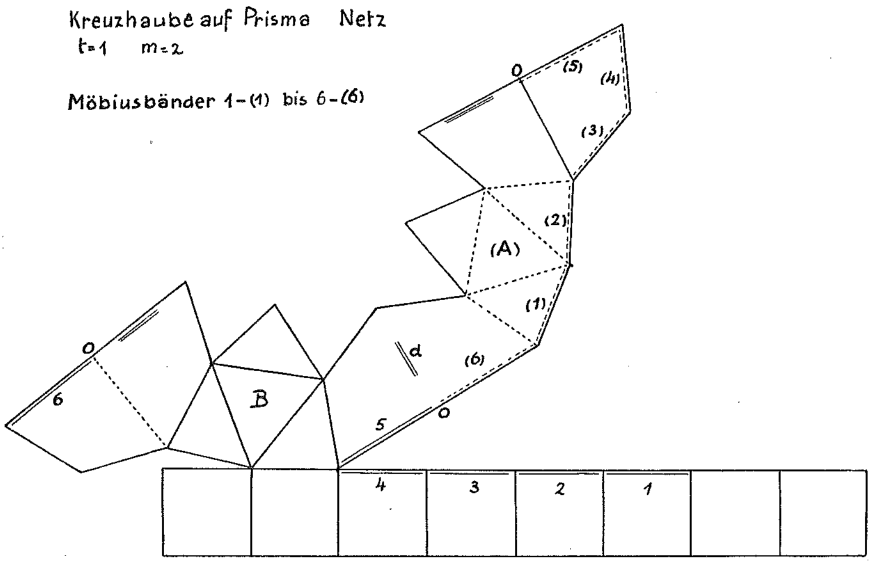


Abb. 6

Als Beispiel ist noch in Abb. 6 das Netz einer, auf ein achtseitiges unten offenes Prisma, aufgesetzten Kreuzhaube gezeichnet für K, $t = 1$ und $m = 2$. Durch Aufklappung schliessen sich in den Wendestrecken (1) an 1 bis (6) an 6 (Abb. 4) Möbiusbänder zur Herstellung der Einseitigkeit. Unter den Oktanten von A und B sind zwei viereckige Löcher in der Deckfläche des Prismas, indem aus dem Achteck der ursprünglichen Grundfläche von K zwei Viertel herausgeschnitten sind, so dass nur die beiden Viertel an 6 und (5) im Netz bleiben und das Prisma neben der aufgesetzten Kreuzhaube abschliessen. Wird das Prisma noch unten geschlossen, so erhält man $f = 21$, $e = 22$, $k = 42$, also $c = 1$ oder $h = 3 - c = 2$ als Zusammenhangszahl. Hier genügt eine Doppelstrecke, damit die Fläche einseitig wird, während F_4 mit den zwei Scheitelvierteln trotz einer Doppelstrecke zweiseitig bleibt. Der Grund ist der, dass bei F_4 die Verlängerungen der Doppelstrecke nach beiden Seiten in den Raum ausser des Vielflaches gehen, während bei der Kreuzhaube die eine Verlängerung, die über 0 in das Innere geht, indem also die Fläche über dieses Ende gestülpt ist. Dies zeigt sich an K für sich darin, dass S in beiden Netzseiten liegt, da A und B entgegengesetzte Netzseiten zeigen, während das andere Ende 0 der Doppelstrecke nur auf einer Netzseite liegen kann, weil die Grundfläche ganz durchgeht.

Die Vielflache K stellen eine Reihe von Spitzkreuzhauben dar, und erst im Grenzfall geht die Spitze in den Schnitt zweier Kreisbogen über mit einer Tangentialebene.