

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich

unter Mitwirkung von

W. BRUNNER, A. U. DÄNIKER, P. FINSLER, H. FISCHER, A. FREY-WYSSLING, H. GUTERSOHN,
P. KARRER, B. MILT, P. NIGGLI, P. SCHERRER, H. R. SCHINZ und FR. STÜSSI

herausgegeben von

HANS STEINER, ZÜRICH 7

Druck und Verlag: Gebr. Fretz AG, Zürich

Nachdruck auch auszugsweise nur mit Quellenangabe gestattet

Jahrgang 94

HEFT 4

31. Dezember 1949

Abhandlungen

Die Entzerrung des *Protornis glaronensis*

Von

F. STÜSSI, E. T. H. (Zürich)

(Mit 7 Abbildungen im Text)

1. Problemstellung:

Herr Prof. Dr. B. PEYER hat mir folgendes Problem zur Lösung vorgelegt:

«Der Fund von *Protornis glaronensis* aus den oligozänen Fischschiefern von Matt wurde schon im Jahre 1839 durch ARNOLD ESCHER VON DER LINTH dem Paläontologen HERMANN VON MEYER zur Untersuchung vorgelegt. Dieser erkannte in dem Fossil einen Vogel. Er benannte ihn — es war lange vor der Entdeckung des Urvogels *Archäopteryx* — *Protornis*, d. h. den ersten Vogel und veröffentlichte davon im Jahre 1856 eine Beschreibung.

1949 wurde der Fund im Zoologischen Museum der Universität Zürich, in dessen Besitz er sich befindet, auf Grund einer Röntgenaufnahme einer Präparation unterzogen, die nunmehr eine genauere Untersuchung gestattet.

Die Funde aus den Glarner Fischschiefern haben, wie ALEXANDER WETTSTEIN 1886 nachwies, durch tektonische Einwirkungen eine starke Deformation erlitten; vgl. dazu auch ALBERT HEIM, *Geologie der Schweiz*, II. Bd. erste Hälfte. Für das fossile Vogelskelett präsentiert sich das Problem der Deformation in besonderer Weise. Deshalb war es geboten, die Frage einem Vertreter der Ingenieurwissenschaften vorzulegen.»

Bei dieser Aufgabe handelt es sich somit darum, die Formänderungen, die die (in einer Ebene liegenden) fossilen Knochen erlitten haben, zu bestimmen. Gegenüber den normalen Anwendungen dieses Problems des «ebenen Formänderungszustandes» in den Ingenieurwissenschaften liegen hier jedoch zwei Besonderheiten vor, die eine besondere Betrachtungsweise verlangen.

Während in der normalen Elastizitätstheorie des Ingenieurs die Formänderungen als klein vorausgesetzt werden dürfen, zeigt hier (Abb. 1) schon ein summarischer Vergleich zusammengehöriger Knochen, daß diese Voraussetzung nicht mehr zutrifft. Die Formänderungsgleichungen der üblichen Elastizitätstheorie sind hier somit nicht mehr anwendbar, sondern sie müssen auf den (seltener vorkommenden und deshalb weniger bekannten) Bereich grosser Formänderungen verallgemeinert werden.

Eine zweite Besonderheit liegt darin, dass wir hier weder die ursprünglichen Längen noch die Formänderungen, sondern nur die Längen und die Lage der verformten Knochen kennen. Aus der Aussage, dass zusammengehörige Knochen ursprünglich die gleiche Länge besessen haben, können wir, wenn mindestens zwei Knochenpaare vorliegen, mit Hilfe der Gleichungen des ebenen Formänderungszustandes ein zum ursprünglichen unverformten Zustand ähnliches Bild bestimmen, dagegen müssen zur Berechnung der Formänderungen (d. h. des Bildmaßstabes) zusätzliche Überlegungen oder Beobachtungen beigezogen werden.

2. Der ebene Formänderungszustand bei grossen Formänderungen:

Der Formänderungszustand eines ursprünglich rechteckigen Flächenelementes $dx \cdot dy$ sei durch die spezifischen Dehnungen ε_x und ε_y in zwei senkrecht aufeinander stehenden Richtungen x und y und durch den Schiebungswinkel γ_{xy} gegeben. Die Länge der unter dem Winkel φ geneigten Diagonale (Richtung u) ergibt sich nach Abb. 2 mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes:

$$(1 + \varepsilon_u)^2 = [(1 + \varepsilon_x) \cdot dx - (1 + \varepsilon_y) \cdot dy \cdot \sin \gamma_{xy}]^2 + (1 + \varepsilon_y)^2 \cdot dy^2 \cdot \cos^2 \gamma_{xy}.$$

Durch Ausmultiplizieren und mit

$$\begin{aligned} ds \cdot \cos \varphi &= dx & ds \cdot \sin \varphi &= dy \\ \sin^2 \gamma_{xy} + \cos^2 \gamma_{xy} &= 1 \end{aligned}$$

erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_u)^2 &= (1 + \varepsilon_x)^2 \cdot \cos^2 \varphi + (1 + \varepsilon_y)^2 \cdot \sin^2 \varphi \\ &\quad - 2 \cdot (1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot \sin \gamma_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Wir untersuchen noch die Winkeländerung zwischen zwei ursprünglich senkrecht aufeinanderstehenden Diagonalen u und v (Abb. 3):

Nach Abb. 2 ergibt sich für den Winkel ψ_u :

$$\begin{aligned} \sin \psi_u &= \frac{(1 + \varepsilon_y) \cdot \cos \gamma_{xy} \cdot \sin \varphi}{(1 + \varepsilon_u)}, \\ \cos \psi_u &= \frac{(1 + \varepsilon_x) \cdot \cos \varphi - (1 + \varepsilon_y) \cdot \sin \gamma_{xy} \cdot \sin \varphi}{(1 + \varepsilon_u)}, \end{aligned} \quad (2a)$$



Abb. 1

analog erhalten wir für den Winkel ψ_v :

$$\begin{aligned} \sin \psi_v &= \frac{(1 + \epsilon_x) \cdot \sin \varphi + (1 + \epsilon_y) \cdot \sin \gamma_{xy} \cdot \cos \varphi}{(1 + \epsilon_v)}, \\ \cos \psi_v &= \frac{(1 + \epsilon_y) \cdot \cos \gamma_{xy} \cdot \cos \varphi}{(1 + \epsilon_v)}. \end{aligned} \tag{2b}$$

Für die gesuchte Winkeländerung $\gamma_{uv} = \psi_v - \psi_u$ finden wir aus

$$\sin \gamma_{uv} = \sin(\psi_v - \psi_u) = \sin \psi_v \cdot \cos \psi_u - \cos \psi_v \cdot \sin \psi_u$$

durch Einsetzen der Werte aus den Gleichungen 2 und nach Ordnen die Beziehung

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon_u) \cdot (1 + \epsilon_v) \cdot \sin \gamma_{uv} &= [(1 + \epsilon_x)^2 - (1 + \epsilon_y)^2] \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ &+ (1 + \epsilon_x) \cdot (1 + \epsilon_y) \sin \gamma_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \tag{3}$$

Durch Einführung der Abkürzungen

$$e_i = (1 + \epsilon_i)^2 \text{ («Dehnungszahl»)}$$

$$g_{ik} = (1 + \epsilon_i) \cdot (1 + \epsilon_k) \cdot \sin \gamma_{ik} \text{ («Schiebungszahl»)}$$

lassen sich die Gleichungen 1 und 3 wesentlich einfacher schreiben. Beachten wir noch, dass wir die Dehnungszahl e_v mit

$$\begin{aligned} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) &= \cos \varphi \\ \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) &= -\sin \varphi \end{aligned}$$

direkt aus e_u anschreiben können, so finden wir

$$\begin{aligned} e_u &= e_x \cdot \cos^2 \varphi + e_y \cdot \sin^2 \varphi - 2g_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ e_v &= e_x \cdot \sin^2 \varphi + e_y \cdot \cos^2 \varphi + 2g_{xy} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ g_{uv} &= (e_x - e_y) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + g_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \tag{4}$$

Die durch die Gleichungen 4 dargestellten Zusammenhänge sind in der Bau- statik wohlbekannt; so gelten Gleichungen genau gleicher Form beispiels- weise auch für Normal- und Schubspannungen σ und τ für senkrecht auf-

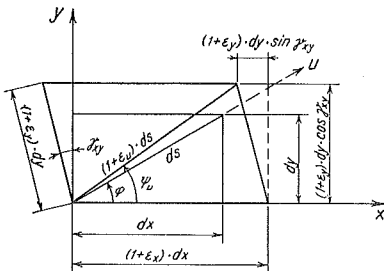


Abb. 2

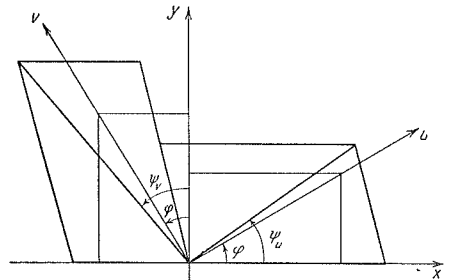


Abb. 3

einander stehende Schnittflächen einer Scheibe, für die Trägheits- und Zentrifugalmomente J und Z für senkrechte Axenkreuze oder auch, was hier vielleicht besonders bemerkenswert ist, für die spezifischen Dehnungen ε und die Schiebungen $\gamma/2$ bei kleinen Formänderungen. Die verschiedenen zeichnerischen oder rechnerischen Anwendungsformen dieses Gleichungssystems sind somit direkt auch auf unser Problem anwendbar. Wir beschränken uns hier auf die für die Lösung der gestellten Aufgabe notwendigen rechnerischen Beziehungen.

Mit den trigonometrischen Formeln

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

lassen sich die Gleichungen 4 auch in der Form schreiben

$$\begin{aligned} e_u &= \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{e_x - e_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - g_{xy} \cdot \sin 2\varphi, \\ e_v &= \frac{e_x + e_y}{2} - \frac{e_x - e_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + g_{xy} \cdot \sin 2\varphi, \\ g_{uv} &= \frac{e_x - e_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + g_{xy} \cdot \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Es existieren nun zwei senkrecht aufeinanderstehende Richtungen 1 und 2, die «Hauptrichtungen», die dadurch gekennzeichnet sind, dass einerseits die Dehnungszahlen e_1 und e_2 extreme Werte annehmen und dass andererseits die zugehörige Schiebungszahl g_{12} verschwindet. Aus der letzten der Gleichungen 5 finden wir für den zugehörigen Winkel φ_0 zwischen der x -Axe und der ersten Hauptrichtung die Beziehung

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = -\frac{2g_{xy}}{e_x - e_y}. \quad (6)$$

Die zugehörigen Dehnungszahlen e_1 und e_2 folgen ebenfalls aus Gleichung 5 durch Einsetzen von $\operatorname{tg} 2\varphi_0$ in die Beziehungen

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}}, \quad \sin 2\varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_0}};$$

wir erhalten damit

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(e_x - e_y)^2 + 4g_{xy}^2} \\ e_2 &= \frac{e_x + e_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(e_x - e_y)^2 + 4g_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Selbstredend gelten die Gleichungen 5 auch, wenn wir sie auf die Hauptrichtungen orientieren, d. h. den Winkel

$$\vartheta = \varphi - \varphi_0$$

eingeführen; für die Dehnungszahl e_u ergibt sich insbesondere der einfache Zusammenhang

$$e_u = \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{e_1 - e_2}{2} \cdot \cos 2\vartheta. \quad (8)$$

Damit sind die zur Lösung unseres Problems notwendigen Grundlagen, soweit der ebene Formänderungszustand sie uns liefern kann, zusammengestellt.

3. Die Auswertung:

Für die Auswertung stehen uns vier Paare zusammengehöriger Knochen zur Verfügung; sie sind in Abb. 4 schematisch herausgezeichnet und auf eine grundsätzlich frei wählbare, hier mit dem Knochen a_1 zusammengelegte x -Achse orientiert. Die gemessenen Längen und Winkel sind folgende:

Ulna	Länge $a_1 = 3.55$ cm, Winkel $\varphi = 0^\circ$
	» $a_2 = 2.80$ » » $\varphi = 49.5$
Coracoid	» $b_1 = 2.24$ » » $\varphi = 169$
	» $b_2 = 1.98$ » » $\varphi = 29.5$
Unterkiefer	» $c_1 = 3.55$ » » $\varphi = 150.5$
	» $c_2 = 3.20$ » » $\varphi = 132$
Hand	» $d_1 = 2.30$ » » $\varphi = 40$
	» $d_2 = 2.10$ » » $\varphi = 100.5$

Da wir den Winkel φ nur für den vorliegenden verformten Zustand kennen, müssen wir die Auswertung auf diesen orientieren; wir suchen also diejenigen Formänderungen, die vom verformten Zustand zurück auf den unverformten führen.

Damit ist z. B. für Stab a_1 die Dehnungszahl mit dem Wert

$$e_{a_1} = \frac{a_0^2}{a_1^2}$$

anzuschreiben und nach Gleichung 4 ergeben sich für die ursprüngliche Länge a_0 des ersten Knochenpaares die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} a_0^2 &= a_1^2 \cdot (e_x \cdot \cos^2 \varphi_1 + e_y \cdot \sin^2 \varphi_1 - g_{xy} \cdot 2 \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1), \\ a_0^2 &= a_2^2 \cdot (e_x \cdot \cos^2 \varphi_2 + e_y \cdot \sin^2 \varphi_2 - g_{xy} \cdot 2 \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Analoge Gleichungen ergeben sich auch für die übrigen Knochenpaare. Durch paarweises Gleichsetzen und Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte erhalten wir daraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 9.296 \cdot e_x - 4.533 \cdot e_y + 7.744 \cdot g_{xy} = 0, \\ \text{b) } & 1.865 \cdot e_x - 0.767 \cdot e_y + 5.241 \cdot g_{xy} = 0, \\ \text{c) } & 4.964 \cdot e_x - 2.601 \cdot e_y + 0.620 \cdot g_{xy} = 0, \\ \text{d) } & 2.958 \cdot e_x - 2.078 \cdot e_y - 6.790 \cdot g_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Aus je zweien dieser vier Gleichungen können wir nun die Verhältnisse

$$\frac{e_y}{e_x} \quad \text{und} \quad \frac{g_{xy}}{e_x}$$

berechnen. Dabei ergeben sich jedoch je nach Wahl dieser zwei Gleichungen wegen der unvermeidbaren Ungenauigkeiten der gemessenen Längen und Winkel etwas verschiedene Werte. Um möglichst zuverlässige Mittelwerte zu erhalten, berücksichtigen wir alle möglichen Zweierkombinationen der vier Gleichungen 10 und finden

$$e_y = 1.844 \cdot e_x, \quad g_{xy} = -0.100 \cdot e_x. \quad (11)$$

Damit sind aus Gleichung 6 mit

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_o = - \frac{-2 \cdot 0.100}{1.000 - 1.844} = -0.237$$

$$\varphi_o = -6^\circ 40' \cong -6.5^\circ$$

die Richtungen der beiden Haupttaxen gegeben und die Hauptdehnungszahlen folgen aus Gleichung 7 zu

$$e_{1,2} = e_x \cdot (1.422 \mp 0.434);$$

ebenso liefert uns Gleichung 8 die Dehnungszahl für irgendeine auf die Haupttaxe 1 orientierte Axe u

$$e_u = e_x \cdot (1.422 - 0.434 \cdot \cos 2 \theta). \quad (12)$$

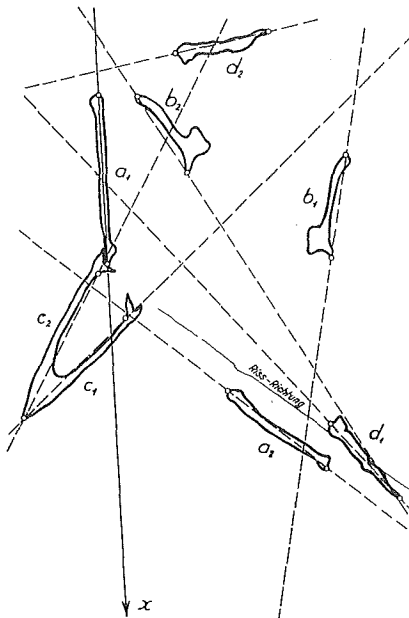


Abb. 4

Aus den Gleichungen 9 erhalten wir durch Einsetzen von e_y und g_{xy} nach Gleichung 11 die Werte

$$\begin{aligned} a_o^2 &= 12.501 \cdot e_x \\ b_o^2 &= 5.021 \cdot e_x \\ c_o^2 &= 14.049 \cdot e_x \\ d_o^2 &= 7.754 \cdot e_x \end{aligned} \quad (13)$$

als Mittel aus je zwei Gleichungen.

Damit besitzen wir alle Zahlenwerte, die uns die Gleichungen des ebenen Formänderungszustandes liefern; diese Zahlenwerte erlauben uns, ein ähnliches Bild des unverformten Zustandes in einem zunächst unbestimmten Maßstab zu zeichnen.

Für die Bestimmung der Dehnungszahl e_x und damit des Maßstabes der gesuchten Abbildung kommt uns nun ein glücklicher Zufall zu Hilfe: im Grundmaterial des Originals zu Abb. 1 sind einige durch Einlagerung von karbonatischem Material verheilte Risse vorhanden, die auf dem Röntgenbild besonders gut sichtbar sind. Die Rissrichtung ist in Abb. 4 ebenfalls eingetragen; sie verläuft mit sehr kleinen Abweichungen ($\sim \pm 1^\circ$) im Mittel unter einem Winkel von 51.5° gegen die x -Axe und damit unter 58° gegen die Hauptaxe 1.

Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. P. NIGGLI verlaufen derartige Risse, die häufig auch paarweise vorkommen, in derjenigen Richtung ϑ_o , die keine Dehnung aufweist oder in der, mit unseren Bezeichnungen, die Dehnungszahl $e = 1$ ist. Nach Gleichung 12 ist somit

$$1.00 = e_x (1.422 - 0.434 \cdot \cos 2\vartheta_o);$$

mit $\vartheta_o = 58^\circ$, $2\vartheta_o = 116^\circ$, $\cos 116^\circ = -0.4384$ wird somit

$$e_x = \frac{1.000}{1.612} = 0.620.$$

Damit finden wir die absoluten Werte

$$\begin{aligned} e_1 &= 0.613, & e_2 &= 1.151 \\ e_u &= 0.882 - 0.269 \cdot \cos 2\vartheta \end{aligned} \quad (14)$$

sowie

$$\begin{aligned} a_o^2 &= 7.751 \text{ cm}^2, & a_o &= 2.784 \text{ cm}, \\ b_o^2 &= 3.113 \text{ cm}^2, & b_o &= 1.764 \text{ cm}, \\ c_o^2 &= 8.710 \text{ cm}^2, & c_o &= 2.951 \text{ cm}, \\ d_o^2 &= 4.807 \text{ cm}^2, & d_o &= 2.192 \text{ cm}. \end{aligned}$$

In Abb. 5 sind die Beobachtungswerte e ,

$$e_i = \frac{a_o^2}{a_i^2},$$

mit den nach Gleichung 14 berechneten Werten verglichen. Die Überein-

stimmung ist vorzüglich und rechtfertigt damit wohl die stillschweigend getroffene Voraussetzung, dass die (offenbar verschieden grossen, aber an sich verhältnismässig kleinen) Verformungswiderstände der Knochen vernachlässigt werden dürfen. Die Abb. 5 stellt eine Kontrolle der Abbildungsähnlichkeit dar.

Zur Beurteilung der für die Maßstabsbestimmung beigezogenen Rissrichtung sei noch auf folgendes hingewiesen:

Aus den Dehnungswerten e_1 und e_2 können wir nun auch die spezifischen Dehnungen berechnen. Beziehen wir diese auf den ursprünglichen, statt auf den verformten Zustand, so ist

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{e_1}} - 1 = 0,277,$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{e_2}} - 1 = -0,068.$$

Es dürfte somit offensichtlich ein annähernd einaxiger Spannungszustand die Verformung verursacht haben; damit beträgt die Poissonsche Querdehnungszahl

$$m = \frac{0,277}{0,068} \approx 4,1.$$

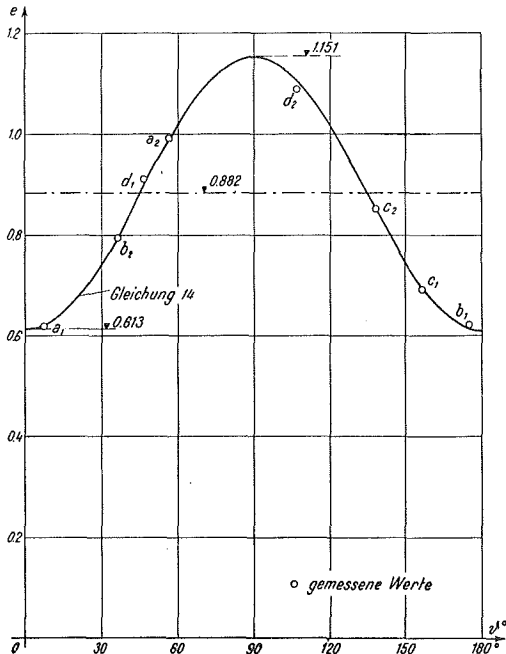


Abb. 5

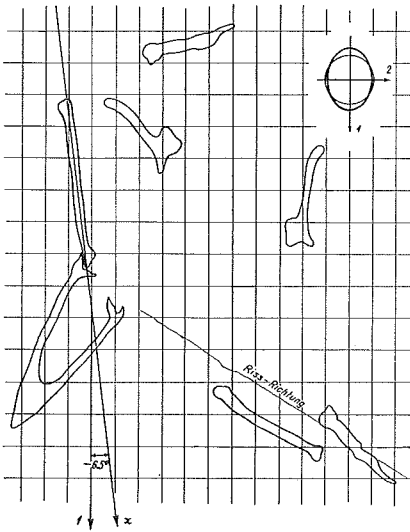


Abb. 6

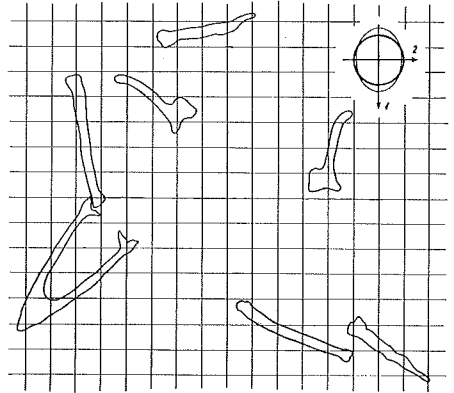


Abb. 7

Dieser Wert stimmt gut mit den in den technischen Handbüchern für m angegebenen Werten überein; so ist nach dem Taschenbuch «Hütte», Band I

für Granit $m = 4 \div 5$,

für Marmor $m = 3.6$.

Diese Querdehnungszahl m , bezogen auf die gesamten Verformungen, ist nun offenbar für die Lage der Rissrichtung, längs der die Dehnungen verschwinden, von massgebender Bedeutung. Für kleine Dehnungen ist beim einaxigen Spannungszustand der Winkel ϑ_0 sogar durch die Querdehnungszahl m allein bestimmt. Aus

$$\text{folgt} \quad 0 = \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \vartheta_0 - \frac{\varepsilon_1}{m} \cdot \sin^2 \vartheta_0$$

$$\text{tg}^2 \vartheta_0 = m.$$

Für rein plastische, jedoch als klein vorausgesetzte Verformungen ist mit $m = 2$

$$\text{tg}^2 \vartheta_0 = 2.0, \quad \vartheta_0 = 54^\circ 44' \cong 55^\circ.$$

Dies ist genau der Wert, den P. P. BIJLAARD¹⁾ für die Richtung der Fließlinien bei örtlicher plastischer Verformung für verschwindende plastische Dehnung auf anderem Wege findet. Allerdings ist diese Theorie auf unseren Fall nicht mehr übertragbar, weil wir es hier mit grossen Verformungen zu tun haben, bei denen zwischen unverformtem und verformtem Zustand beträchtliche Winkeländerungen eintreten, die wir beachten müssen.

¹⁾ P. P. BIJLAARD: Theory of local plastic deformations. Abh. I. V.B.H., Band 6, 1940/41.
— Grundlegende Betrachtungen zum Ausbeulen der Platten und Schalen im plastischen Bereich. Mitt. Inst. f. Baustatik, E.T.H., Nr. 21, 1948.

Dass längs der Rissrichtung Verschiebungen stattgefunden haben, ist aus Abb. 1 ersichtlich: Elle und Speiche a_2 , deren Richtung praktisch mit ϑ_0 übereinstimmt, zeigen, im Vergleich zu a_1 , eine deutlich erkennbare gegenseitige Verschiebung, die wenigstens eine generelle Bestätigung unserer Überlegungen darstellt.

Der ursprüngliche, unverformte Zustand zu Abb. 1 kann nun leicht zeichnerisch bestimmt werden. Legen wir auf den verformten Zustand ein aus sich rechtwinklig kreuzenden und auf die Hauptaxen bezogenen Geraden bestehendes Netz mit den beiden Verzerrungen

$$\bar{\varepsilon}_1 = 0.277, \quad \bar{\varepsilon}_2 = -0.068.$$

(Abb. 6), so kann durch Übertragung in das entsprechende unverzerrte Netz der ursprüngliche Zustand des Bildes Punkt für Punkt bestimmt werden (Abb. 7). Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Zum Schluss möchte ich Herrn Prof. PEYER herzlich danken dafür, dass er mir Gelegenheit gegeben hat, an der Lösung dieses reizvollen Problems des Glarner Urvogels mitzuhelfen.
