Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen

Von

HEINZ BACHMANN (Meilen)

§ 1 Einleitung

1. In dieser Abhandlung bewegen wir uns immer innerhalb der Theorie der CANTORschen Ordnungszahlen. Wir wollen folgende Bezeichnungsweise annehmen:

1) Subtraktion von Ordnungszahlen: Sind x und y Ordnungszahlen mit $y \leqq x$, so soll $x - y$ die Ordnungszahl sein, die man erhält, wenn man y von vorne von x abzieht, so dass also

$$y + (x - y) = x$$

Man nennt $x - y$ einen Rest von x (wenn $y < x$).

2) Multiplikation von Ordnungszahlen: Für beliebige Ordnungszahlen x und y soll das Produkt $x \cdot y$ immer die Bedeutung haben, dass x y-mal als Summand gesetzt wird.

3) Die Anfangszahlen der Zahlklassen: Die natürlichen Zahlen und die Null bilden die erste Zahlklasse, die abzählbar unendlichen Wohlordnungstypen die zweite Zahlklasse usw.; für $k \geqq 2$ sei ω_{k-2} die Anfangszahl der k. Zahlklasse. Zudem gebrauchen wir die üblichen Bezeichnungen

$$\omega_0 = \omega$$
$$\omega_1 = \Omega$$

4) Die Operation der Limesbildung: Hat man eine Menge von Ordnungszahlen, so ist die kleinste Ordnungszahl x, für die $y \leqq x$ für alle Ordnungszahlen y dieser Menge gilt, der Limes dieser Menge von Ordnungszahlen. Ist $x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots$ eine monotone, nicht fallende Folge $\{x_\nu\}$ von Ordnungszahlen x_ν, deren Typus eine Limeszahl λ ist (d. h. ν durchläuft alle Ordnungszahlen kleiner als λ, $0 \leqq \nu < \lambda$), so schreiben wir für ihren Limes

$$x = \operatorname*{Lim}_{\nu < \lambda} x_\nu$$

5) Dazu nehmen wir die drei folgenden Definitionen:

a) Gibt es zur Ordnungszahl x eine Ordnungszahl x', so dass $x = x' + 1$, so heisst x von erster Art.

Ist $x \neq 0$ und nicht von erster Art, so ist x eine Limeszahl. Dann kann x Limes von aufsteigenden Folgen verschiedener Typen λ sein; jedoch muss bei $x = \operatorname*{Lim}_{\nu < \lambda} x_\nu$ die Limeszahl λ der Ungleichung $\omega \leqq \lambda \leqq x$ genügen.

b) x heisst von zweiter Art, wenn es eine aufsteigende Folge vom Typus ω gibt, deren Limes x ist.

Damit ist die folgende andere Definition, die wir oft gebrauchen werden, äquivalent:

x heisst von zweiter Art, wenn es eine aufsteigende Folge vom Typus λ gibt, deren Limes x ist, und wobei λ eine Limeszahl der zweiten Zahlklasse ist.

c) x heisst von dritter Art, wenn es eine aufsteigende Folge vom Typus Ω gibt, deren Limes x ist.

Die beiden letzten Definitionen 5) b) und 5) c) geben eine ausschöpfende und eindeutige Einteilung der Limeszahlen der dritten Zahlklasse. Denn, ist x eine solche, so kann nicht

$$x = \operatorname*{Lim}_{\mu<\Omega} x_\mu = \operatorname*{Lim}_{\nu<\lambda} y_\nu,\ \lambda < \Omega$$

sein, wobei die beiden Folgen $\{x_\mu\}$ *und* $\{y_\nu\}$ aufsteigend seien. Wäre dies nämlich der Fall, so könnte man jeder Zahl y_ν das kleinste x_{μ_ν} grösser als y_ν zuordnen, also jeder Zahl $\nu < \lambda$ eine Zahl $\mu_\nu < \Omega$, und $\{\mu_\nu\}$ wäre eine monotone, nicht fallende Folge mit $\operatorname*{Lim}_{\nu<\lambda} \mu_\nu = \Omega$, was aber wegen $\lambda < \Omega$ und $\mu_\nu < \Omega$ nicht erfüllt sein kann.

2. Das Problem der ausgezeichneten Folgen, das wir hier betrachten wollen, ist das folgende Problem: Jeder Limeszahl y der zweiten Zahlklasse eine eindeutige aufsteigende Folge $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$ vom Typus ω zuzuordnen, so dass $y = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} y_n$.

Dieses Problem ist deshalb von Interesse, weil es mit dem Kontinuumproblem zusammenhängt. Denn, ist das Problem gelöst, so kann man nach dem Vorgehen von G. H. Hardy[1]) eine effektive Wohlordnung einer überabzählbaren Teilmenge des Kontinuums angeben, indem man jeder Ordnungszahl $y < \Omega$ eindeutig eine zahlentheoretische Funktion $f_y(x)$ zuordnen kann durch die Festsetzungen:

Es sei $f_0(x) = 0$.

Ist $y = y' + 1$, so sei $f_y(x) = f_{y'}(x) + 1$.

Ist y eine Limeszahl der zweiten Zahlklasse und $\{y_n\}$ ihre ausgezeichnete Folge, so sei $f_y(x) = f_{y_x}(x)$.

Der wichtigste Ansatz zur Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen ist derjenige von O. Veblen[2]). Veblen löst das Problem für einen grossen Abschnitt der zweiten Zahlklasse, indem er eine Folge vom Typ $\Omega^\Omega + 2$ von Normalfunktionen[3]) aufstellt und mit ihrer Hilfe ausgezeichnete Folgen für alle Limeszahlen kleiner als eine gewisse, von Veblen mit $E(1)$ be-

[1]) G. H. Hardy (1), p. 87—94.

[2]) O. Veblen (2), p. 280—292.

[3]) Definition siehe in Nr. 3 dieses Paragraphen.

zeichnete Zahl der zweiten Zahlklasse definiert. Dabei erwähnt VEBLEN noch die Möglichkeit einer weiteren Fortsetzung dieses Verfahrens[4]).

Sodann lösen CHURCH und KLEENE[5]) das Problem für einen noch grösseren Abschnitt der zweiten Zahlklasse, indem sie jeder Ordnungszahl dieses Abschnitts eine formale Darstellung zuordnen. Man kann jedoch zeigen, dass dieses Verfahren deshalb an einer Stelle aufhört, weil man dabei auf eine Normalfunktion kommt, über deren erste kritische Zahl[3]) man mit dieser Methode nicht gelangen kann. Es muss bemerkt werden, dass man mit einer solchen formalen Methode prinzipiell nicht ganz zum Ziele kommen kann; man kann nicht jeder Limeszahl der zweiten Zahlklasse eine Formel zuordnen, weil jeder Formalismus nur einen höchstens abzählbaren Bereich darstellt.

3. In dieser Arbeit wollen wir nach dem vorbereitenden § 2 vom Verfahren von VEBLEN ausgehen und dann (§ 4) dieses weiter fortsetzen (jedoch nicht bis zu einer völligen Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen). Hierauf (§ 5) wollen wir einige prinzipielle Betrachtungen über die Möglichkeit der völligen Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen durch weitere Fortsetzung des Verfahrens von VEBLEN machen und dann (§ 6) dazu einige Analogien im Bereich der zahlentheoretischen Funktionen aufstellen. Zum Schluss (§ 7) werden wir das Problem der ausgezeichneten Folgen auf äquivalente andere Probleme zurückführen, die mit Normalfunktionen zusammenhängen.

Wir nehmen mit VEBLEN die beiden folgenden Definitionen:

1) Eine Funktion $\varphi(x)$ heisst Normalfunktion, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Argumentmenge besteht aus allen Ordnungszahlen x mit $1 \leqq x < \omega_k$, wobei $k > 0$ eine feste Ordnungszahl ist; die Wertmenge ist eine Teilmenge der Argumentmenge.

b) Monotonität: Für beliebige Ordnungszahlen x_1 und x_2 der Argumentmenge mit $x_1 < x_2$ ist $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.

c) Stetigkeit: Ist x eine Limeszahl $< \omega_k$, so ist $\varphi(x) = \operatorname*{Lim}_{x' < x} \varphi(1 + x')$. (Wir schreiben nicht $\operatorname*{Lim}_{x' < x} \varphi(x')$, weil $\varphi(0)$ nicht definiert ist.)

Für eine so definierte Normalfunktion wollen wir die Bezeichnung Normalfunktion k. Klasse einführen; in analoger Weise wollen wir die monoton steigenden zahlentheoretischen Funktionen (die ebenso definiert sind wie die Normalfunktionen, aber mit $k = 0$ und unter Wegfallen der Stetigkeitsbedingung) als Normalfunktionen nullter Klasse bezeichnen.

---

[4]) O. VEBLEN (2), p. 292.

[5]) A. CHURCH und S. C. KLEENE (3), p. 11—21.

Für jede Normalfunktion φ gilt

$$\varphi(x) \geqq x$$

für alle x der Argumentmenge $(1 \leqq x < \omega_k)$ [6]), ferner

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geqq x_2 - x_1$$

für beliebige Ordnungszahlen x_1, x_2 mit $1 \leqq x_1 < x_2 < \omega_k$ (denn $\varphi(x_1 + \xi) - \varphi(x_1)$ ist eine Normalfunktion von ξ; also ist $\varphi(x_1 + \xi) - \varphi(x_1) \geqq \xi$; setzt man $\xi = x_2 - x_1$, so folgt die Behauptung), ferner

$$\operatorname*{Lim}_{x < \omega_k} \varphi(1 + x) = \omega_k .$$

2) Ist $\varphi(x)$ eine Normalfunktion k. Klasse, so heissen die Ordnungszahlen x, die der Gleichung $\varphi(x) = x$ genügen, die kritischen Zahlen von φ. VEBLEN beweist [7]), dass es immer kritische Zahlen gibt, und dass die Menge der kritischen Zahlen wieder die Wertmenge einer Normalfunktion k. Klasse bildet, der sogenannten Ableitung φ' von φ.

Zudem setzen wir noch die folgenden Bezeichnungen fest: Hat man eine Normalfunktion $\varphi(x)$, so wollen wir unter $\varphi^n(x)$ (wobei $0 \leqq n < \omega$) die n-fache Iteration von φ verstehen, die so definiert sei:

$$\varphi^0(x) = x$$
$$\varphi^1(x) = \varphi(x)$$
$$\varphi^{n+1}(x) = \varphi(\varphi^n(x))$$

Mit $V\varphi$ werde die Wertmenge von φ bezeichnet. Die Durchschnittsbildung von Mengen werde mit dem Zeichen D angedeutet; so deutet z. B. $\underset{\nu<\lambda}{D}\, V\varphi_\nu$ den Durchschnitt der Wertmengen einer Folge vom Typus λ von Normalfunktionen φ_ν.

§ 2 Drei Sätze über Normalfunktionen

1. Wir setzen im folgenden immer solche Normalfunktionen $\varphi(x)$ von k. Klasse voraus, deren Wertmengen aus lauter Limeszahlen bestehen. Wir wollen in diesem Paragraphen drei Sätze zusammenstellen, die wir später zur Definition von ausgezeichneten Folgen verwenden werden. Aus der Definition der Normalfunktion folgt sofort:

Satz 1: Ist x eine Limeszahl $< \omega_k$ und $0 < x_0 < x_1 < \ldots$ eine aufsteigende Folge $\{x_\nu\}$ von einem Typus λ, der eine Limeszahl sei, mit $x = \operatorname*{Lim}_{\nu<\lambda} x_\nu$, so ist $\varphi(x) = \operatorname*{Lim}_{\nu<\lambda} \varphi(x_\nu)$, und die unter dem Limesoperator stehende Folge $\{\varphi(x_\nu)\}$ ist auch eine aufsteigende.

2. Nun liegt es nahe, ähnliche Sätze für diejenigen Werte gewisser Normal-

[6]) O. VEBLEN (2), Theorem 3, p. 283.

[7]) O. VEBLEN (2), Theorem 4, p. 283.

funktionen aufzustellen, deren Argument von erster Art ist, d. h. aufsteigende Folgen für die Werte $\varphi(x+1)$ einer Normalfunktion anzugeben.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass wir eine Normalfunktion φ' haben, die die Ableitung einer gegebenen Normalfunktion φ ist. VEBLEN zeigt[8]), dass man alle Werte von φ' aus den Ausdrücken $\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \varphi^n(x)$ erhält, wenn man für x alle Argumente einsetzt; für verschiedene x können dabei diese Ausdrücke gleich ausfallen. Etwas Genaueres darüber sagt ein weiterer, von VEBLEN angegebener Satz[9]) aus, von dem wir aber nur den folgenden Spezialfall verwenden werden:

Satz 2: Es gilt

$$\varphi'(1) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \varphi^n(1);$$

$$\varphi'(x+1) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \varphi^n(\varphi'(x)+1) \text{ für alle } x \text{ mit } 1 \leqq x < \omega_k;$$

die Folgen unter den Limesoperatoren sind aufsteigend.

Beweis: Schreiben wir vorübergehend $\alpha = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \varphi^n(\varphi'(x)+1)$, so ist für $1 \leqq x < \omega_k$

$$\varphi'(x) < \varphi'(x) + 1 \leqq \varphi'(x+1)$$

also (wegen der Monotonität von φ, und weil die Werte von φ' kritische Zahlen von φ sind)

$$\varphi(\varphi'(x)) = \varphi'(x) < \varphi(\varphi'(x)+1) \leqq \varphi(\varphi'(x+1)) = \varphi'(x+1)$$

$$\varphi^n(\varphi'(x)) = \varphi'(x) < \varphi^n(\varphi'(x)+1) \leqq \varphi^n(\varphi'(x+1)) = \varphi'(x+1)$$

also

$$\varphi'(x) < \alpha \leqq \varphi'(x+1)$$

Da α zudem kritische Zahl von φ ist, also in $V\varphi'$ liegt, ist $\alpha = \varphi'(x+1)$. Die Folge für α ist aufsteigend; denn, weil $V\varphi$ nur aus Limeszahlen besteht, ist

$$\varphi(\varphi'(x)+1) > \varphi'(x) + 1$$

also

$$\varphi^2(\varphi'(x)+1) > \varphi(\varphi'(x)+1) \text{ usw.}$$

Der Beweis für den ersten Teil der Behauptung, $\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \varphi^n(1) = \varphi'(1)$, kann auf genau dieselbe Weise durchgeführt werden; man hat nur im obigen Beweis überall 0 an Stelle von x, $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ zu setzen.

3. Sodann betrachten wir, ausgehend von einer Normalfunktion φ_0 k. Klasse, eine Folge von einem gewissen Typus λ (wobei λ eine Limeszahl $< \omega_k$ sei) von Normalfunktionen φ_μ k. Klasse (μ durchläuft alle Ordnungszahlen kleiner als λ) mit der Eigenschaft:

I) Für jedes μ mit $1 \leqq \mu < \lambda$ ist $V\varphi_\mu$ Teilmenge aller Wertmengen $V\varphi'_\nu$ der Ableitungen φ'_ν mit $0 \leqq \nu < \mu$.

---

[8]) O. VEBLEN (2), Beweis zu Theorem 4, p. 283.

[9]) O. VEBLEN (2), Coroll. 1 zu Theorem 4, p. 284.

VEBLEN zeigt[10]), dass dann der Durchschnitt der Wertmengen dieser Normalfunktionen wieder die Wertmenge einer Normalfunktion ψ derselben Klasse ist:

$$\underset{\mu<\lambda}{D}\, V\varphi_\mu = V\psi$$

Für diese gilt nun:

Satz 3: Für jede aufsteigende Folge $\{\lambda_\nu\}$, deren Typus eine Limeszahl π ist, so dass $\lim\limits_{\nu<\pi} \lambda_\nu = \lambda$ (also $\pi \leqq \lambda$), ist

$$\psi(1) = \lim_{\nu<\pi} \varphi_{\lambda_\nu}(1)$$

$$\psi(x+1) = \lim_{\nu<\pi} \varphi_{\lambda_\nu}(\psi(x)+1) \text{ für alle } x \text{ mit } 1 \leqq x < \omega_k;$$

die Folgen unter den Limesoperatoren sind wieder aufsteigend.

Beweis: Wir nehmen vorübergehend die Abkürzung

$$\alpha_\nu = \varphi_{\lambda_\nu}(\psi(x)+1) \quad (\text{für } 0 \leqq \nu < \pi)$$

Dann ist für $1 \leqq x < \omega_k$ wegen $\psi(x) + 1 \leqq \psi(x+1)$ (ferner wegen der Monotonität von φ_{λ_ν}, und weil die Werte von ψ kritische Zahlen von φ_{λ_ν} sind)

$$\psi(x) + 1 \leqq \alpha_\nu \leqq \varphi_{\lambda_\nu}(\psi(x+1)) = \psi(x+1)$$

also

$$\psi(x) + 1 \leqq \lim_{\nu<\pi} \alpha_\nu \leqq \psi(x+1)$$

Ist ν fest, aber beliebig $< \pi$, so liegen alle $\alpha_{\nu'}$ für $\nu \leqq \nu' < \pi$ in $V\varphi_{\lambda_\nu}$, also wegen $\pi < \omega_k$ auch $\lim\limits_{\nu<\pi} \alpha_\nu$ in $V\varphi_{\lambda_\nu}$. Da dies für beliebige $\nu < \pi$ gilt, ist $\lim\limits_{\nu<\pi} \alpha_\nu$ in $V\psi$; also wegen des weiter oben erhaltenen Resultats $\lim\limits_{\nu<\pi} \alpha_\nu = \psi(x+1)$.

Die Folge $\{\alpha_\nu\}$ ist aufsteigend: Offensichtlich ist die Folge nicht fallend. Zudem ist $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ für $0 \leqq \nu < \pi$; denn weil wegen Voraussetzung I) $\alpha_{\nu+1}$ eine kritische Zahl von φ_{λ_ν} ist, ist

$$\alpha_{\nu+1} = \varphi_{\lambda_\nu}(\alpha_{\nu+1});$$

wäre $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+1}$, so wäre also

$$\varphi_{\lambda_\nu}(\psi(x)+1) = \varphi_{\lambda_\nu}(\alpha_{\nu+1})$$

also

$$\psi(x) + 1 = \alpha_{\nu+1}$$

was unmöglich ist, weil $\alpha_{\nu+1}$ eine Limeszahl ist.

Der erste Teil der Behauptung, $\lim\limits_{\nu<\pi} \varphi_{\lambda_\nu}(1) = \psi(1)$, wird auf genau dieselbe Weise bewiesen; man hat nur im obigen Beweis die Symbole x und $\psi(x)$ durch 0 zu ersetzen.

4. Hat man eine Folge vom Typus ω_k von Normalfunktionen φ_μ k. Klasse (μ durchläuft alle Ordnungszahlen kleiner als ω_k), wobei für alle μ mit $1 \leqq \mu < \omega_k$ folgendes gilt:

II) a) $V\varphi_\mu$ ist Teilmenge aller $V\varphi'_\nu$ mit $0 \leqq \nu < \mu$,

b) Ist μ eine Limeszahl $< \omega_k$, so ist $V\varphi_\mu = \underset{\nu<\mu}{D}\, V\varphi_\nu$,

---

[10]) O. VEBLEN (2), Theorem 5, p. 284.

so ist die aus den Anfangszahlen gebildete Funktion

$$\chi(x) = \varphi_x(1)$$

wieder eine Normalfunktion k. Klasse. Dies wird von VEBLEN für den Spezialfall der transfiniten Folge der Ableitungen einer Normalfunktion bewiesen[11]); es gilt aber unter der Voraussetzung II) allgemein; denn nach Satz 3 ist, wenn μ eine Limeszahl $< \omega_k$, $\varphi_\mu(1) = \operatorname*{Lim}_{\nu<\mu} \omega_\nu(1)$.

Dagegen ist für festes $x > 1$ $\varphi_\mu(x)$ keine Normalfunktion von μ; denn dann ist $\varphi_\mu(x) > \varphi_\mu(1) \geqq \mu$, also $\varphi_\mu(x) > \mu$ für $1 \leqq \mu < \omega_k$.

§ 3 Das Verfahren von VEBLEN in einer Darstellung, die eine Verallgemeinerung ermöglicht

1. VEBLEN stellt eine wohlgeordnete, transfinite Folge vom Typus $\Omega^\Omega + 2$ (die wir mit $\mathfrak{F}_0$ bezeichnen wollen) von Normalfunktionen φ_η erster Klasse auf ($\eta \leqq \Omega^\Omega + 1$) und definiert mit Hilfe dieser Normalfunktionen und unter Verwendung der in den Sätzen von § 2 beschriebenen Eigenschaften ausgezeichnete Folgen für alle Limeszahlen $y < \varphi_{\Omega^\Omega+1}(1)$ ($= E(1)$ nach der Bezeichnungsweise von VEBLEN). Dabei stellt VEBLEN jede Limeszahl $< E(1)$ durch ein Symbol der Form $\Phi(1_1, 1_2 \ldots, x_\alpha \ldots x_\beta)$ dar, teilt diese Symbole in sieben Klassen ein und definiert für jede Limeszahl $< E(1)$, je nach der Klasse des zugehörigen Symbols in verschiedener Weise, eine ausgezeichnete Folge[12]). In diesen Definitionen sind die Sätze von § 2 enthalten; ihre Anwendung tritt aber nicht deutlich hervor. Wir wollen nun zunächst das Verfahren von VEBLEN statt mittels dieser Symbole in einer etwas anderen Darstellung durchführen, damit die Anwendung der Sätze von § 2 sichtbarer hervortritt und damit eine Verallgemeinerung des Verfahrens möglich wird. Diese Verallgemeinerung soll dann in § 4 durchgeführt werden.

Um das angekündigte Programm durchzuführen, müssen wir zuerst jeder Limeszahl $\eta \leqq \Omega^\Omega$ eine eindeutige aufsteigende Folge $\{\eta_x\}$ mit einem gewissen Typus τ_η zuordnen (wobei τ_η immer eine Limeszahl $\leqq \Omega$ sei), so dass $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$ (der Pfeil über dem Gleichheitszeichen bedeute, dass $\{\eta_x\}$ die eindeutig festgelegte, zu η gehörende Folge sein soll):

Es sei $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{\eta'<\eta} (1+\eta')$ für jede Limeszahl $\eta \leqq \Omega$, ferner $\Omega^\Omega \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\Omega} \Omega^{1+x}$.

Ist η eine andere Limeszahl des betrachteten Bereichs, so kann man η in eindeutiger Weise als endliche Summe

$$\eta = \sum_{i=0}^{n} \Omega^{x_i} \cdot y_i + z$$

---

11) O. VEBLEN (2), Coroll. 1 zu Theorem 6, p. 285.

12) O. VEBLEN (2), p. 291/92.

darstellen[13]), wobei $0 \leqq n < \omega$, $1 \leqq y_i < \Omega$, $0 \leqq z < \Omega$ und $\Omega > x_0 > x_1 > \ldots > x_n \geqq 1$ ist. Hier nehmen wir die folgenden Definitionen:

Ist z zweiter Art, so sei

$$\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{z' < z} \left(\sum_{i=0}^{n} \Omega^{x_i} \cdot y_i + (1 + z')\right) \qquad (Fall\ \alpha)$$

Es sei nun $z = 0$ vorausgesetzt, also

$$\eta = \sum_{i=0}^{n} \Omega^{x_i} \cdot y_i$$

Ist dann y_n zweiter Art, so sei

$$\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{y < y_n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Omega^{x_i} \cdot y_i + \Omega^{x_n} \cdot (1 + y)\right) \qquad (Fall\ \beta)$$

(Ist $n = 0$, so ist die Summe $\sum_{i=0}^{n-1} \ldots$ durch 0 zu ersetzen.)

Ist aber $y_n = y'_n + 1$, wobei $y'_n \geqq 0$, also

$$\eta = \sum_{i=0}^{n-1} \Omega^{x_i} \cdot y_i + \Omega^{x_n} \cdot y'_n + \Omega^{x_n}$$

so hat man die folgenden Unterfälle zu unterscheiden:

Ist dann x_n zweiter Art, so sei

$$\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x < x_n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Omega^{x_i} \cdot y_i + \Omega^{x_n} \cdot y'_n + \Omega^{1+x}\right) \qquad (Fall\ \gamma)$$

Ist $x_n = x'_n + 1$, wobei $x'_n \geqq 0$, so sei

$$\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{y < \Omega} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \Omega^{x_i} \cdot y_i + \Omega^{x_n} \cdot y'_n + \Omega^{x'_n} \cdot (1 + y)\right) \qquad (Fall\ \delta)$$

(wobei $\Omega^0 = 1$ gesetzt ist).

Wie wir sehen, ist somit das erste Glied η_0 jeder Folge $\{\eta_x\}$ grösser als 0; wir werden übrigens immer nur Folgen mit dieser Eigenschaft definieren (cf. Bemerkung 1 von § 4).

2. Wir können nun die Behauptung aufstellen: Es ist möglich, jeder Ordnungszahl $\eta \leqq \Omega^\Omega + 1$ eine Normalfunktion φ_η erster Klasse zuzuordnen, d. h. eine Folge $\mathfrak{F}_0$ vom Typus $\Omega^\Omega + 2$ von Normalfunktionen erster Klasse zu bilden, so dass die folgenden Eigenschaften für alle $\eta \leqq \Omega^\Omega + 1$ erfüllt sind:

1) a) $\varphi_0(x) = \omega^x$.

b) Ist $\eta = \eta' + 1$, so ist $\varphi_\eta = \varphi'_{\eta'}$.

c) Ist η zweiter Art und $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x < \tau_\eta} \eta_x$ (d. h. $\tau_\eta < \Omega$), so ist $V\varphi_\eta = \operatorname*{D}_{x < \tau_\eta} \varphi_{\eta_x}$.

(Durch die Angabe von $V\varphi_\eta$ ist natürlich die Funktion φ_η aus der eindeutigen ordnungstreuen Abbildung von $V\varphi_\eta$ auf die Argumentmenge $1 \leqq x < \omega_k$ eindeutig bestimmt.)

d) Ist η dritter Art und $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x < \Omega} \eta_x$ (d. h. $\tau_\eta = \Omega$), so ist $\varphi_\eta(x) = \varphi_{\eta_x}(1)$.

[13]) F. Hausdorff (4), p. 67.

2) Die Folgen $\{\eta_x\}$ von 1) haben folgende Eigenschaften (für alle x mit $0 \leqq x < \tau_\eta$, im Fall 1) d) speziell für alle x mit $0 \leqq x < \Omega$ geltend):

   a) Ist x zweiter Art, so ist η_x zweiter Art und $\eta_x \doteqdot \lim\limits_{x' < x} \eta_{x'}$ (d. h. die zu η_x gehörende Folge ist einfach die entsprechende Teilfolge der zu η gehörenden Folge, und $\tau_{\eta_x} = x$).

   b) Ist η' eine Limeszahl mit $\eta_x < \eta' \leqq \eta_{x+1}$, so gilt für das erste Glied η'_0 der zu η' gehörenden Folge $\eta'_0 \geqq \eta_x$.

3) Für die Funktionenfolgen $\{\varphi_{\eta_x}\}$ gilt:
   $\eta_x + 1 \to \eta_{x+1}$ für alle x mit $0 \leqq x < \tau_\eta$
   (Sind α, β Ordnungszahlen mit $\alpha < \beta$, so soll $\alpha \to \beta$ immer die Abkürzung sein für: $V\varphi_\eta$ ist Teilmenge von $V\varphi_\alpha$ für alle η mit $\alpha < \eta \leqq \beta$).

B e m e r k u n g : VEBLEN wählt als Ausgangsfunktion $\varphi_0(x) = 1 + x$; wir wählen aber $\varphi_0(x) = \omega^x$, weil wir von einer Wertmenge $V\varphi_0$ ausgehen wollen, die nur aus Limeszahlen besteht, und damit wir von einer Stelle ab dieselben Normalfunktionen erhalten, die VEBLEN benutzt. Zudem muss man φ_0 so wählen, dass man unter Voraussetzung der Kenntnis von ausgezeichneten Folgen für alle Zahlen von $V\varphi_0$ auch für alle andern Limeszahlen der zweiten Zahlklasse ausgezeichnete Folgen definieren kann. Für $\varphi_0(x) = \omega^x$ ist diese Eigenschaft erfüllt, wie wir sehen werden (§ 7). Man könnte als Ausgangsfunktion φ_0 eine beliebige andere Normalfunktion erster Klasse nehmen, für die diese Eigenschaft erfüllt ist.

B e w e i s d e r E x i s t e n z v o n $\mathfrak{F}_0$: Die Eigenschaften 2) sind erfüllt, wie aus den Definitionen der Folgen $\{\eta_x\}$ folgt. Für $\eta \leqq \Omega$ ist die Aufstellung der φ_η möglich, wie aus Nummer 3 und 4 von § 2 (mit $\omega_k = \Omega$) hervorgeht. Wir nehmen jetzt an, die φ_η seien aufgestellt für alle $\eta < \eta_0$, wo $\Omega < \eta_0 \leqq \Omega^\Omega + 1$, so dass die Bedingungen 1) 2) 3) für diese Normalfunktionen erfüllt sind, und zeigen, dass man dann φ_{η_0} bilden kann, so dass diese Bedingungen für alle $\eta \leqq \eta_0$ erfüllt sind:

a) Ist $\eta_0 = \eta'_0 + 1$, so setze man $\varphi_{\eta_0} = \varphi_{\eta'_0}'$.

b) Ist η_0 eine Limeszahl und $\eta_0 \doteqdot \lim\limits_{x < \tau_{\eta_0}} \eta_0^{(x)}$, so beweisen wir zunächst, dass 3) auch für die zu η_0 gehörende Funktionenfolge $\{\varphi_{\eta_0^{(x)}}\}$ erfüllt ist. Dies folgt direkt aus 2) b), das ja bereits auch für die Folge $\{\eta_0^{(x)}\}$ gilt:

Wir definieren für ein bestimmtes $x < \tau_{\eta_0}$ eine endlich fallende Folge $\{\zeta_n\}$:
Es sei $\zeta_0 = \eta_0^{(x+1)}$.

Ist $\eta_0^{(x)} + 1 < \zeta_n$ und $\zeta_n = \zeta'_n + 1$, so sei $\zeta_{n+1} = \zeta_n'$; dann ist also $\eta_0^{(x)} + 1 \leqq \zeta_{n+1} < \zeta_n$ und $\zeta_{n+1} \to \zeta_n$.

Ist $\eta_0^{(x)} + 1 < \zeta_n$ und ζ_n eine Limeszahl mit $\zeta_n \doteqdot \lim\limits_{y > \tau_{\zeta_n}} \zeta_n^{(y)}$, so sei $\zeta_{n+1} = \zeta_n^{(1)}$. Nach den Induktionsvoraussetzungen ist dann jedenfalls $\eta_0^{(x)} + 1 \leqq \zeta_{n+1}$

$< \zeta_n$ und $\zeta_{n+1} \rightarrow \zeta_n$ (denn $\zeta_n^{(0)} \geqq \eta_0^{(x)}$, ferner ist $V\varphi_\eta$ Teilmenge von $V\varphi_{\zeta_n^{(1)}}$ für $\zeta_n^{(1)} < \eta \leqq \zeta_n$).

Nach endlich vielen Regressionen kommt eine natürliche Zahl n_0 mit $\zeta_{n_0} = \eta_0^{(x)} + 1$; somit ist

$$\eta_0^{(x)} + 1 = \zeta_{n_0} \rightarrow \zeta_{n_0 - 1} \rightarrow \ldots \rightarrow \zeta_1 \rightarrow \zeta_0 = \eta_0^{(x+1)}$$

also

$$\eta_0^{(x)} + 1 \rightarrow \eta_0^{(x+1)}$$

Damit sind die Eigenschaften 2) 3) für die Folge $\{\eta_0^{(x)}\}$ und für die Funktionenfolge $\{\varphi_{\eta_0^{(x)}}\}$ bewiesen; daraus folgt, dass diese Folge $\{\varphi_{\eta_0^{(x)}}\}$ vom Typus τ_{η_0} von Normalfunktionen die Eigenschaften I) bzw. II) von § 2 hat. Man darf also definieren:

$$V\varphi_{\eta_0} = \underset{x < \tau_{\eta_0}}{D} V\varphi_{\eta_0^{(x)}} \text{ für } \eta_0 \text{ zweiter Art}$$

$$\varphi_{\eta_0}(x) = \varphi_{\eta_0^{(x)}}(1) \text{ für } \eta_0 \text{ dritter Art;}$$

wenn η_0 zweiter Art, so folgt $\varphi_{\eta_0}(1) \leqq \tau_{\eta_0}$.

Damit ist die Existenz von $\mathfrak{F}_0$ mittels transfiniter Induktion bewiesen ($\mathfrak{F}_0$ ist natürlich auch eindeutig).

Wir beweisen jetzt noch eine weitere Eigenschaft von $\mathfrak{F}_0$:

Hilfssatz: Für alle $\eta < \Omega^\Omega$ gilt: Ist η zweiter Art, $\eta \doteq \underset{x<\tau_\eta}{\mathrm{Lim}}\, \eta_x$ und $\varphi_\eta(1) = \tau_\eta$ (wobei τ_η der Typus der zu η gehörenden Folge ist) so existiert eine Ordnungszahl $\tilde{\eta}$ dritter Art mit $\eta < \tilde{\eta} \leqq \Omega^\Omega$ und $\tilde{\eta} \doteq \underset{x<\Omega}{\mathrm{Lim}}\, \tilde{\eta}_x$, so dass

$$\tilde{\eta}_x = \eta_x \text{ für alle } x < \tau_\eta$$

$$\tilde{\eta}_{\tau_\eta} = \eta$$

τ_η ist dann eine kritische Zahl von $\varphi_{\tilde{\eta}}$, d. h. τ_η liegt in $V\varphi_{\tilde{\eta}+1}$.

B e w e i s : Für $\eta < \Omega$ ist $\tilde{\eta} = \Omega$. Ist $\eta > \Omega$, so ist η zweiter Art in den Fällen α, β, γ (cf. oben). Im Falle α ist $\tilde{\eta} = \sum_{i=0}^{n} \Omega^{x_i} \cdot y_i + \Omega$, im Falle β $\tilde{\eta} = \sum_{i=0}^{n-1} \Omega^{x_i} \cdot y_i + \Omega^{x_n+1}$ zu setzen; im Falle γ muss man zwei Unterfälle unterscheiden: Ist $\eta = \Omega^{x_0}$, x_0 zweiter Art, so ist das zugehörige $\tilde{\eta} = \Omega^\Omega$; ist $\Omega^{x_0} < \eta = \sum_{i=0}^{n} \Omega^{x_i} \cdot y_i < \Omega^\Omega$, so folgt aus der Eigenschaft 3) der zu Ω^Ω gehörenden Folge $\{\varphi_{\Omega^{1+x}}\}$

$$\varphi_\eta(1) > \varphi_{\Omega^{x_0}}(1) \geqq \tau_{\Omega^{x_0}} = x_0 \geqq x_n = \tau_\eta$$

also

$$\varphi_\eta(1) > \tau_\eta$$

Sind nun die Prämissen des Hilfssatzes erfüllt, so ist wegen 1) d) $\varphi_{\tilde{\eta}}(\tau_\eta) = \varphi_{\eta_{\tau_\eta}}(1) = \varphi_\eta(1) = \tau_\eta$, d. h. τ_η ist kritische Zahl von $\varphi_{\tilde{\eta}}$.

3. Mit Hilfe der aufgestellten Folge $\mathfrak{F}_0$ von Normalfunktionen φ_η erster Klasse kann man jeder Limeszahl $y < \varphi_{\Omega^\Omega+1}(1) = E(1)$ eine ausgezeichnete Folge $\{y_n\}$ vom Typus ω zuordnen, so dass $y \Rrightarrow \underset{n<\omega}{\mathrm{Lim}}\, y_n$ (wir wollen für diese Zuordnung zwei Pfeile verwenden):

Wir definieren $\omega \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega}(1+n)$; ferner sei angenommen, die Zuordnung der ausgezeichneten Folgen sei für alle Limeszahlen $y' < y$ ausgeführt, wobei y eine Limeszahl sei mit $\omega < y < E(1)$. Dann kann man auch für y eine ausgezeichnete Folge definieren:

1) Liegt y nicht in $V\varphi_0$, so nehmen wir die eindeutige Darstellung

$$y = \omega^{x_0} \cdot x_1 + x_2$$

wobei $1 \leqq x_0 < \Omega$, $1 \leqq x_1 < \omega$, $0 \leqq x_2 < \omega^{x_0}$ [14]). Es ist dann $\omega^{x_0} < y$, $x_1 < y$ und $x_2 < y$.

Ist x_2 eine Limeszahl und $x_2 \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega} x_2^{(n)}$, so sei

$$y \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega}(\omega^{x_0} \cdot x_1 + x_2^{(n)})$$

Ist $x_2 = 0$ und $x_1 = x'_1 + 1$ $(x'_1 \geqq 1)$, und zudem $\omega^{x_0} \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega} \xi_n$, so sei

$$y \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega}(\omega^{x_0} \cdot x_1 + \xi_n)$$

2) Liegt y in $V\varphi_0$, so existiert eine letzte Normalfunktion φ_η mit $0 \leqq \eta \leqq \Omega^\Omega$, so dass y in $V\varphi_\eta$ liegt, aber nicht in $V\varphi_{\eta'}$ für alle η' mit $\eta < \eta' \leqq \Omega^\Omega + 1$. Dies kann mit denselben Überlegungen bewiesen werden, wie wir sie (mit noch allgemeineren Voraussetzungen) in § 5 machen werden; um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, wollen wir uns mit diesem Hinweis auf § 5 begnügen. — Es gibt somit ein x mit $1 \leqq x < \Omega$ und

$$y = \varphi_\eta(x) > x$$

Ist x eine Limeszahl und $x \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega} x_n$, so setze man nach Satz 1 von § 2

$$y \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega} \varphi_\eta(x_n)$$

Ist $x = x' + 1$ $(x' \geqq 0)$, so hat man vier Fälle zu unterscheiden:

a) Ist $\eta = 0$, so sei

$$y \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega}(\varphi_0(x') \cdot (1+n))$$

b) Ist $\eta = \eta' + 1$, so setze man nach Satz 2 von § 2

$$y \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega} \varphi_{\eta'}^{\,n}(1) \text{ für } x' = 0$$

$$y \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega} \varphi_{\eta'}^{\,n}(\varphi_\eta(x') + 1) \text{ für } x' \geqq 1$$

c) Ist η zweiter Art, so ist für $x' \geqq 1$ wegen $y = \varphi_\eta(x'+1) > \varphi_\eta(x') \geqq \varphi_\eta(1) \geqq \tau_\eta$ $\tau_\eta < y$; aber auch für $x' = 0$ ist $\tau_\eta < y$; denn wäre $y = \varphi_\eta(1) = \tau_\eta$, so würde nach dem Hilfssatz dieses Paragraphen ein $\tilde{\eta}$ dritter Art $> \eta$ existieren, so dass y in $V\varphi_{\tilde{\eta}+1}$ liegen würde, was ein Widerspruch ist zur Voraussetzung, dass y nicht in $V\varphi_{\eta'}$ liegt für $\eta' > \eta$.

Ist $\eta \doteqdot \operatorname{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$ und $\tau_\eta \doteqdot \operatorname{Lim}_{n<\omega} \sigma_n$, so kann man also nach Satz 3 von § 2 setzen:

---

[14]) Siehe Fussnote [13]).

$$y \mathrel{\overset{\rightarrow}{\equiv}} \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \varphi_{\eta_{\sigma_n}}(1) \text{ für } x'=0$$

$$y \mathrel{\overset{\rightarrow}{\equiv}} \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \varphi_{\eta_{\sigma_n}}(\varphi_\eta(x')+1) \text{ für } x' \geqq 1$$

d) Ist endlich η dritter Art, so ist $y=\varphi_\eta(x'+1)=\varphi_{\eta_{x'+1}}(1)$, und y liegt nicht in $V\varphi_{\eta'}$ für $\eta_{x'+1}<\eta'<\eta$ und $\eta'>\eta$. Nun kann $\eta_{x'+1}$ wieder dritter Art sein usw. Jedenfalls gibt es aber eine endliche Folge $\{\zeta_\nu\}$ mit $\eta=\zeta_0>\zeta_1>\ldots>\zeta_n\geqq 1$, $1\leqq n<\omega$, so dass ζ_ν für $0\leqq\nu<n$ von dritter Art, aber ζ_n nicht von dritter Art ist, und $y=\varphi_{\zeta_\nu}(1)$ für $0<\nu\leqq n$, $y=\varphi_{\zeta_0}(x'+1)$. y liegt nicht in $V\varphi_{\eta'}$ für $\zeta_{\nu+1}<\eta'<\zeta_\nu\,(0\leqq\nu<n)$.

Ist nun $\zeta_n=\zeta'_n+1$, so lässt sich Satz 2 von § 2 anwenden: Es sei

$$y \mathrel{\overset{\rightarrow}{\equiv}} \operatorname*{Lim}_{m<\omega} \varphi_{\zeta'_n}{}^m(1)$$

Ist ζ_n zweiter Art, so lässt sich Satz 3 von § 2 anwenden. Dieser gibt dann wirklich eine Definition für eine ausgezeichnete Folge von y; denn es folgt $y=\varphi_{\zeta_n}(1)>\tau_{\zeta_n}$.

Zunächst ist nämlich $y\geqq\tau_{\eta_n}$ (siehe Ende des Existenzbeweises von $\mathfrak{F}_0$). Wäre nun $y=\varphi_{\zeta_n}(1)=\tau_{\zeta_n}$, so würde nach dem Hilfssatz dieses Paragraphen ein μ dritter Art mit $\zeta_n<\mu\leqq\Omega^\Omega$ existieren, so dass y in $V\varphi_{\mu+1}$ liegen würde. Weil aber y nicht in $V\varphi_{\eta'}$ liegt für $\zeta_{\nu+1}<\eta'<\zeta_\nu\,(0\leqq\nu<n)$ und für $\zeta_n<\eta'\leqq\Omega^\Omega+1$, so hätte man einen Widerspruch.

Ist nun $\zeta_n \mathrel{\overset{\rightarrow}{\equiv}} \operatorname*{Lim}_{x<\tau_{\zeta_n}} \zeta_n{}^{(x)}$ und $\tau_{\zeta_n} \mathrel{\overset{\rightarrow}{\equiv}} \operatorname*{Lim}_{m<\omega} \sigma_m$, so kann man also setzen:

$$y \mathrel{\overset{\rightarrow}{\equiv}} \operatorname*{Lim}_{m<\omega} \varphi_{\zeta_n{}^{(\sigma_m)}}(1)$$

4. Wir wollen nun diese Theorie mit der Theorie der CANTORschen ε-Zahlen[15]) vergleichen. Nach CANTOR bezeichnet man die kritischen Zahlen von $\varphi_0(x)=\omega^x$ als ε-Zahlen. Man bezeichnet gewöhnlich die erste ε-Zahl $\varphi_1(1)$ mit ε selbst. Diese ε-Zahlen spielen beim Problem der ausgezeichneten Folgen eine grosse Rolle:

Legt man nur die Verwendung der drei Operationen Addition, Multiplikation und Potenzierung von Ordnungszahlen und endlich vielfachen Gebrauch der Zeichen 1 und ω zugrunde, so lassen sich damit alle Ordnungszahlen kleiner als ε darstellen und auch sehr leicht (in bekannter Weise) ausgezeichnete Folgen für alle Limeszahlen dieses Bereichs definieren. Für ε benötigt man ein neues Zeichen, wenn man keine neuen Operationen einführen will, und eine neue Definition, z. B. $\varepsilon=\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \left.\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}\right\}1+n$. Durch Hinzunahme dieses neuen Zeichens lassen sich dann weiterhin alle Ordnungszahlen kleiner als die erste kritische Zahl der Normalfunktion ε^x, die wir mit ε_1 bezeichnen wollen, darstellen und für die betreffenden Limeszahlen ausgezeichnete Folgen definieren; ferner definiert man z. B. $\varepsilon_1=\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \left.\varepsilon^{\varepsilon^{\cdots}}\right\}1+n$. Weiterhin kommt

[15]) G. CANTOR (5), p. 347—356, und G. CANTOR (6), p. 242—246.

man bis zur ersten kritischen Zahl ε_2 von ε_1^x usw. Wir wollen noch verabreden, dass wir nur einfache Indizes (also nicht Indizes von Indizes) gebrauchen wollen.

Wir erhalten somit ein ähnliches Verfahren wie dasjenige von VEBLEN, indem aus Normalfunktionen durch Verdünnung ihrer Wertmengen neue Normalfunktionen gebildet werden: Wir definieren für $1 \leqq \nu < \Omega$ $\varepsilon_{\nu+1}$ als die erste kritische Zahl von ε_ν^x, für $\nu = \underset{\nu' < \nu}{\mathrm{Lim}}\,(1+\nu')$ $\varepsilon_\nu = \underset{\nu' < \nu}{\mathrm{Lim}}\,\varepsilon_{1+\nu'}$; damit erhalten wir eine Normalfunktion ε_ν (als Funktion vom Index ν). Bei der Darstellung der Ordnungszahlen durch die drei Operationen braucht man für die erste kritische Zahl dieser Normalfunktion ε_ν, die wir mit η bezeichnen wollen, wieder ein neues Zeichen; dann gelingt die Darstellung (und auch die Definition der ausgezeichneten Folgen) bis zur ersten kritischen Zahl η_1 von η^x. Definiert man für $1 \leqq \nu < \Omega$ $\eta_{\nu+1}$ als erste kritische Zahl von η_ν^x, und für $\nu = \underset{\nu' < \nu}{\mathrm{Lim}}\,(1+\nu')$ $\eta_\nu = \underset{\nu' < \nu}{\mathrm{Lim}}\,\eta_{1+\nu'}$, so erhält man wieder eine Normalfunktion η_ν (als Funktion von ν); man braucht erst für ihre erste kritische Zahl ein neues Zeichen (z. B. ζ) usw. Wir wollen dieses Verfahren so weit fortsetzen, bis wir eine Folge vom Typus ω von Zeichen $1, \omega, \varepsilon, \eta, \zeta \ldots$ haben. Wir bezeichnen den Limes dieser Folge mit λ. Bei Zugrundelegung der drei Operationen Addition, Multiplikation und Potenzierung, bei Verwendung nur einfacher Indizes und bei endlicher Verwendung der Zeichen aus der obigen Folge vom Typ ω von Zeichen lassen sich alle Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse, die kleiner als λ sind, darstellen, und zudem mit Hilfe der drei Operationen ausgezeichnete Folgen für die Limeszahlen kleiner als λ definieren.

Wir wollen nun diese neue Folge von Normalfunktionen mit der von VEBLEN aufgestellten Folge $\mathfrak{F}_0$ vergleichen: Die Ableitung der Normalfunktion α^x (wobei $\omega < \alpha < \Omega$) ist die Funktion $\varphi_1(\beta + (x-1))$, wobei $\varphi_1(\beta)$ die erste ε-Zahl $> \alpha$ ist[16]). Also ist ε_1 die erste ε-Zahl nach ε, d. h. $\varepsilon_1 = \varphi_1(2)$, ferner $\varepsilon_{\nu+1}$ die erste ε-Zahl nach ε_ν, also allgemein

$$\varepsilon_\nu = \varphi_1(1+\nu) \text{ für } 1 \leqq \nu < \Omega$$

η ist die kleinste Zahl, die der Relation $\eta = \varepsilon_\eta = \varphi_1(1+\eta) = \varphi_1(\eta)$ genügt; somit wird $\eta = \varphi_2(1)$. Analog wird η_1 die erste ε-Zahl nach η, also $\eta_1 = \varphi_1(\eta+1)$, ferner $\eta_{\nu+1}$ die erste ε-Zahl nach η_ν, also allgemein

$$\eta_\nu = \varphi_1(\eta+\nu) \text{ für } 1 \leqq \nu < \Omega$$

ζ ist die kleinste Zahl $> \eta$, die der Relation $\zeta = \eta_\zeta = \varphi_1(\eta+\zeta) = \varphi_1(\zeta)$ genügt (es ist $\eta + \zeta = \zeta$[17])), also ist $\zeta = \varphi_2(2)$. Nun wird $\zeta_\nu = \varphi_1(\zeta+\nu)$ usw. Es wird somit

$$\lambda = \varphi_2(\omega);$$

---

[16]) O. VEBLEN (2), Coroll. 5 zu Theorem 4, p. 284; G. CANTOR (5), p. 350, und G. CANTOR (6), Sätze G und H, p. 245.

[17]) Cf. Hilfssatz 2 von § 4; oder G. CANTOR (5), p. 350, und G. CANTOR (6), Satz G, p. 245.

das Verfahren von VEBLEN gibt also schon in seinem Anfang ausgezeichnete Folgen für alle Limeszahlen $< \lambda$; es liefert sofort viel stärkere Verdünnungen der Wertmengen als das oben beschriebene Verfahren mit den ε-Zahlen.

§ 4 Fortsetzung des Verfahrens von VEBLEN

1. Im letzten Paragraphen haben wir zuerst jeder Limeszahl $\eta \leqq \Omega^{\Omega}$ eine eindeutige aufsteigende Folge $\{\eta_x\}$ von einem gewissen Typus τ_η zugeordnet mit $\eta \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$. Um die Folge $\mathfrak{F}_0$ von Normalfunktionen φ_η erster Klasse weiter fortzusetzen, muss man weiteren Limeszahlen der dritten Zahlklasse solche Folgen zuordnen. Es liegt nun nahe, diese Aufgabe mit Hilfe von *Normalfunktionen zweiter Klasse* zu lösen, in analoger Weise, wie VEBLEN mit Hilfe von Normalfunktionen erster Klasse die ausgezeichneten Folgen von Limeszahlen der zweiten Zahlklasse definiert.

Wir stellen zuerst eine Folge vom Typ $\omega_2 + 2$ von Normalfunktionen $F_\zeta(\xi)$ zweiter Klasse auf (ζ durchläuft alle Ordnungszahlen $\leqq \omega_2 + 1$), indem wir die folgenden Definitionen setzen:

$$F_0(\xi) = \Omega^{\xi}$$

$$F_{\zeta+1} = F'_{\zeta} \quad \text{für } 0 \leqq \zeta \leqq \omega_2$$

$$VF_\zeta = \underset{\zeta'<\zeta}{D}\, VF_{\zeta'}, \text{ wenn } \zeta \text{ eine Limeszahl } < \omega_2$$

$$F_{\omega_2}(\xi) = F_\xi(1)$$

2. Mit Hilfe dieser Folge von Normalfunktionen F_ζ zweiter Klasse wollen wir nun jeder Limeszahl $\eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$ eine eindeutige aufsteigende Folge $\{\eta_x\}$, deren Typus eine gewisse Limeszahl $\tau_\eta \leqq \Omega$ ist, zuordnen, so dass $\eta \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$. Dabei müssen wir in drei Schritten vorgehen:

1) Zuerst geben wir a priori die Definition:

$$\eta \doteq \operatorname{Lim}_{\eta'<\eta} (1+\eta'), \text{ wenn } \eta \text{ eine Limeszahl } \leqq \Omega \text{ ist}$$

2) In einem zweiten Schritt ordnen wir sodann jeder weiteren Limeszahl $\eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$ einen Abschnitt $\Phi_\eta(\xi)$ einer Normalfunktion zweiter Klasse zu, so dass

$$\eta = \Phi_\eta(\xi_\eta)$$

$$\xi_\eta \text{ eine bestimmte Limeszahl } < \omega_2$$

und

$$\Phi_\eta(\xi) > \xi \text{ für alle } \xi \text{ mit } 1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta$$

(wobei mit dem Ausdruck «Abschnitt» gemeint sein soll, dass die Normalfunktion $\Phi_\eta(\xi)$ nur für $1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta$ definiert sein soll, nicht für $1 \leqq \xi < \omega_2$, wie dies bei einer Normalfunktion zweiter Klasse sein müsste):

a) Ist $\Omega < \eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$ und liegt η nicht in VF_0, so hat man für η eine eindeutige Darstellung von der Form

$$\eta = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi_1 + \xi_2$$

wobei $1 \leqq \xi_0 < \omega_2$, $1 \leqq \xi_1 < \Omega$, $0 \leqq \xi_2 < \Omega^{\xi_0}$[18]).

Ist ξ_2 Limeszahl, so sei

$$\xi_\eta = \xi_2,\ \Phi_\eta(\xi) = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi_1 + \xi \text{ für } 1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta \qquad \textit{(Fall A)}$$

Ist $\xi_2 = 0$ und $\xi_1 = \xi_1' + 1\ (\xi_1' \geqq 1)$, so sei

$$\xi_\eta = \Omega^{\xi_0},\ \Phi_\eta(\xi) = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi_1' + \xi \text{ für } 1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta \qquad \textit{(Fall B)}$$

Ist $\xi_2 = 0$ und ξ_1 Limeszahl, so sei

$$\xi_\eta = \xi_1,\ \Phi_\eta(\xi) = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi \text{ für } 1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta \qquad \textit{(Fall C)}$$

b) Liegt η in VF_0, $\Omega < \eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$, so existiert eine bestimmte letzte Normalfunktion $F_\zeta(\xi)$ mit $0 \leqq \zeta \leqq \omega_2 + 1$, so dass η in VF_ζ liegt, aber nicht in $VF_{\zeta'}$ für alle ζ' mit $\zeta < \zeta' \leqq \omega_2 + 1$. Dies ist durch analoge Überlegungen einzusehen, wie wir sie in § 5 machen werden. Man hat also ein ξ'_η mit $1 \leqq \xi'_\eta < \omega_2$ und

$$\eta = F_\zeta(\xi'_\eta) > \xi'_\eta$$

Ist $\xi'_\eta = \xi''_\eta + 1$, so ist bei $\zeta < \omega_2$ $\xi''_\eta \geqq 1$, denn sonst wäre η in VF_{ω_2}; man hat also folgende Fälle:

$\zeta = 0$, $\xi''_\eta \geqq 1$: Dann sei

$$\xi_\eta = \Omega,\ \Phi_\eta(\xi) = \Omega^{\xi''_\eta} \cdot \xi \text{ für } 1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta \qquad \textit{(Fall D)}$$

$\zeta = \zeta' + 1$, $\zeta' < \omega_2$, $\xi''_\eta \geqq 1$: Dann sei

$$\xi_\eta = \omega,\ \Phi_\eta(\xi) = F^{\xi}_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta) + 1) \text{ für } 1 \leqq \xi < \xi_\eta,\ \Phi_\eta(\xi_\eta) = \eta \qquad \textit{(Fall E)}$$

Dabei kommt Satz 2 von § 2 zur Anwendung.

$\zeta =$ Limeszahl der dritten Zahlklasse, $\xi''_\eta \geqq 1$: Dann sei

$$\xi_\eta = \zeta,\ \Phi_\eta(\xi) = F_\xi(F_\zeta(\xi''_\eta) + 1) \text{ für } 1 \leqq \xi < \xi_\eta,\ \Phi_\eta(\xi_\eta) = \eta \qquad \textit{(Fall F)}$$

Hier ist $\Phi_\eta(\xi)$ wirklich eine Normalfunktion; denn ist ζ' eine Limeszahl $< \zeta$, so ist (nach Satz 3 von § 2, und weil $F_\zeta(\xi''_\eta)$ eine kritische Zahl von $F_{\zeta'}$ ist)

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(\zeta') &= F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta) + 1) = \lim_{\zeta'' < \zeta'} F_{1+\zeta''}(F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta)) + 1) \\ &= \lim_{\zeta'' < \zeta'} F_{1+\zeta''}(F_\zeta(\xi''_\eta) + 1) = \lim_{\zeta'' < \zeta'} \Phi_\eta(1 + \zeta'') \end{aligned}$$

ferner ist

$$\Phi_\eta(\xi) > F_\xi(1) \geqq \xi \text{ für } 1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta$$

Bei Fall F wird Satz 3 von § 2 angewendet.

$\zeta = \omega_2$, $\xi''_\eta \geqq 0$: Dann ist $\eta = F_{\xi''_\eta + 1}(1)$, und es sei

$$\xi_\eta = \omega,\ \Phi_\eta(\xi) = F^{\xi}_{\xi''_\eta}(1) \text{ für } 1 \leqq \xi < \xi_\eta,\ \Phi_\eta(\xi_\eta) = \eta \qquad \textit{(Fall E')}$$

Hier wird auch Satz 2 von § 2 angewendet.

$\zeta = \omega_2 + 1$, $\xi''_\eta = 0$, $\eta = F_{\omega_2+1}(1)$: Dann sei

$$\xi_\eta = \omega,\ \Phi_\eta(\xi) = F^{\xi}_{\omega_2}(1) \text{ für } 1 \leqq \xi < \xi_\eta,\ \Phi_\eta(\xi_\eta) = \eta$$

Dieser Fall werde auch unter Fall E' genommen.

---

[18]) Siehe Fussnote [13]).

Ist ξ'_η Limeszahl, $\eta = F_\zeta(\xi'_\eta) > \xi'_\eta$, so gibt es, wenn η grösser als die erste kritische Zahl von F_ζ ist, eine letzte kritische Zahl ϱ von F_ζ, so dass $\varrho = F_\zeta(\varrho) = F_{\zeta+1}(\mu)$, $\mu \geqq 1$, $F_{\zeta+1}(\mu) < \eta < F_{\zeta+1}(\mu+1)$. Dies folgt daraus, dass ξ'_η keine kritische Zahl von F_ζ ist, und dass die kritischen Zahlen von F_ζ die Wertmenge einer Normalfunktion bilden. Ist η kleiner als die erste kritische Zahl von F_ζ, so setzen wir $\varrho = 0$. Nun setze man

$$\xi_\eta = \xi'_\eta - \varrho, \quad \Phi_\eta(\xi) = F_\zeta(\varrho + \xi) \text{ für } 1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta \qquad \textit{(Fall G)}$$

Die so definierten Normalfunktionen $\Phi_\eta(\xi)$ erfüllen in allen Fällen A bis G die geforderten Bedingungen.

3) In einem dritten Schritt können wir nun die Folgen $\{\eta_x\}$ für alle Limeszahlen $\eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$ definieren: Im ersten Schritt wurde dies für $\eta \leqq \Omega$ ausgeführt. Die Definitionen seien gegeben für alle Limeszahlen $\eta' < \eta$, wobei η eine Limeszahl mit $\Omega < \eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$ ist. Dann kann man auch für η eine solche Folge definieren; denn nach dem zweiten Schritt hat man eine eindeutig festgelegte Normalfunktion $\Phi_\eta(\xi)$ mit den oben beschriebenen Eigenschaften, so dass

$$\eta = \Phi_\eta(\xi_\eta), \ \xi_\eta \text{ Limeszahl} < \eta$$

Ist $\xi_\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x < \tau_{\xi_\eta}} \xi_\eta^{(x)}$, so setze man $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x < \tau_{\xi_\eta}} \Phi_\eta(\xi_\eta^{(x)})$. Die Aufgabe der Bestimmung der Folgen $\{\eta_x\}$ ist damit also mittels des Prinzips der transfiniten Induktion gelöst. Es ist $\tau_\eta = \tau_{\xi_\eta}$ für alle η mit $\Omega < \eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$.

3. Nach den obigen Ausführungen ist es nun möglich, eine Folge $\mathfrak{F}_1$ vom Typus $F_{\omega_2+1}(1) + 1$ von Normalfunktionen $\varphi_\eta(x)$ erster Klasse aufzustellen, so dass für alle $\eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$ gilt:

1) a) $\varphi_0(x) = \omega^x$.

b) Ist $\eta = \eta' + 1$, so ist $\varphi_\eta = \varphi'_{\eta'}$.

c) Ist η zweiter Art und $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$, so ist $V\varphi_\eta = \operatorname*{D}_{x<\tau_\eta} V\varphi_{\eta_x}$.

d) Ist η dritter Art und $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\Omega} \eta_x$, so ist $\varphi_\eta(x) = \varphi_{\eta_x}(1)$.

2) a) Ist $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$ und μ eine Limeszahl von $< \tau_\eta$, so ist $\eta_\mu \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\mu} \eta_x$.

b) Ist $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$, so ist $\eta_x + 1 \to \eta_{x+1}$ für alle x mit $0 \leqq x < \tau_\eta$.

(Dabei verwenden wir wieder die Abkürzung $\alpha \to \beta$ für: $V\varphi_\eta$ ist Teilmenge von $V\varphi_\alpha$ für alle η mit $\alpha < \eta \leqq \beta$.)

Wir gehen nun daran, diese Behauptung zu beweisen. Für den Beginn der Folge $\mathfrak{F}_1$ sind die obigen Eigenschaften offensichtlich erfüllt, denn $\mathfrak{F}_0$ ist ein Abschnitt von $\mathfrak{F}_1$, weil die Folgen $\{\eta_x\}$ für $\eta \leqq \Omega^\Omega$ im letzten und in diesem Paragraphen dieselben sind.

Zum Beweis der Existenz der ganzen Folge $\mathfrak{F}_1$ nehmen wir an, wir hätten bereits alle φ_η aufgestellt für alle $\eta < \eta_0$, wobei $\Omega < \eta_0 \leqq F_{\omega_2+1}(1)$, so dass die obigen Bedingungen 1) 2) erfüllt sind. Dann zeigen wir, dass man auch φ_{η_0} definieren kann, so dass die Bedingungen für alle $\eta < \eta_0$ gelten.

Ist $\eta_0 = \eta'_0 + 1$, so ist natürlich $\varphi_{\eta_0} = \varphi'_{\eta'_0}$ zu setzen.

Ist η_0 eine Limeszahl, und gilt die Bedingung 2) auch für die Folge $\{\eta_0^{(x)}\}$ von η_0 (es sei $\eta_0 \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_{\eta_0}} \eta_0^{(x)}$), so kann man, da dann die Folge $\{\varphi_{\eta_0^{(x)}}\}$ von Normalfunktionen die Eigenschaft I) bzw. II) von § 2 hat, für η_0 zweiter Art $V\varphi_{\eta_0} = \operatorname{D}_{x<\tau_{\eta_0}} V\varphi_{\eta_0^{(x)}}$, für η_0 dritter Art $\varphi_{\eta_0}(x) = \varphi_{\eta_0^{(x)}}(1)$ definieren. Wir müssen also nur noch die Bedingung 2) für die Folge $\{\eta_0^{(x)}\}$ beweisen.

Dass 2) a) gilt, ist sehr leicht zu zeigen: Ist η eine Limeszahl mit $\Omega < \eta \leqq F_{\omega_2+1}(1)$, so hat man nach Nr. 2 dieses Paragraphen eine Limeszahl ξ_η, so dass $\eta = \Phi_\eta(\xi_\eta) > \xi_\eta$, somit (wenn $\xi_\eta > \Omega$) eine Limeszahl ξ_{ξ_η}, so dass $\xi_\eta = \Phi_{\xi_\eta}(\xi_{\xi_\eta}) > \xi_{\xi_\eta}$ usw. Nach endlich vielen Schritten erhält man die Form

$$\eta = \Phi_{\zeta_0}(\Phi_{\zeta_1}(\ldots \Phi_{\zeta_n}(\mu_\eta)) \ldots)$$

wobei μ_η eine Limeszahl $\leqq \Omega$ ist; ζ_ν $(0 \leqq \nu \leqq n)$ sind Limeszahlen $> \Omega$. Wir haben also eine zusammengesetzte Funktion

$$\Psi_\eta(x) = \Phi_{\zeta_0}\Phi_{\zeta_1} \ldots \Phi_{\zeta_n}(x)$$

(wobei wir die überflüssigen Klammern weggelassen haben) mit

$$\eta = \zeta_0 > \zeta_1 > \ldots > \zeta_n > \mu_\eta,\ 0 \leqq n < \omega$$

$\Psi_\eta(x)$ (definiert mindestens für $1 \leqq x \leqq \mu_\eta$) ist ein Abschnitt einer Normalfunktion; denn eine Normalfunktion einer Normalfunktion ist wieder eine Normalfunktion. Aus den Definitionen der Folgen $\{\eta_x\}$ folgt nun, wie man sich leicht überlegt,

$$\eta_x = \Psi_\eta(1+x);$$

ist μ eine Limeszahl $\leqq \mu_\eta$, so ist (wegen $\mu \doteq \operatorname{Lim}_{\mu'<\mu}(1+\mu')$, $\Phi_{\zeta_n}(\mu) \doteq \operatorname{Lim}_{\mu'<\mu} \Phi_{\zeta_n}(1+\mu')$, $\Phi_{\zeta_{n-1}}\Phi_{\zeta_n}(\mu) \doteq \operatorname{Lim}_{\mu'<\mu} \Phi_{\zeta_{n-1}}\Phi_{\zeta_n}(1+\mu')$ usw.)

$$\Psi_\eta(\mu) \doteq \operatorname{Lim}_{x<\mu} \Psi_\eta(1+x)$$

Ferner folgt $\mu_\eta = \tau_\eta$, wobei τ_η der Typus der zu η gehörenden Folge $\{\eta_x\}$ ist. — Damit ist 2) a) bewiesen.

Um 2) b) zu beweisen, brauchen wir die folgenden drei Hilfssätze:

Hilfssatz 1: Es sei vorausgesetzt, dass ein Abschnitt von $\mathfrak{F}_1$ gemäss den Vorschriften aufgestellt ist (für $\eta < \eta_0$). Es sei $F(\xi)$ eine Normalfunktion zweiter Klasse mit den Eigenschaften:

$F(\xi) + 1 \to F(\xi + 1)$ für alle $\xi \geqq 1$ mit $F(\xi + 1) < \eta_0$

$F(\eta) \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_\eta} F(\eta_x)$, wenn $\eta \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$, für alle Limeszahlen η mit $F(\eta) < \eta_0$

Es seien α, β Ordnungszahlen mit $1 \leqq \alpha < \beta$, $\alpha \to \beta$ und $F(\beta) < \eta_0$. — Dann gilt $F(\alpha) \to F(\beta)$.

Beweis: a) Zunächst zeigen wir mit Hilfe transfiniter Induktion, dass $V\varphi_{F(\zeta)}$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\alpha)}$ ist für $\alpha < \zeta \leqq \beta$: Dies ist wegen $F(\alpha)+1 \to F(\alpha+1)$ für $\zeta = \alpha + 1$ erfüllt. Es sei nun $\alpha + 1 < \zeta \leqq \beta$ und $V\varphi_{F(\zeta')}$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\alpha)}$ für alle ζ' mit $\alpha < \zeta' < \zeta$; wir zeigen, dass dann $V\varphi_{F(\zeta)}$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\alpha)}$ ist:

Ist $\zeta = \zeta' + 1\,(\zeta' > \alpha)$, so ist wegen $F(\zeta') + 1 \to F(\zeta'+1)$ die Behauptung bewiesen.

Ist ζ zweiter Art und $\zeta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\zeta} \zeta_x$, so ist $F(\zeta) \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\zeta} F(\zeta_x)$; es gibt eine erste Zahl x_0, so dass $F(\zeta_{x_0}) > F(\alpha)$; also ist nach Induktionsvoraussetzung $V\varphi_{F(\zeta_{x_0})}$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\alpha)}$, und wegen Eigenschaft 2) b) der Folge $\{\varphi_{F(\zeta_x)}\}$ und nach der Definition von $\varphi_{F(\zeta)}$ ist $V\varphi_{F(\zeta)}$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\zeta_{x_0})}$, also ist $V\varphi_{F(\zeta)}$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\alpha)}$.

Ist ζ dritter Art und $\zeta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\Omega} \zeta_x$, so ist wegen Eigenschaft 2) b) der Folge $\{\varphi_{F(\zeta_x)}\}$ und nach der Definition von $\varphi_{F(\zeta)}$ $V\varphi_{F(\zeta)}$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\zeta_1)}$. Nun ist zudem $\alpha \leqq \zeta_1$; denn wäre $\alpha > \zeta_1$, so wäre wegen Eigenschaft 2) b) der Folge $\{\varphi_{\zeta_x}\}$ $\zeta_1 + 1 \to \alpha$, also $\varphi_\zeta(1) = \varphi_{\zeta_1}(1) < \varphi_\alpha(1)$. Wegen der Voraussetzung $\alpha \to \beta$ ist aber $\alpha \to \zeta$, also $\varphi_\alpha(1) \leqq \varphi_\zeta(1)$, was einen Widerspruch zum Vorhergehenden ergibt. Also ist $\alpha \leqq \zeta_1$, und somit $V\varphi_{F(\zeta)}$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\alpha)}$.

b) Ist $F(\alpha) < \zeta < F(\beta)$, liegt aber ζ nicht in VF, sondern ist $F(\gamma) < \zeta < F(\gamma+1)$, $\alpha \leqq \gamma < \beta$, so ist wegen der Voraussetzung $F(\gamma) \to F(\gamma+1)$ $V\varphi_\zeta$ Teilmenge von $V\varphi_{F(\gamma)}$, also von $V\varphi_{F(\alpha)}$.

Der erste Hilfssatz ist auch «anschaulich» klar; denn man kann die Bildung aller Normalfunktionen $\varphi_{\xi'}$ für $\xi' < \xi$ als ξ-fache Iteration der Bildung der Ableitung betrachten, die Bildung aller $\varphi_{\xi'}$ für $\xi' < F(\xi)$ als ξ-fache Iteration der Operation, die jeweils von $\varphi_{F(\xi')}$ über alle $\varphi_\eta\,(F(\xi') < \eta < F(\xi'+1))$ auf $\varphi_{F(\xi'+1)}$ führt. Diese beiden transfiniten Iterationen sind in einem gewissen Sinne gleichartig, da, wenn η eine Limeszahl, die η-fachen Iterationen in beiden Fällen genau entsprechend definiert sind (wegen der Voraussetzung $F(\eta) \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\eta} F(\eta_x)$ für $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$).

Hilfssatz 2: Jede Ordnungszahl von VF_0 (übrigens auch von $V\varphi_0$) hat die Eigenschaft, dass sie allen ihren Resten gleich ist, d. h. liegt α in VF_0 oder $V\varphi_0$ und ist $\beta < \alpha$, so ist $\alpha - \beta = \alpha$, oder $\beta + \alpha = \alpha$.

Beweis: Wir beweisen mit einer leichten Verallgemeinerung eines von HAUSDORFF[19]) angegebenen Verfahrens, dass für $\xi \geqq 1$ jede Potenz ϱ^ξ einer Ordnungszahl ϱ, die allen ihren Resten gleich ist, ebenfalls diese Eigenschaft hat:

Es sei $\beta < \varrho^\xi$, also $\beta = \varrho^\eta \cdot \zeta + \mu$, wobei

$$0 \leqq \eta < \xi,\ 0 \leqq \zeta < \varrho,\ 0 \leqq \mu < \varrho^\eta$$

[19]) F. HAUSDORFF (4), p. 68.

Definiert man σ durch $\varrho^{\xi} = \varrho^{\eta+1} + \sigma$, so ist wegen $\eta + 1 \leqq \xi$ $\sigma \geqq 0$, ferner wird für $\varrho \neq 1$

$$\beta + \varrho^{\xi} = \varrho^{\eta} \cdot \zeta + \mu + \varrho^{\xi} \leqq \varrho^{\eta} \cdot (\zeta + 1) + \varrho^{\eta+1} + \sigma =$$
$$= \varrho^{\eta} \cdot (\zeta + 1 + \varrho) + \sigma = \varrho^{\eta+1} + \sigma = \varrho^{\xi}$$

Nimmt man für ϱ die Zahlen ω und Ω, so erhält man die Behauptung des zweiten Hilfssatzes.

Hilfssatz 3: Unter der Voraussetzung, dass alle φ_η für $\eta < \eta_0$ nach den Vorschriften 1) 2) (Nr. 3 von § 4) aufgestellt sind, gilt

$$\Phi_\eta(\xi) + 1 \rightarrow \Phi_\eta(\xi + 1)$$

für jede beliebige in Nr. 2 dieses Paragraphen definierte Funktion Φ_η, wenn

$$1 \leqq \xi < \xi_\eta \text{ und } \Phi_\eta(\xi + 1) < \eta_0$$

Beweis: Für $\Phi_\eta(\xi)$ kommen die Fälle A bis G in Betracht (cf. Nr. 2 von § 4).

Für die Fälle A und B ist die Behauptung trivial.

In den Fällen C und D ist $\Phi_\eta(\xi) = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi$; wegen $1 \rightarrow \Omega^{\xi_0}$ ist nach dem ersten Hilfssatz (wobei für die dort auftretende Funktion F $F(\zeta) = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi + \zeta$ gesetzt wird)

$$\Phi_\eta(\xi) + 1 = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi + 1 \rightarrow \Omega^{\xi_0} \cdot \xi + \Omega^{\xi_0} = \Phi_\eta(\xi + 1)$$

wenn $\Phi_\eta(\xi + 1) < \eta_0$.

Fall G: Man hat $\Phi_\eta(\xi) = F_\zeta(\varrho + \xi)$, $\varrho \geqq 0$. Wir beweisen, dass $F_\zeta(\xi) + 1 \rightarrow F_\zeta(\xi + 1)$ gilt für alle ζ mit $0 \leqq \zeta \leqq \omega_2 + 1$, sofern $F_\zeta(\xi + 1) < \eta_0$:

Diese Behauptung gilt für $\zeta = 0$, denn wie unter den Fällen C und D folgt

$$F_0(\xi) + 1 = \Omega^{\xi} + 1 \rightarrow \Omega^{\xi} \cdot 2$$

ferner folgt

$$\Omega^{\xi} \cdot 2 \rightarrow \Omega^{\xi} \cdot \Omega = F_0(\xi + 1)$$

aus der Eigenschaft 2) b) der Folge $\{\varphi_{\Omega^{\xi} \cdot \omega}\}$ und aus der Definition von $\varphi_{\Omega^{\xi} \cdot \Omega}$. Man hat also $F_0(\xi) + 1 \rightarrow F_0(\xi + 1)$.

Wir nehmen nun an, die Behauptung gelte für alle $F_{\zeta'}$ mit $\zeta' < \zeta$, wo $0 < \zeta \leqq \omega_2 + 1$ und zeigen, dass sie dann für F_ζ gilt:

Ist $\zeta = \zeta' + 1$, so ist $F_\zeta(\xi + 1) \doteq \operatorname{Lim}_{n<\omega} F_{\zeta'}^{1+n}(F_\zeta(\xi) + 1)$. Wegen der Eigenschaft 2) b) der Folge $\{\varphi_{F_{\zeta'}^{1+n}(F_\zeta(\xi)+1)}\}$ und nach der Induktionsvoraussetzung ist dann

$$F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi)) + 1 = F_\zeta(\xi) + 1 \rightarrow F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi) + 1) \rightarrow F_\zeta(\xi + 1)$$

Ist ζ eine Limeszahl $< \omega_2$ mit $\zeta \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_\zeta} \zeta_x$, so ist

$$F_\zeta(\xi + 1) \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_\zeta} F_{\zeta_x}(F_\zeta(\xi) + 1)$$

Aus analogen Gründen wie oben folgt

$$F_{\zeta_0}(F_\zeta(\xi)) + 1 = F_\zeta(\xi) + 1 \rightarrow F_{\zeta_0}(F_\zeta(\xi) + 1) \rightarrow F_\zeta(\xi + 1)$$

Ist $\zeta = \omega_2$, so ist $F_\zeta(\xi + 1) = F_{\xi+1}(1) \doteq \operatorname{Lim}_{n<\omega} F_{\xi}^{1+n}(1)$, also wegen der Eigenschaft 2) b) der Folge $\{\varphi_{F_\xi^{1+n}(1)}\}$

$$F_\zeta(\xi)+1=F_\xi(1)+1\rightarrow F_\zeta(\xi+1)$$

Fall E: Dann ist $\Phi_\eta(n)=F_{\zeta'}^{\,n}(\delta)$, wobei $n<\omega$, $\xi''_\eta\geqq 1$ und

$$\delta=F_\zeta(\xi''_\eta)+1$$

Ist $F_{\zeta'}^{\,2}(\delta)<\eta_0$, so hat man wegen des unter Fall G erhaltenen Resultats

$$F_{\zeta'}(\delta)+1\rightarrow F_{\zeta'}(\delta+1);$$

verwendet man Hilfssatz 1 (mit $F(\xi)=F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta)+\xi)$ [20])) und Hilfssatz 2, so ist wegen $2\rightarrow F_{\zeta'}(\delta)$ (cf. die Bemerkung am Schluss dieses Beweises) und $F_\zeta(\xi''\eta)<F_{\zeta'}(\delta)$

$$F_{\zeta'}(\delta+1)=F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta)+2)=F(2)\rightarrow F(F_{\zeta'}(\delta))=$$
$$F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta)+F_{\zeta'}(\delta))=F_{\zeta'}(F_{\zeta'}(\delta))=F_{\zeta'}^{\,2}(\delta)$$

also

$$F_{\zeta'}(\delta)+1\rightarrow F_{\zeta'}^{\,2}(\delta)$$

In analoger Weise wird für $1\leqq n<\omega$ und $F_{\zeta'}^{\,n+2}(\delta)<\eta_0$ aus $F_{\zeta'}^{\,n}(\delta)+1\rightarrow F_{\zeta'}^{\,n+1}(\delta)$ wegen Hilfssatz 1 (mit $F(\xi)=F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta)+\xi)$) und Hilfssatz 2:

$$F_{\zeta'}^{\,n+1}(\delta)+1=F_{\zeta'}F_{\zeta'}^{\,n}(\delta))+1\rightarrow F_{\zeta'}(F_{\zeta'}^{\,n}(\delta)+1)=$$
$$F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta)+F_{\zeta'}^{\,n}(\delta)+1)=F(F_{\zeta'}^{\,n}(\delta)+1)\rightarrow F(F_{\zeta'}^{\,n+1}(\delta))=$$
$$F_{\zeta'}(F_\zeta(\xi''_\eta)+F_{\zeta'}^{\,n+1}(\delta))=F_{\zeta'}(F_{\zeta'}^{\,n+1}(\delta))=F_{\zeta'}^{\,n+2}(\delta)$$

also

$$F_{\zeta'}^{\,n+1}(\delta)+1\rightarrow F_{\zeta'}^{\,n+2}(\delta)$$

Somit ist allgemein

$$F_{\zeta'}^{\,n}(\delta)+1\rightarrow F_{\zeta'}^{\,n+1}(\delta)\ \text{für}\ 1\leqq n<\omega\ \text{und}\ F_{\zeta'}^{\,n+1}(\delta)<\eta_0.$$

Im Falle E′ ($\xi''_\eta=0$) verfahre man genau wie im Fall E, nur ersetze man δ durch 1 und $F_\zeta(\xi''_\eta)$ durch 0; dann wird

$$F_{\zeta'}^{\,n}(1)+1\rightarrow F_{\zeta'}^{\,n+1}(1)\ \text{für}\ 1\leqq n<\omega\ \text{und}\ F_{\zeta'}^{\,n+1}(1)<\eta_0$$

Fall F: Man hat $\Phi_\eta(\xi+1)=F_{\xi+1}(\delta)\doteq\lim\limits_{n<\omega} F_\xi^{\,n+1}(F_{\xi+1}(F_\zeta(\xi''_\eta))+1)$

$$\doteq\lim_{n<\omega} F_\xi^{\,1+n}(\delta)$$

also ist wegen Eigenschaft 2) b) der Folge $\{\varphi_{F_\xi^{1+n}(\delta)}\}$

$$\Phi_\eta(\xi)+1=F_\xi(\delta)+1\rightarrow\Phi_\eta(\xi+1)$$

Bemerkung 1: Wir haben in diesem Beweis die Eigenschaft $2\rightarrow\alpha$ (für $2<\alpha<\eta_0$) verwendet. Diese ist erfüllt; denn ist η eine Limeszahl $<\eta_0$ und $\eta\doteq\lim\limits_{x<\tau_\eta}\eta^{(x)}$, so ist $\varphi_\eta(1)\geqq\varphi_{\eta^{(1)}}(1)$, $\eta^{(0)}\geqq 1$, $\eta^{(1)}\geqq 2$; daraus folgt $2\rightarrow\alpha$.

[20]) Die Anwendung des ersten Hilfssatzes ist deshalb gestattet, weil die erste kritische Zahl $F_{\zeta'}(\xi)$ nach $F_\zeta(\xi''_\eta)$ die Zahl $F_\zeta(\xi''_\eta+1)$ ist, also die Bedingung $F(\xi)\doteq\lim\limits_{x<\tau_\xi}F(\xi_x)$ für die in Frage kommenden ξ stets erfüllt ist.

Nachdem nun diese Hilfssätze bewiesen sind, ist es sehr einfach, die Eigenschaft 2) b) für die Folge $\{\eta_0^{(x)}\}$ von η_0 zu beweisen:

Man hat eine zugehörige Normalfunktion $\Phi_{\eta_0}(\xi)$ und eine Limeszahl ξ_{η_0}, so dass

$$\eta_0 = \Phi_{\eta_0}(\xi_{\eta_0}) > \xi_{\eta_0}$$

und $\Phi_{\eta_0}(\xi) > \xi$ für alle ξ mit $1 \leqq \xi \leqq \xi_{\eta_0}$.

Ist $\xi_{\eta_0} \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_{\eta_0}} \xi_{\eta_0}^{(x)}$, so ist $\eta_0^{(x)} = \Phi_{\eta_0}(\xi_{\eta_0}^{(x)})$ und nach Voraussetzung

$$\xi_{\eta_0}^{(x)} + 1 \rightarrow \xi_{\eta_0}^{(x+1)} \text{ für } 0 \leqq x < \tau_{\eta_0}$$

Nach Hilfssatz 3 ist $\Phi_{\eta_0}(\xi) + 1 \rightarrow \Phi_{\eta_0}(\xi + 1)$; durch Anwendung des ersten Hilfssatzes (mit $F(\xi) = \Phi_{\eta_0}(\xi)$) ergibt sich somit

$$\eta_0^{(x)} + 1 = \Phi_{\eta_0}(\xi_{\eta_0}^{(x)}) + 1 \longrightarrow \Phi_{\eta_0}(\xi_{\eta_0}^{(x)} + 1) \longrightarrow \Phi_{\eta_0}(\xi_{\eta_0}^{(x+1)}) = \eta_0^{(x+1)}$$

was zu beweisen war.

4. Mit Hilfe der Folge $\mathfrak{F}_1$ von Normalfunktionen φ_η erster Klasse, deren Existenz nun bewiesen ist, lässt sich nun zu jeder Limeszahl $y < \varphi_{F_\Omega(1)+1}(1)$ eine ausgezeichnete Folge $\{y_n\}$ vom Typus ω definieren, so dass $y \doteq \operatorname{Lim}_{n<\omega} y_n$.

Dazu brauchen wir aber noch einen weiteren Hilfssatz:

Hilfssatz 4: Für alle $\eta < F_\Omega(1)$ gilt: Ist η zweiter Art, $\eta \doteq \operatorname{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$ und $\varphi_\eta(1) = \tau_\eta$, so existiert eine Ordnungszahl $\tilde{\eta}$ dritter Art mit $\tilde{\eta} \doteq \operatorname{Lim}_{x<\Omega} \tilde{\eta}_x$ und $\eta < \tilde{\eta} \leqq F_\Omega(1)$, so dass $\tilde{\eta}_x = \eta_x$ für alle $x < \tau_\eta$ und $\tilde{\eta}_{\tau_\eta} = \eta$.

B e w e i s: Der Satz gilt für $\eta \leqq \Omega^\Omega$, wie wir in § 3 gezeigt haben. Wir nehmen nun an, der Satz gelte für alle $\eta' < \eta$, wobei η eine Limeszahl mit $\Omega < \eta < F_\Omega(1)$ ist, und zeigen, dass dann der Satz auch für η gilt:

Man hat $\eta = \Phi_\eta(\xi_\eta) > \xi_\eta$, wobei ξ_η zweiter Art sein muss. Man kann mittels transfiniter Induktion leicht zeigen, dass $\varphi_{\Phi_\eta(\xi)}(1) \geqq \varphi_\xi(1)$ für $1 \leqq \xi \leqq \xi_\eta$, also insbesondere

$$\varphi_\eta(1) \geqq \varphi_{\xi_\eta}(1)$$

Ist $\varphi_{\xi_\eta}(1) > \tau_{\xi_\eta}$, so ist also $\varphi_\eta(1) > \tau_{\xi_\eta} = \tau_\eta$; dieser Fall kommt also nicht in Betracht.

Wir betrachten nun den Fall, dass $\varphi_{\xi_\eta}(1) = \tau_{\xi_\eta}$; dann existiert gemäss Induktionsvoraussetzung ein $\tilde{\xi}_\eta$ dritter Art mit den oben geforderten Eigenschaften.

Für η existieren dann die folgenden Möglichkeiten (cf. Nr. 2 von § 4):

Fall A: $\eta = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi_1 + \xi_2$, $\xi_\eta = \xi_2$ zweiter Art $< \Omega^{\xi_0}$. Ist dann $\tilde{\xi}_\eta \leqq \Omega^{\xi_0}$, so setze man $\tilde{\eta} = \Omega^{\xi_0} \cdot \xi_1 + \tilde{\xi}_\eta$. Ist $\tilde{\xi}_\eta > \Omega^{\xi_0}$, so ist wegen $\xi_\eta < \Omega^{\xi_0} < \tilde{\xi}_\eta$ und der Eigenschaft 2) b) der zu $\tilde{\xi}_\eta$ gehörenden Folge

$$\varphi_{\Omega^{\xi_0}}(1) > \varphi_{\xi_\eta}(1);$$

da ferner $\varphi_\eta(1) > \varphi_{\Omega^{\xi_0}\cdot\xi_1}(1) \geqq \varphi_{\Omega^{\xi_0}}(1)$, ist $\varphi_\eta(1) > \varphi_{\xi_\eta}(1)$, also

$$\varphi_\eta(1) > \tau_\eta$$

Fall B: $\eta = \Omega^{\xi_0}\cdot(\xi'_1+1)$, $\xi'_1 \geqq 1$, $\xi_\eta = \Omega^{\xi_0}$, ξ_0 zweiter Art. Dann ist

$$\varphi_\eta(1) > \varphi_{\Omega^{\xi_0}}(1) = \tau_\eta$$

Fall C: $\eta = \Omega^{\xi_0}\cdot\xi_1$, $\xi_\eta = \xi_1$ zweiter Art $< \Omega$. Setze $\tilde\eta = \Omega^{\xi_0+1}$.

Fall D: $\eta = \Omega^{\xi''_\eta+1}$ ist dritter Art.

Fall E und E': $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{\xi<\omega} F_{\zeta'}^{1+\xi}(F_\zeta(\xi''_\eta)+1)$ oder $\doteq \operatorname*{Lim}_{\xi<\omega} F_{\zeta'}^{1+\xi}(1)$, also $\tau_\eta = \omega$, also sicher $\varphi_\eta(1) > \tau_\eta$.

Fall F: $\eta = F_{\xi_\eta}(\xi''_\eta+1)$, $\xi''_\eta \geqq 1$. Da $\eta < F_\Omega(1)$ vorausgesetzt ist, ist $\xi_\eta < \Omega$, also $\tilde\xi_\eta = \Omega$. Wegen $F_{\xi_\eta}(1) < \eta < F_\Omega(1)$ ist $\varphi_\eta(1) > \varphi_{F_{\xi_\eta}(1)}(1) \geqq \tau_{\xi_\eta} = \tau_\eta$.

Fall G: $\eta = F_\zeta(\varrho + \xi_\eta)$, $0 \leqq \zeta < \Omega$ oder $\zeta = \omega_2$; entweder ist $\varrho = F_{\zeta+1}(\mu)$, $F_{\zeta+1}(\mu) < \eta < F_{\zeta+1}(\mu+1)$, $\mu > 0$; oder dann ist $0 < \eta < F_{\zeta+1}(1)$, und es sei $\varrho = \mu = 0$.

Ist nun $\tilde\xi_\eta < F_{\zeta+1}(\mu+1)$, so setze man $\tilde\eta = F_\zeta(\varrho + \tilde\xi_\eta)$. Dann ist wegen Hilfssatz 2

$$\tilde\eta < F_\zeta(\varrho + F_{\zeta+1}(\mu+1)) = F_\zeta(F_{\zeta+1}(\mu+1)) = F_{\zeta+1}(\mu+1)$$

also erfüllt $\tilde\eta$ die geforderten Bedingungen.

Ist aber $\tilde\xi_\eta \geqq F_{\zeta+1}(\mu+1)$, so ist $F_\zeta(\varrho+\tilde\xi_\eta) \geqq F_{\zeta+1}(\mu+1)$. Dann ist wegen $\xi_\eta < \eta < \tilde\xi_\eta$

$$\varphi_\eta(1) > \varphi_{\xi_\eta}(1) = \tau_\eta$$

In jedem der obigen Fälle ist das definierte $\tilde\eta$ kleiner als $F_\Omega(1)$, ausser im Falle G mit $\zeta = \omega_2$; dann ist $\eta = F_{\xi_\eta}(1)$, $\tilde\eta = F_\Omega(1)$.

B e m e r k u n g 2: Indem wir bei Hilfssatz 4 die Bedingung $\eta < F_\Omega(1)$ stellen, benützen wir nur einen Abschnitt der Folge $\mathfrak{F}_1$; denn wir können vorderhand nicht entscheiden, ob im Falle F der Hilfssatz 4 auch noch für $\eta > F_\Omega(1)$ gilt; dies dürfte vielleicht ein schwieriges Problem sein. Wenn man sich aber nur auf die in Nr. 3 dieses Paragraphen aufgestellten Forderungen 1) 2) beschränkt, kann man sogar die Folge $\mathfrak{F}_1$ noch zu einer grösseren Folge ausdehnen mit Hilfe weiterer Normalfunktionen zweiter Klasse, wie man leicht zeigen kann; von einer gewissen Stelle an fehlen uns jedoch wieder die dazu erforderlichen Beweise. Wir wollen dies aber nicht ausführen, weil wir ja nur einen Abschnitt von $\mathfrak{F}_1$ benützen werden. Mit Hilfe dieses Abschnitts erhalten wir aber (wie wir sogleich sehen werden) ausgezeichnete Folgen für einen erheblich grösseren Abschnitt der zweiten Zahlklasse als VEBLEN.

Wir definieren nun, genau wie in § 3, ausgezeichnete Folgen für alle Limeszahlen $y < H(1) = \varphi_{F_\Omega(1)+1}(1)$ (die Grenze $H(1)$ könnte natürlich noch etwas weiter vorgeschoben werden):

Wir definieren $\omega \equiv \operatorname{Lim}_{n<\omega} (1+n)$ und nehmen an, wir hätten für jede Limeszahl $y' < y$ eine ausgezeichnete Folge definiert, wobei $\omega < y < H(1)$, und zeigen, dass man dann auch für y eine ausgezeichnete Folge definieren kann.

Man kann zwei Fälle unterscheiden:

1) Liegt y nicht in $V\varphi_0$, so ist die Definition der ausgezeichneten Folgen sehr einfach und genau wie in Nr. 3 von § 3 auszuführen.

2) Liegt y in $V\varphi_0$, so existiert eine letzte Zahl η mit $0 \leqq \eta \leqq F_\Omega(1)$, so dass y in $V\varphi_\eta$ liegt, aber nicht in $V\varphi_{\eta'}$ für $\eta < \eta' \leqq F_\Omega(1) + 1$. Dies lässt sich wiederum leicht einsehen mit denselben Schlüssen, wie wir sie in § 5 ausführen werden. Man hat also $y = \varphi_\eta(x) > x$. η kann in VF_0 liegen oder nicht. Da aber in beiden Fällen Hilfssatz 4 gilt, kann man genau so vorgehen wie in Nr. 3 von § 3:

Ist x zweiter Art, so verwendet man Satz 1 von § 2.

Es sei nun x erster Art. Ist dann $\eta = 0$, so liegt die Definition der ausgezeichneten Folge für y auf der Hand. Ist η erster Art, so verwendet man Satz 2 von § 2. Ist η zweiter Art, so verwendet man Satz 3 von § 2. Dies ist wegen $\varphi_\eta(1) > \tau_\eta$ statthaft; denn wäre $\varphi_\eta(1) = \tau_\eta$, so würde nach dem vierten Hilfssatz ein $\tilde{\eta}$ dritter Art existieren mit $\eta < \tilde{\eta} \leqq F_\Omega(1)$, so dass y in $V\varphi_{\eta+1}$ liegen würde; das wäre ein Widerspruch zur Annahme, dass y nicht in $V\varphi_{\eta'}$ liegt für $\eta' > \eta$. Ist η dritter Art, so kann man ebenfalls genau wie in § 3 vorgehen (Zurückführung des Falles auf die andern Fälle durch endlich viele Regressionen).

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch unsere Grenze $H(1)$ mit der Grenze $E(1)$ des Verfahrens von Veblen vergleichen:

Es ist

$$E(1) = \varphi_{\Omega^\Omega+1}(1) = \varphi_{F_0(\Omega)+1}(1)$$
$$H(1) = \varphi_{F_\Omega(1)+1}(1) = \varphi_{F_{\omega_2}(\Omega)+1}(1)$$

$E(1)$ ist die erste kritische Zahl von $\varphi_{F_0(\Omega)}$, $H(1)$ die erste kritische Zahl von $\varphi_{F_{\omega_2}(\Omega)}$. Es ist

$$H(1) > \varphi_{F_\Omega(1)}(1) = \varphi_{F_2(1)}(1) > \varphi_{F_1(1)}(1) > \varphi_{F_0^2(1)+1}(1) = E(1).$$

§ 5 Bedingungen für die Möglichkeit der völligen Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen mittels des Verfahrens von Veblen

1. Das Problem wäre nun, das Verfahren von Veblen noch weiter fortzusetzen und dabei die Folge $\mathfrak{F}_1$ von Normalfunktionen erster Klasse zu einer umfassenderen Folge $\mathfrak{F}$ zu erweitern, bis man allen Limeszahlen der zweiten Zahlklasse ausgezeichnete Folgen zugeordnet hat. Wir wollen in diesem Paragraphen sehen, was für Eigenschaften eine solche Folge $\mathfrak{F}$ haben müsste.

Wir nehmen an, wir hätten eine Folge $\mathfrak{F} = \{\varphi_\eta\}$ von einem gewissen Typus Λ (wobei Λ eine Limeszahl $\leqq \omega_2$ sei) von Normalfunktionen φ_η erster Klasse fertig vorliegend, mit den Eigenschaften (für alle $\eta < \Lambda$):

1) a) $\varphi_0(x) = \omega^x$.

b) Ist $\eta = \eta' + 1$, so sei $\varphi_\eta = \varphi'_{\eta'}$.

c) Ist η zweiter Art, so sei zu η eine Limeszahl τ_η der zweiten Zahlklasse gegeben und dazu eine aufsteigende Folge $\{\eta_x\}$ vom Typus τ_η, so dass $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$; $V\varphi_\eta = \operatorname*{D}_{x<\tau_\eta} V\varphi_{\eta_x}$.

d) Ist η dritter Art, so sei zu η eine aufsteigende Folge $\{\eta_x\}$ vom Typus Ω gegeben, so dass $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\Omega} \eta_x$; $\varphi_\eta(x) = \varphi_{\eta_x}(1)$.

2) Für die Folgen $\{\eta_x\}$ bzw. $\{\varphi_{\eta_x}\}$ in 1), d. h. für alle x mit $1 \leqq x < \tau_\eta$ (bei 1) d) speziell für alle x mit $1 \leqq x < \Omega$), gelte:

a) Ist x eine Limeszahl, so ist $\eta_x \doteq \operatorname*{Lim}_{x'<x} \eta_{x'}$.

b) $\eta_x + 1 \rightarrow \eta_{x+1}$, wobei der Pfeil wieder die in § 3, Nr. 2, definierte Bedeutung hat.

3) Ist η zweiter Art, $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\tau_\eta} \eta_x$ und $\varphi_\eta(1) = \tau_\eta$, so existiert eine bestimmte Ordnungszahl $\tilde\eta$ dritter Art mit $\tilde\eta = \operatorname*{Lim}_{x<\Omega} \tilde\eta_x$ und $\eta < \tilde\eta < \Lambda$ (d. h. $\varphi_{\tilde\eta+1}$ in $\mathfrak{F}$), so dass $\tilde\eta_x = \eta_x$ für $x < \tau_\eta$, $\tilde\eta_{\tau_\eta} = \eta$.

4) Ist $\{\eta_\nu\}$ eine Folge (deren Typ eine Limeszahl λ sei) mit $\operatorname*{Lim}_{\nu<\lambda} \eta_\nu = \Lambda$, so ist $\operatorname*{D}_{\nu<\lambda} V\varphi_{\eta_\nu}$ leer.

In Nr. 2 dieses Paragraphen werden wir beweisen, dass man mit Hilfe einer solchen Folge $\mathfrak{F}$ das Problem der ausgezeichneten Folgen wirklich für die ganze zweite Zahlklasse lösen könnte.

Die Bedingungen 1) und 2) gelten für die Folgen $\mathfrak{F}_0$ (§ 3, Nr. 2) und $\mathfrak{F}_1$ (§ 4, Nr. 3). Bedingung 2) muss gestellt werden, damit für die Folgen $\{\varphi_{\eta_x}\}$ die Eigenschaften I) und II) von § 2 erfüllt sind, so dass die Definitionen von φ_η (wenn η eine Limeszahl) in 1) gestattet sind, und man die Sätze von § 2 anwenden kann. Auch die weiteren Bedingungen müssen gestellt werden, wie wir sehen werden.

2. Wir wollen jetzt aus der Annahme der Existenz einer Folge $\mathfrak{F}$ mit den obigen Eigenschaften Folgerungen ziehen.

Satz 1: Ist $\{\eta'_x\}$ eine beliebige, aufsteigende Folge vom Typus Ω von Ordnungszahlen, so dass alle $\varphi_{\eta'_x}$ (für alle $x < \Omega$) zu $\mathfrak{F}$ gehören (d. h. $\eta'_x < \Lambda$ für alle $x < \Omega$), so ist $\operatorname*{D}_{x<\Omega} V\varphi_{\eta'_x}$ leer.

Beweis: Es sei $\eta = \operatorname*{Lim}_{x<\Omega} \eta'_x$; also ist η dritter Art. Ist $\eta = \Lambda$, so ist $\operatorname*{D}_{x<\Omega} V\varphi_{\eta'_x}$ wegen Eigenschaft 4) leer.

Ist $\eta < \Lambda$, so ist nach Voraussetzung 1) d) $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\Omega} \eta_x$, ferner $\operatorname*{D}_{x<\Omega} V\varphi_{\eta_x}$ leer, weil $\operatorname*{Lim}_{x<\Omega} \varphi_{\eta_x}(1) = \Omega$. Wir untersuchen jetzt $\operatorname*{D}_{x<\Omega} V\varphi_{\eta'_x}$.

Liegt α in $\underset{x<\Omega}{D}\, V\varphi\eta'_x$ so liegt α in allen $V\varphi\eta'_x$. Nehmen wir nun ein beliebiges $x_0 < \Omega$, so gibt es ein $x_1 < \Omega$, so dass $\eta_{x0} \leqq \eta'_{x_1} < \eta$. Da α in $V\varphi\eta'_{x_1}$ liegt, liegt α auch in $V\varphi_{\eta_{x_0}}$ (denn $V\varphi\eta'_{x_1}$ ist wegen den Eigenschaften 2) der Folge $\{\varphi\eta_x\}$ eine Teilmenge von $V\varphi_{\eta_{x_0}}$). Da dies für beliebiges $x_0 < \Omega$ gilt, liegt α in $\underset{x<\Omega}{D}\, V\varphi\eta_x$, also ist $\underset{x<\Omega}{D}\, V\varphi\eta'_x$ Teilmenge von $\underset{x<\Omega}{D}\, V\varphi_{\eta_x}$, also ist auch $\underset{x<\Omega}{D}\, V\varphi\eta'_x$ die Nullmenge.

Bemerkung: Lässt man die Voraussetzung 4) fallen (nimmt man also z. B. einen beliebigen Abschnitt von $\mathfrak{F}_0$ oder $\mathfrak{F}_1$), so gilt Satz 1 nur noch, wenn die Beschränkung $\underset{x<\Omega}{\mathrm{Lim}}\, \eta'_x < \Lambda$ zur Voraussetzung hinzugenommen wird.

Satz 2: Der Typus Λ von $\mathfrak{F}$ ist eine Limeszahl der dritten Zahlklasse.

Beweis: Annahme: $\Lambda = \omega_2$. Es liege α in $V\varphi_0$. Wir nehmen in $\mathfrak{F}$ alle $\varphi\eta$, für die α in $V\varphi\eta$ liegt. So erhalten wir eine Folge $\{\varphi\eta'_\nu\}$ von einem bestimmten Typus ξ (ν durchläuft alle Zahlen $< \xi$). Entweder hat diese Folge ein letztes Element (wenn ξ von erster Art), oder dann ist $\underset{\nu<\xi}{\mathrm{Lim}}\, \eta'_\nu < \Lambda$, weil sonst $\xi = \omega_2$ wäre, man also einen Abschnitt der Folge $\{\eta'_\nu\}$ hätte, dessen Typus $= \Omega$ und dessen Limes $< \Lambda$ wäre; also wäre nach Satz 1 $\underset{\nu<\Omega}{D}\, V\varphi\eta'_\nu$ leer, was der Definition der Folge $\{\varphi\eta'_\nu\}$ widerspricht. Da der ganze Schluss für jede beliebige Ordnungszahl α aus $V\varphi_0$ gilt, existiert zu jedem solchen α eine Zahl $\eta_\alpha < \omega_2$, so dass α nicht in $V\varphi\eta$ liegt für alle η mit $\eta_\alpha < \eta < \Lambda$. Der Limes aller η_α sei H. Dann liegt keine Zahl von $V\varphi_0$ in $V\varphi\eta$ für $\eta > H$. Da aber $H < \Lambda$, wäre dies ein Widerspruch dazu, dass alle $V\varphi\eta$ für $\eta < \Lambda$ aus Zahlen von $V\varphi_0$ bestehen. — Also ist $\Lambda < \omega_2$.

Satz 2': Λ ist von dritter Art.

Beweis: Zum Beweise nehmen wir an, Λ sei von zweiter Art; dann existiert eine Folge $\{\eta_m\}$ vom Typ ω mit $\underset{m<\omega}{\mathrm{Lim}}\, \eta_m = \Lambda$. Wir nehmen nun ein festes $m < \omega$ und definieren dazu eine endliche Folge $\{\zeta_n\}$:

Es sei $\zeta_0 = \eta_{m+1}$.

Ist $\eta_m + 1 < \zeta_n$ und $\zeta_n = \zeta'_n + 1$, so sei $\zeta_{n+1} = \zeta'_n$. Dann ist $V\varphi_{\zeta_n}$ Teilmenge von $V\varphi_{\zeta_{n+1}}$.

Ist $\eta_m + 1 < \zeta_n$ und ζ_n eine Limeszahl mit $\zeta_n \doteq \underset{x<\tau_{\zeta_n}}{\mathrm{Lim}}\, \sigma_x$, so sei σ_{x0} das erste Glied der Folge $\{\sigma_x\}$ mit $\sigma_{x0} > \eta_m$ und es sei $\zeta_{n+1} = \sigma_{x0}$. Dann gibt es eine Zahl $y = \Omega$, so dass der durch $\varphi_{\zeta_n}(x) > y$ definierte Rest von $V\varphi_{\zeta_n}$ eine Teilmenge von dem durch $\varphi_{\zeta_{n+1}}(x) > y$ definierten Rest von $V\varphi_{\zeta_{n+1}}$ ist.

Nach endlich vielen Schritten kommt ein $\zeta_{n0} = \eta_m + 1$; somit gibt es eine Zahl $y^{(m)}$, so dass der durch $\varphi\eta_{m+1}(x) > y$ definierte Rest von $V\varphi\eta_{m+1}$ eine Teilmenge von dem durch $\varphi\eta_{m+1}(x) > y$ definierten Rest von $V\varphi\eta_{m+1}$ ist; der betrachtete Rest von $V\varphi\eta_{m+1}$ besteht nur aus kritischen Zahlen von $V\varphi\eta_m$.

Für jedes $m < \omega$ existiert ein solches $y^{(m)}$; der Limes aller $y^{(m)}$ sei y_0. Dann ist $y_0 < \Omega$, und der Durchschnitt der durch $\varphi\eta_m(x) > y_0$ definierten Reste der $V\varphi\eta_m$ ist nicht leer (cf. die Voraussetzung I) von § 2), also ist $\underset{m<\omega}{D} V\varphi\eta_m$ nicht leer, was der Voraussetzung 4) dieses Paragraphen widerspricht.

Satz 3: Hat man eine Folge $\mathfrak{F}$ von einem Typus Λ dritter Art $< \omega_2$ eindeutig konstruiert, so ist das Problem der ausgezeichneten Folgen für die ganze zweite Zahlklasse lösbar.

Beweis: a) Wir setzen $\omega \equiv \underset{n<\omega}{\mathrm{Lim}}(1+n)$ und nehmen an, wir hätten für alle Limeszahlen $y' < y$ ausgezeichnete Folgen definiert, wobei y eine Limeszahl mit $\omega < y < \Omega$, und zeigen, dass man dann auch für y eine ausgezeichnete Folge definieren kann.

b) Liegt y nicht in $V\varphi_0$, so ist in eindeutiger Weise $y = \omega^{x_0} \cdot x_1 + x_2$, wobei $1 \leqq x_0 < \Omega$, $1 \leqq x_1 < \omega$, $0 \leqq x_2 < \omega^{x_0}$. Man kann also die ausgezeichneten Folgen von y genau so definieren wie in Nr. 3 von § 3.

c) Liegt y in $V\varphi_0$, so existiert eine letzte Normalfunktion $\varphi\eta$ von $\mathfrak{F}$, so dass y in $V\varphi\eta$ liegt, aber nicht in $V\varphi\eta'$ für alle η' mit $\eta < \eta' < \Lambda$. Das kann man folgendermassen zeigen:

Es sei $\{\eta'_\nu\}$ die Folge vom Typus λ, so dass y in allen $V\varphi\eta'_\nu$ und nur in diesen Wertmengen liegt (wobei ν alle Zahlen $< \lambda$ durchläuft). Wir nehmen an, diese Folge habe kein letztes Element, d. h. λ sei eine Limeszahl. Setzt man $\eta' = \underset{\nu<\lambda}{\mathrm{Lim}}\, \eta'_\nu$, so folgt aus 4) sofort $\eta' < \Lambda$. Wäre nun η' dritter Art, so könnte man genau wie im Beweis von Satz 1 zeigen, dass $\underset{\nu<\lambda}{D} V\varphi\eta'_\nu$ leer wäre; man hätte also einen Widerspruch. Wäre η' zweiter Art, $\eta' \equiv \underset{x<\tau_{\eta'}}{\mathrm{Lim}}\, \eta''_x$, so könnte man ebenso wie im Beweis von Satz 1 zeigen, dass $\underset{\nu<\lambda}{D} V\varphi\eta'_\nu$ eine Teilmenge von $\underset{x<\tau_{\eta'}}{D} V\varphi\eta''_x = V\varphi\eta'$ wäre, d. h. dass y auch in $V\varphi\eta'$ liegen würde, was der Voraussetzung widerspricht. Also hat die Folge $\{\eta'_\nu\}$ ein letztes Element, das wir mit η bezeichnen. — Man hat also $y = \varphi\eta(x) > x$.

d) Man kann nun für y eine ausgezeichnete Folge definieren wie in den vorangehenden Paragraphen (cf. § 3, Nr. 3). Wir fassen nur kurz zusammen:

Es sei x erster Art. Ist dann $\eta = 0$, so liegt die Definition der Folge von y auf der Hand. Ist η erster Art, so verwende man Satz 2 von § 2. Ist η zweiter Art, $\eta \equiv \underset{x<\tau_\eta}{\mathrm{Lim}}\, \eta_x$, so verwende man Satz 3 von § 2 bezüglich der Folge $\{\varphi\eta_x\}$. Diese letzte Definition versagt, wenn $y = \varphi\eta(1) = \tau\eta$. Das kann aber nicht eintreten, weil sonst nach Voraussetzung 3) eine Zahl $\tilde{\eta} > \eta$ existieren würde, so dass y in $V\varphi_{\eta+1}$ liegen würde. Ist η dritter Art, so kann man den Fall durch endlich viele Regressionen auf die restlichen Fälle zurückführen. Wie in § 3 zeigt man, dass dabei im Falle der Anwendung von Satz 3 von § 2 kein Versagen der Definition eintreten kann.

Ist x zweiter Art, so verwende man Satz 1 von § 2.

Bei den Beweisen des eingeschränkten Satzes 1 und des Satzes 2 haben wir nur die Bedingungen 1) und 2) benutzt; die Bedingungen 3) und 4) sind erst bei Satz 2′ und 3 wesentlich. Satz 2 besagt, dass man die Folge $\mathfrak{F}_1$ bei Erhaltung ihrer Eigenschaften 1) und 2) nicht durch die ganze dritte Zahlklasse hindurch fortsetzen kann, wie es zuerst scheinen mag. Mit Satz 3 ist das Problem der ausgezeichneten Folgen auf das (allerdings wohl nicht weniger schwierige) Problem der Existenz (oder der Konstruktion) von $\mathfrak{F}$ zurückgeführt. Wir können damit klar definieren, was wir unter Fortsetzung des Verfahrens von VEBLEN bis zur völligen Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen verstehen wollen: darunter soll die Bildung einer Folge $\mathfrak{F}$ von Normalfunktionen mit den obigen Bedingungen gemeint sein. Existiert keine Folge von Normalfunktionen mit diesen Eigenschaften (was sehr wohl möglich ist), so kann man das Problem der ausgezeichneten Folgen mit der Methode von VEBLEN nicht lösen.

Bemerkung: Die Gedankengänge von §§ 3 bis 5 lassen sich übrigens leicht verallgemeinern auf höhere Zahlklassen bzw. Normalfunktionen höherer Klassen. Das Problem der ausgezeichneten Folgen würde dann in verallgemeinerter Form lauten: Jeder Limeszahl $\eta < \omega_{k+1}$ (wobei k eine beliebige feste Ordnungszahl) eine eindeutige aufsteigende Folge $\{\eta_x\}$, deren Typus λ eine Limeszahl mit $\omega \leqq \lambda \leqq \omega_k$ ist, zuzuordnen, so dass $\eta = \operatorname{Lim}_{x<\lambda} \eta_x$.

§ 6 Das Analogon für zahlentheoretische Funktionen

1. Für die monoton steigenden zahlentheoretischen Funktionen $f(x)$ (als Normalfunktionen 0. Klasse) lassen sich analoge Betrachtungen anstellen. Hier durchläuft das Argument alle natürlichen Zahlen und es ist $\operatorname{Lim}_{x<\omega} f(1+x) = \omega$. Da eine solche Funktion keine kritischen Zahlen zu haben braucht, wollen wir an Stelle der Bildung der Ableitung eine andere Operation einführen, aus der eine Verdünnung der Wertmenge der Funktion resultiert, z. B. die Bildung der Iteration $g(x) = f^2(x) = f(f(x))$ aus $f(x)$. Benutzt man nur solche zahlentheoretische Funktionen $f(x)$, die die Bedingung $f(1) > 1$ erfüllen (was wir ja auch bei den Normalfunktionen erster Klasse vorausgesetzt haben), so ist $g(1) > f(1)$ und Vg Teilmenge von Vf. Ähnlich wie beim Verfahren von VEBLEN kann man dann von einer bestimmten Ausgangsfunktion, z. B. 2^x, ausgehen, sodann ihre Iteration bilden, von der neuen Funktion wieder die Iteration usw., dann die Anfangszahlen der erhaltenen Funktionenfolge vom Typ ω nehmen usw.

Der Folge $\mathfrak{F}$ von Normalfunktionen erster Klasse in § 5 würde somit eine Folge $\mathfrak{F}' = \{f_\eta\}$ von einem gewissen Typus λ (wobei λ eine Limeszahl $\leqq \Omega$ sei) von zahlentheoretischen Funktionen f_η entsprechen, mit den Eigenschaften (für alle $\eta < \lambda$ geltend):

1) $f_0(x) = 2^x$ (z. B.).

2) Ist $\eta = \eta' + 1$, so ist $f_\eta = f^2_{\eta'}$.

3) Ist η zweiter Art, so ist zu η eine aufsteigende Folge $\{\eta_x\}$ vom Typus ω zugeordnet, so dass $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\omega} \eta_x$, $\eta_x + 1 \rightarrow \eta_{x+1}$ für alle $x < \omega$, und $f_\eta(x) = f_{\eta_x}(1)$. Dabei führen wir die Abkürzung $\alpha \rightarrow \beta$ ein für: Vf_η ist Teilmenge von Vf_α für alle η mit $\alpha < \eta \leqq \beta$.

Die weiteren Bedingungen, die wir bei $\mathfrak{F}$ aufgestellt haben, sind hier hinfällig oder nicht von Interesse.

2. Aus der Annahme der Existenz einer solchen Folge $\mathfrak{F}'$ von zahlentheoretischen Funktionen folgert man entsprechend § 5 die Sätze:

Satz 1: Für jede Folge $\{f_{\eta'_n}\}$ vom Typ ω von zahlentheoretischen Funktionen aus $\mathfrak{F}'$ ist $\underset{n<\omega}{D}\, Vf_{\eta'_n}$ leer, sofern $\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \eta'_n \neq \lambda$ ist[21]).

Beweis: Es sei $\eta = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \eta'_n$. Wegen $\eta < \lambda$ existiert f_η, und man hat eine Folge $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{x<\omega} \eta_x$. Genau wie im Beweis von Satz 1 von § 5 zeigt man, dass $\underset{n<\omega}{D}\, Vf_{\eta'_n}$ eine Teilmenge von der leeren Menge $\underset{x<\omega}{D}\, Vf_{\eta_x}$ ist, also selbst leer ist.

Satz 2: Es ist $\lambda < \Omega$.

Beweis: Annahme: $\lambda = \Omega$. Es sei α eine Zahl von Vf_0. Wir nehmen aus $\mathfrak{F}'$ alle f_η, für die α in Vf_η liegt; so erhalten wir eine aufsteigende Folge $\{\eta'_\nu\}$ bzw. eine Folge $\{f_{\eta'_\nu}\}$ von zahlentheoretischen Funktionen von einem gewissen Typus ξ. Entweder hat diese Folge ein letztes Element (wenn ξ erster Art), oder dann ist $\operatorname*{Lim}_{\nu<\xi} \eta'_\nu < \lambda$ (weil sonst $\xi = \Omega$ wäre, also ein Abschnitt vom Typ ω der Folge $\{\eta'_\nu\}$ existieren würde, dessen Limes kleiner als λ ist, was wegen Satz 1 sofort zu einem Widerspruch führen würde).

Somit existiert zu jedem α aus Vf_0 eine Zahl $\eta_\alpha < \Omega$, so dass α nicht in Vf_η liegt für alle η mit $\eta_\alpha < \eta < \lambda$. Ist H der Limes aller η_α, so ist $H < \Omega$ und kein α aus Vf_0 liegt in Vf_η für $\eta > H$, was unmöglich ist. Also ist die Annahme $\lambda = \Omega$ zu verwerfen.

Eine Folge mit den Eigenschaften von $\mathfrak{F}'$ kann also nicht vom Typ Ω sein (durch eine solche Zuordnung von zahlentheoretischen Funktionen zu den Ordnungszahlen wäre also zum vornherein keine überabzählbare Wohlordnung im Kontinuum erreichbar; cf. Nr. 2 von § 1).

3. Anwendung. Es ist nicht möglich, allen Limeszahlen η der dritten Zahlklasse Folgen $\{\eta_x\}$ von Typen $\tau_\eta \leqq \Omega$ zuzuordnen, so dass die Bedin-

[21]) Ob der Satz auch im Fall $\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \eta'_n = \lambda$ allgemein gilt, ist fraglich.

gungen 2) a) und 2) b) von Nr. 2 von § 3 erfüllt sind. Denn sonst könnte man die Existenz einer Folge vom Typus ω_2 von Normalfunktionen erster Klasse mit den Bedingungen 1) 2) von Nr. 1 von § 5 folgern, was nach § 5 unmöglich ist (denn genau wie in Nr. 2 von § 3 würde man aus 2) b) von § 3 die Bedingung 3) von § 3, d. h. die Bedingung 2) b) von § 5 und somit auch 1) von § 5 beweisen können für alle $\eta < \omega_2$).

Den Bedingungen 2) a) und 2) b) von § 3 entspricht in der zweiten Zahlklasse das folgende Problem der ausgezeichneten Folgen mit einer Nebenbedingung: Jeder Limeszahl η der zweiten Zahlklasse eine eindeutige aufsteigende Folge $\{\eta_n\}$ vom Typus ω zuzuordnen, so dass $\eta \doteq \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \eta_n$, und aus $0 \leqq n < \omega$, $\eta_n < \beta \leqq \eta_{n+1}$, $\beta \doteq \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \beta_n$ die Relation $\beta_0 \geqq \eta_n$ folgt.

Man erkennt sehr leicht, dass Lösungen dieses Problems existieren, wenn man sich auf einen beliebigen Abschnitt der zweiten Zahlklasse beschränkt (eine eindeutige Lösung kann man aber nur dann auswählen, wenn man das Problem der ausgezeichneten Folgen ohne Nebenbedingung eindeutig gelöst hat):

Man setze $\omega \doteq \operatorname*{Lim}_{n<\omega} (1+n)$. Wir nehmen an, allen Limeszahlen η, die kleiner als eine bestimmte Limeszahl $x > \omega$ der zweiten Zahlklasse sind, seien Folgen $\{\eta_n\}$ mit der obigen Nebenbedingung zugeordnet und zeigen, dass man dann allen Limeszahlen $\leqq x$ solche Folgen zuordnen kann:

Es sei $\{x_n\}$ eine beliebige aufsteigende Folge für x; ist η eine Limeszahl mit $x_n < \eta \leqq x_{n+1}$ $(0 \leqq n < \omega)$ und der zugehörigen Folge $\{\eta_n\}$, so ersetze man die Folge $\{\eta_n\}$ durch einen solchen Rest, dessen erstes Glied $\geqq x_n$ ist; ist $\eta \leqq x_0$, so lasse man die Folge $\{\eta_n\}$ ungeändert. Die neuen Folgen mit der Folge $\{x_n\}$ erfüllen die Nebenbedingung.

Da bei diesem Induktionsbeweis aber bei jedem Schritt die schon vorhandenen Folgen verändert werden, kann man nicht darauf schliessen, dass das Problem für die ganze zweite Zahlklasse lösbar ist. Es gilt sogar der

Satz: Mit der obigen Nebenbedingung ist das Problem der ausgezeichneten Folgen nicht für alle Limeszahlen der zweiten Zahlklasse lösbar.

Beweis: Wir zeigen, dass wir bei Annahme des Gegenteils eine Folge von zahlentheoretischen Funktionen mit den Eigenschaften 1) bis 3) von $\mathfrak{F}'$ (wobei die Folge $\{\eta_x\}$ in Bedingung 3) gerade die nach Voraussetzung gegebene Folge von η mit der obigen Nebenbedingung ist), die vom Typ Ω wäre, konstruieren könnten, was nach den Ausführungen dieses Paragraphen unmöglich ist:

Man setze $f_0(x) = 2^x$. Sind alle $f_{\eta'}$ für $\eta' < \eta$ (wobei $1 \leqq \eta < \Omega$) aufgestellt unter Beobachtung der geforderten Bedingungen, so kann man auch f_η bilden:

Ist $\eta = \eta' + 1$, so sei $f_\eta = f_{\eta'}{}^2$.

Ist η zweiter Art und $\{\eta_x\}$ die nach Voraussetzung gegebene Folge für η, so definieren wir für festes $m < \omega$ eine endliche Folge $\{\zeta_n\}$ durch die Festsetzungen: Es sei $\zeta_0 = \eta_{m+1}$. Ist $\eta_m + 1 < \zeta_n$ und $\zeta_n = \zeta'_n + 1$, so setze man $\zeta_{n+1} = \zeta'_n$; also ist $\eta_m + 1 \leqq \zeta_{n+1} < \zeta_n$ und $\zeta_{n+1} \to \zeta_n$. Ist $\eta_m + 1 < \zeta_n$, ζ_n zweiter Art und $\{\zeta_n^{(x)}\}$ die nach Voraussetzung gegebene Folge für ζ_n, so sei $\zeta_{n+1} = \zeta_n^{(1)}$; dann ist $\eta_m + 1 \leqq \zeta_{n+1} < \zeta_n$ und $\zeta_{n+1} \to \zeta_n$. Nach endlich vielen Regressionen kommt ein $\zeta_{n_0} = \eta_m + 1$; daraus folgt $\eta_m + 1 \to \eta_{m+1}$, und man kann $f_\eta(x) = f_{\eta_x}(1)$ setzen.

§ 7 Zurückführung des Problems der ausgezeichneten Folgen auf andere mit Normalfunktionen zusammenhängende Probleme

1. Wie man sehr leicht zeigen kann (cf. Bemerkung 2 dieses Paragraphen), kann man für alle Limeszahlen der zweiten Zahlklasse ausgezeichnete Folgen bestimmen, wenn man solche bereits zur Verfügung hat für alle Zahlen von $V\varphi_0$, d. h. für alle Zahlen ω^x $(1 \leqq x < \Omega)$. Wir wollen uns deshalb in diesem Anhang auf die Menge $V\varphi_0$ beschränken. Ferner führen wir folgende Abkürzung ein: Ist $\{y_n\}$ eine aufsteigende Folge vom Typ ω von Ordnungszahlen, so sei $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$ (definiert für $1 \leqq n < \omega$) die zugehörige Differenzenfolge.

Wir beweisen nun die Ä q u i v a l e n z der vier folgenden Probleme:

1) Das Problem der ausgezeichneten Folgen für die Menge $V\varphi_0$; d. h. jeder Zahl y von $V\varphi_0$ eine ausgezeichnete Folge $0 < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$ vom Typus ω zuzuordnen mit $\lim\limits_{n<\omega} y_n = y$.
2) Das obige Problem mit folgenden Nebenbedingungen:
   a) $y_0 \leqq \Delta y_1$;
   b) $\Delta y_n \leqq \Delta y_{n+1}$ für $1 \leqq n < \omega$.
3) Jeder Zahl y von $V\varphi_0$ eindeutig eine Normalfunktion ψ_y erster Klasse zuzuordnen, so dass y die erste kritische Zahl von ψ_y ist $(y = \psi'_y(1))$.
4) Zu einer beliebigen gegebenen Normalfunktion $f(x)$ erster Klasse, deren Werte nur Zahlen von $V\varphi_0$ sind, eindeutig eine Normalfunktion $F(x)$ zuzuordnen, so dass $F'(x) = f(x)$.

Unter der Äquivalenz der Probleme ist die folgende Eigenschaft zu verstehen: Hat man eine e i n d e u t i g e Lösung eines solchen Problems, so kann man daraus auch für die andern obigen Probleme eindeutige Lösungen konstruieren.

B e w e i s d e r Ä q u i v a l e n z :

1) Wir beweisen zuerst die Äquivalenz der beiden ersten Probleme. Wir müssen nur zeigen, dass man aus einer eindeutigen Lösung des ersten Problems eine eindeutige Lösung des zweiten Problems konstruieren kann (denn die Umkehrung ist trivial):

Es sei $y = \omega^x$ und $x = x' + 1$. Dann setze man $y_n = \omega^{x'} \cdot (1 + n)$, somit hat man eine Folge $\{y_n\}$, die die Nebenbedingungen des zweiten Problems erfüllt.

Ist aber $y = \omega^x$, x eine Limeszahl und $\{y_n\}$ die nach Voraussetzung eindeutig gegebene ausgezeichnete Folge, die zu y gehört, so kann man zu jedem $n < \omega$ eindeutig die kleinste Zahl $x_n > 0$ fixieren, so dass $y_n \leqq \omega^{x_n}$. Dann ist $\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \omega^{x_n} = y$. Kommen in dieser Folge Glieder mehrfach vor, so nehme man sie nur einmal. Die so entstehende aufsteigende Teilfolge $\{z_n\}$ erfüllt die Bedingungen a) und b); denn, weil alle z_n Zahlen von $V\varphi_0$ sind, ist nach dem zweiten Hilfssatz von § 4

$$\Delta z_n = z_n \text{ für } 1 \leqq n < \omega$$

2) Sodann beweisen wir die Äquivalenz des zweiten und dritten Problems:

a) Man habe eine eindeutige Lösung des zweiten Problems. Dann kann man das dritte Problem eindeutig lösen: Es sei y eine beliebige Zahl aus $V\varphi_0$. Nach Voraussetzung ist dann zu y eine Folge $\{y_n\}$ mit den Nebenbedingungen a) und b) gegeben. Wir definieren nun die Normalfunktion ψ_y wie folgt:

Es sei $\psi_y(x) = y_0 + x$ für $1 \leqq x < y_0$, ferner

$$\psi_y(y_0) = y_0 \cdot 2$$

Für zunächst festes n sei

$$\psi_y(y_n + x) = y_{n+1} + x \text{ für } 1 \leqq x < \Delta y_n$$

$$\psi_y(y_{n+1}) = y_{n+1} + \Delta y_{n+1};$$

dies gelte dann für $0 \leqq n < \omega$.

Schliesslich sei $\psi_y(x) = x$ für alle x mit $y \leqq x < \Omega$.

$\psi_y(x)$ ist eine Normalfunktion; denn erstens ist sie monoton steigend (wegen $\Delta y_n \leqq \Delta y_{n+1}$) und zweitens ist sie stetig: wenn y_{n+1} eine Limeszahl, so ist $\operatorname*{Lim}_{x<\Delta y_{n+1}} \psi_y(y_n + x) = y_{n+1} + \Delta y_{n+1} = \psi_y(y_{n+1}) = \psi_y(\operatorname*{Lim}_{x<\Delta y_{n+1}}(y_n + x))$ für $0 \leqq n < \omega$, und wenn y_0 eine Limeszahl ist, so ist $\operatorname*{Lim}_{x<y_0} \psi_y(x) = y_0 + y_0 = \psi_y(y_0) = \psi_y(\operatorname*{Lim}_{x<y_0}(1 + x))$; ferner ist wegen $y_n < \psi_y(y_n) \leqq y_n + \Delta y_{n+1} = y_{n+1}$ $\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \psi_y(y_n) = \operatorname*{Lim}_{x<y} \psi_y(1 + x) = y$. Zudem ist y die erste kritische Zahl; denn ist $1 \leqq y' < y$, so hat man drei Fälle: $y' < y_0$, $y' = y_n$ (für ein bestimmtes n) oder $y' = y_n + x$ (für ein bestimmtes n und $1 \leqq x < \Delta y_{n+1}$). Im ersten Fall ist $\psi_y(y') > y'$ wegen $y_0 > 0$; im zweiten Fall ist $\psi_y(y') = y_n + \Delta y_n > y_n = y'$, weil $\Delta y_n > 0$; wäre im dritten Fall $\psi_y(y') = y'$, also $y_{n+1} + x = y_n + x$, so wäre $\Delta y_{n+1} + x = x$; weil aber die erste kritische Zahl der Normalfunktion $\chi(x) = \Delta y_{n+1} + x$ die Zahl $\Delta y_{n+1} \cdot \omega$ ist, wäre $x \geqq \Delta y_{n+1} \cdot \omega$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $x < \Delta y_{n+1}$ ist.

b) Umkehrung: Es sei das dritte Problem eindeutig gelöst, und y sei eine Zahl aus $V\varphi_0$; man hat nach Voraussetzung die Normalfunktion $\psi_y(x)$. Dann ist nach Satz 2 von § 2 $y = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \psi_y^n(1)$. $\{\psi_y^n(1)\}$ ist eine aufsteigende Folge, weil 1 keine kritische Zahl von ψ_y ist. Ferner ist (cf. Nr. 3 von § 1)

$$\psi_y{}^0(1) = 1 \leqq \psi_y(1) - 1 \leqq \psi_y{}^2(1) - \psi_y(1) \leqq$$
$$\psi_y{}^3(1) - \psi_y{}^2(1) \leqq \ldots$$

d. h. unsere Folge für y genügt den Nebenbedingungen a) und b).

3) Schliesslich beweisen wir die Äquivalenz des dritten und vierten Problems:

a) Aus einer eindeutigen Lösung des dritten folgt eine eindeutige Lösung des vierten Problems: Es sei $f(x)$ eine gegebene Normalfunktion, deren Wertmenge Teilmenge von $V\varphi_0$ sei. Man setze nun

$$F(y) = \psi_{f(1)}(y) \quad \text{für } 1 \leqq y < f(1)$$

(wobei $\psi_{f(1)}$ die nach Voraussetzung eindeutig bestimmte Normalfunktion ist, deren erste kritische Zahl $f(1)$ ist) und für zunächst festes x

$$F(f(x)) = f(x)$$
$$F(f(x) + y) = f(x) + \psi_{f(x+1)}(y) \quad \text{für } 1 \leqq y < f(x+1);$$

dies gelte dann für $1 \leqq x < \Omega$.

Unsere Funktion F ist eine Normalfunktion, wie man unter Anwendung von Hilfssatz 2 von § 4 zeigen kann; ferner ist $F(f(x)) = f(x)$, $F(y) > y$ für $y \neq f(x)$.

b) Umkehrung: Man habe das vierte Problem eindeutig gelöst, und y sei eine beliebige Zahl aus $V\varphi_0$; dann definieren wir die Normalfunktion $f(x)$ durch die Angabe: Vf bestehe genau aus allen Zahlen von $V\varphi_0$, die $\geqq y$ sind. Nach Voraussetzung existiert eine eindeutig definierte Normalfunktion $F(x)$, so dass $F'(x) = f(x)$, also $y = F'(1)$. Setzt man $\psi_y(x) = F(x)$, so hat man eine Lösung des dritten Problems.

2. Bemerkungen:

1) Das zweite Problem ist ein Problem der ausgezeichneten Folgen mit einer Nebenbedingung. Wenn man sich, wie vorausgesetzt, auf $V\varphi_0$ beschränkt, so besitzt es Lösungen. Es ist aber nicht lösbar für alle Limeszahlen der zweiten Zahlklasse; denn es sei z. B. $y = \varepsilon + \omega$ und $y = \operatorname{Lim}_{n<\omega} y_n$, wobei $\{y_n\}$ eine beliebige aufsteigende Folge für y sei. Dann sei y_{n0} das erste Glied der Folge mit $y_{n0} \geqq \varepsilon$. Ist $n_0 = 0$, so hat man $y_0 > \Delta y_1$; ist $n_0 > 0$, so ist $\Delta y_{n0} \geqq \varepsilon$, $\Delta y_{n_0+1} < \varepsilon$, also $\Delta y_{n0} > \Delta y_{n_0+1}$. In beiden Fällen sind also die Nebenbedingungen des zweiten Problems nicht erfüllt.

Lässt man dagegen die Nebenbedingung a) fallen, so hat man das Problem der ausgezeichneten Folgen mit einer nur noch unwesentlichen Nebenbedingung b); dieses ist lösbar für die ganze zweite Zahlklasse; denn man kann sehr leicht die Äquivalenz dieses Problems mit dem Problem der ausgezeichneten Folgen ohne Nebenbedingung beweisen:

Man muss nur zeigen, dass man aus einer eindeutigen Lösung des letzteren eine eindeutige Lösung des ersteren konstruieren kann (die Umkehrung ist trivial): Für ω ist $\omega = \underset{n<\omega}{\mathrm{Lim}}\,(1+n)$ zu setzen. Es sei $y > \omega$ eine Limeszahl der zweiten Zahlklasse mit einer nach Voraussetzung gegebenen ausgezeichneten Folge, und man habe für alle Limeszahlen $y' < y$ Folgen konstruiert, die b) erfüllen. Dann kann man auch für y eine solche Folge konstruieren: Liegt y in $V\varphi_0$, so kann man sogar eine Folge konstruieren, die a) und b) erfüllt (nach dem obigen Beweis in Nr. 1 dieses Paragraphen). Liegt y nicht in $V\varphi_0$, so schreiben wir $y = \omega^{x_0} \cdot x_1 + x_2$ mit $1 \leqq x_0 < \Omega$, $1 \leqq x_1 < \omega$, $0 \leqq x_2 < \omega^{x_0}$.

Ist dann x_2 zweiter Art und $\{\zeta_n\}$ die zugehörige Folge mit der Eigenschaft b), so ist $\omega^{x_0} \cdot x_1 + \zeta_n$ eine solche Folge für y. Ist $x_2 = 0$, $x_1 = x'_1 + 1\,(x'_1 \geqq 1)$ und $\{\zeta_n\}$ die Folge mit der Eigenschaft b), die zu ω^{x_0} gehört, so ist $\{\omega^{x_0} \cdot x'_1 + \zeta_n\}$ eine solche Folge für y.

2) Das wesentliche Resultat dieses Paragraphen ist aber die Zurückführung des Problems der ausgezeichneten Folgen auf das dritte oder vierte Problem; diese Probleme (für $V\varphi_0$) sind äquivalent zum Problem der ausgezeichneten Folgen für alle Limeszahlen der zweiten Zahlklasse, wie man leicht zeigen kann; man muss wegen der oben bewiesenen Äquivalenz der vier Probleme nur zeigen, dass das erste Problem zum Problem der ausgezeichneten Folgen (für alle Limeszahlen der zweiten Zahlklasse) äquivalent ist: Wir nehmen an, das Problem der ausgezeichneten Folgen sei gelöst für alle Zahlen aus $V\varphi_0$ und für alle Limeszahlen $< y$, wobei y eine Limeszahl mit $\omega < y < \Omega$, die nicht in $V\varphi_0$ liege. Dann kann man eine ausgezeichnete Folge für y definieren, indem man $y = \omega^{x_0} \cdot x_1 + x_2$ schreibt und dieselben Definitionen nimmt wie in Nr. 3 von § 3.

Literaturverzeichnis

(1) G. H. HARDY, Quarterly Journal of Mathematics, vol. 35 (1903).

(2) O. VEBLEN, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 9 (1908).

(3) A. CHURCH und S. C. KLEENE, Fundamenta Mathematicae, Bd. 28 (1937).

(4) F. HAUSDORFF, Mengenlehre, Dover Publications, 3rd Revised Edition (New York 1944).

(5) G. CANTOR, Gesammelte Abhandlungen (Berlin 1932).

(6) G. CANTOR, Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897).